Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Сахнович, Рациональность решений уравнения
Книжника–Замолодчикова, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 86–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:21:09

© 2010 г.

Л. А. Сахнович*

РАЦИОНАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

В явном виде в терминах гипергеометрических функций построено решение системы Книжника–Замолотчикова при $n = 4$, $m = 2$. Доказано, что данное решение является рациональным, когда параметр ρ целочисленный. Показано, что в случае, когда $n = 5$, $m = 5$, а ρ – целое число, соответствующая система Книжника–Замолотчикова не имеет рациональных решений.

Ключевые слова: симметрическая группа, естественное представление, диаграмма Юнга, целые собственные значения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{\partial W(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_k} = \rho A_k(z_1, z_2, \dots, z_n)W, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1)$$

где $A_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и $W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ – $(m \times m)$ -матричные функции. Предположим, что функция $A_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$ имеет вид

$$A_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{P_{k,j}}{z_k - z_j}, \quad (2)$$

где $z_k \neq z_j$ при $k \neq j$. Матрицы $P_{j,k}$ связаны с матричным представлением симметрической группы S_n и определяются формулой (4) (см. ниже). Заметим, что хорошо известное уравнение Книжника–Замолотчикова (КЗ) имеет вид (1), (2) [1]. Такая система нашла приложения в различных областях математики и физики (см. [1]–[4]). В работе [5] мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Фундаментальное решение системы КЗ (1), (2) является рациональным, если ρ – целое число, а матрицы $P_{k,j}$ задают естественное представление симметрической группы S_n .*

*E-mail: lsakhnovich@gmail.com

Заметим, что естественное представление является суммой 1-представления и неприводимого $(n-1)$ -представления. Соответствующее неприводимое $(n-1)$ -представление мы также будем называть естественным представлением.

В настоящей работе в явном виде в терминах гипергеометрических функций построено решение системы КЗ при $n = 4$, $m = 2$. Доказано, что это решение является рациональным, если ρ – целое число. Некоторые авторы (см. [6], [7]) утверждали, что решение уравнения КЗ рационально для всех представлений симметрической группы S_n , если параметр ρ является целочисленным. В настоящей работе построен пример $n = 5$, $m = 5$, для которого ρ целочисленно, однако соответствующее решение иррационально. Этот результат приводит к следующей нерешенной проблеме.

ПРОБЛЕМА. Пусть ρ – целое число, а $P_{k,j}$ – неприводимое представление симметрической группы S_n . Требуется найти условия, при которых соответствующее фундаментальное решение является рациональным.

Здесь может оказаться полезным следующее необходимое условие (см. [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если ρ – целое число, а фундаментальное решение системы (1), (2) является рациональным, то все собственные значения матриц

$$Q_k = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n P_{k,j}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3)$$

целочисленны.

В упомянутых выше случаях (естественные представления и $n = 4$, $m = 2$) сформулированное необходимое условие удовлетворяется.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЗ В СЛУЧАЕ $n = 4$, $m = 2$

В случае $n = 4$, $m = 2$ имеем следующее неприводимое матричное представление [9], [10]:

$$\begin{aligned} P_{1,2} = P_{3,4} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & P_{2,4} = P_{1,3} &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ P_{2,3} = P_{1,4} &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Следуя [4], сделаем замену переменных вида

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 - z_2, & u_k &= \frac{z_k - z_{k+1}}{z_{k-1} - z_k}, & 2 \leq k \leq 3, \\ u_4 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Система КЗ принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} = \rho H_j(u) W, \quad 1 \leq j \leq 4, \quad (6)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Имеем [5]

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = \rho \left(\frac{\Omega_1}{u_1} \right) W, \quad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_2} = \rho \left(\frac{\Omega_2}{u_2} + \frac{P_{1,3}}{1+u_2} + \frac{P_{1,4}(1+u_3)}{1+u_2+u_2u_3} \right) W, \quad (8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_3} = \rho \left(\frac{P_{4,3}}{u_3} + \frac{P_{4,2}}{1+u_3} + \frac{P_{4,1}u_2}{1+u_2+u_2u_3} \right) W, \quad (9)$$

где $H_4(u) = 0$ и

$$P_r = \sum_{j>r} P_{j,r}, \quad \Omega_1 = P_1 + P_2 + P_3, \quad \Omega_2 = P_2 + P_3. \quad (10)$$

Из (4) и (10) следует, что $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Поэтому система КЗ (8), (9) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial u_2} = \rho \left(\frac{P_{1,3}}{1+u_2} + \frac{P_{1,4}(1+u_3)}{1+u_2+u_2u_3} \right) W, \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_3} = \rho \left(\frac{P_{4,3}}{u_3} + \frac{P_{4,2}}{1+u_3} + \frac{P_{4,1}u_2}{1+u_2+u_2u_3} \right) W. \quad (12)$$

Введем матричную функцию

$$F(y) = W(y)(1+y)^\rho(1+y+yz)^\rho, \quad y = u_2, \quad u_3 = z. \quad (13)$$

Из соотношений (11) и (13) следует, что

$$\frac{dF}{dy} = \rho \left(\frac{P_{1,3} + I}{1+y} + \frac{(P_{1,4} + I)(1+z)}{1+y+yz} \right) F. \quad (14)$$

Рассмотрим постоянные векторы

$$w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (P_{1,3} + I)w_1 &= 0, & (P_{1,3} + I)w_2 &= -\sqrt{3}w_1 + 2w_2, \\ (P_{1,4} + I)w_1 &= \sqrt{3}w_2, & (P_{1,4} + I)w_2 &= 2w_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Представим $F(y)$ в виде

$$F(y) = \phi_1(y)w_1 + \phi_2(y)w_2 \quad (17)$$

и подставим это выражение в (14). В силу (16) имеем

$$\phi_1'(y) = -\frac{\sqrt{3}\rho}{1+y}\phi_2(y), \quad (18)$$

$$\phi_2'(y) = \rho \left(\frac{2\phi_2(y)}{1+y} + \frac{(2\phi_2(y) + \sqrt{3}\phi_1(y))(1+z)}{1+y+yz} \right), \quad (19)$$

$$(1+y) \left(\frac{1}{z+1} + y \right) \phi_1''(y) + B(z, y)\phi_1'(y) + 3\rho^2\phi_1(y) = 0, \quad (20)$$

где

$$B(z, y) = \frac{1}{z+1} + y - 2\rho \left[2 \left(\frac{1}{z+1} + y \right) + \frac{z}{z+1} \right]. \quad (21)$$

Заменой переменных $y = -zv/(z+1) - 1$, $\phi(v) = \phi_1(-zv/(z+1) - 1)$ сведем уравнение (20) к виду

$$v(1+v)\phi''(v) + [1+v-2\rho(1+2v)]\phi'(v) + 3\rho^2\phi(v) = 0. \quad (22)$$

Вводя $\psi(v) = \phi(-v)$, получаем гауссово гипергеометрическое уравнение [11]

$$v(1-v)\psi''(v) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)v]\psi'(v) - \alpha\beta\psi(v) = 0, \quad (23)$$

где

$$\alpha = -\rho, \quad \beta = -3\rho, \quad \gamma = 1 - 2\rho. \quad (24)$$

В работе автора [5] было доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Решения гауссова гипергеометрического уравнения (23) являются рациональными функциями, если $\alpha = -\rho$, $\beta = -3\rho$, $\gamma = 1 - 2\rho$, где ρ – целое число.*

Пусть $\psi_1(v)$ и $\psi_2(v)$ – линейно независимые рациональные решения уравнения (23). Тогда векторные функции

$$Y_k(y, z) = (1+y)^{-\rho}(1+y+yz)^{-\rho}X_k(y, z), \quad k = 1, 2, \quad (25)$$

где

$$X_k(y, z) = \psi_k \left(\frac{(y+1)(z+1)}{z} \right) w_1 + \frac{(y+1)(z+1)}{z\sqrt{3}\rho} \psi'_k \left(\frac{(y+1)(z+1)}{z} \right) w_2,$$

являются решениями системы (14). Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Фундаментальное решение $W_1(y, z, \rho)$ уравнения (11) определяется соотношением*

$$W_1(y, z, \rho) = [Y_1(y, z, \rho), Y_2(y, z, \rho)], \quad (26)$$

где $y = u_2$, $z = u_3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $\rho = -1$, то решения $Y_1(y, z, -1)$ и $Y_2(y, z, -1)$ уравнения (11) имеют вид*

$$\begin{aligned} Y_1(y, z, -1) &= -z(y+1)w_1 + \frac{z(z+1)(y+1)^2}{\sqrt{3}(1+y+yz)}w_2, \\ Y_2(y, z, -1) &= \left[\frac{z^2(1+y+yz)}{(z+1)^2(y+1)} + \frac{z(1+y+yz)}{(z+1)} \right] w_1 - \\ &\quad - \left[\frac{2z^2(1+y+yz)}{\sqrt{3}(z+1)^2(y+1)} + \frac{z(1+y+yz)}{\sqrt{3}(z+1)} \right] w_2. \end{aligned} \quad (27)$$

3. СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ, УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ

Заметим, что система КЗ (11), (12) совместна [5] (см. также [12], гл. 12). В разделе 2 мы рассмотрели только первое уравнение этой системы. Теперь, используя этот результат, построим ее совместное решение. Для этого рассмотрим уравнение (12) в случае $u_2 = 0$, $u_3 = z$. Имеем

$$\frac{\partial W_2}{\partial z} = \rho \left(\frac{P_{4,3}}{z} + \frac{P_{4,2}}{1+z} \right) W_2. \quad (28)$$

Это уравнение можно решить аналогично уравнению (11). Введем матричную функцию

$$G(z) = W_2(z) z^\rho (1+z)^\rho, \quad z = u_3. \quad (29)$$

Из соотношений (28) и (29) следует, что

$$\frac{dG}{dz} = \rho \left(\frac{P_{4,3} + I}{z} + \frac{P_{4,2} + I}{1+z} \right) G. \quad (30)$$

Рассмотрим постоянные векторы $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (P_{4,3} + I)v_1 &= 0, & (P_{4,2} + I)w_1 &= -\sqrt{3}v_2, \\ (P_{4,3} + I)v_2 &= \sqrt{3}v_1 + 2v_2, & (P_{4,2} + I)v_2 &= 2v_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Представим $G(z)$ в виде $G(z) = \phi_1(z)v_1 + \phi_2(z)v_2$ и подставим это выражение в (30). В силу (31) имеем

$$\phi_1'(z) = \frac{\sqrt{3}\rho}{z}\phi_2(z), \quad \phi_2'(z) = \rho \left(\frac{2\phi_2(z)}{z} + \frac{2\phi_2(z)}{1+z} - \frac{\sqrt{3}\phi_1(z)}{1+z} \right), \quad (32)$$

откуда следует, что

$$z(1+z)\phi_1''(z) + [1+z-2\rho(1+2z)]\phi_1'(z) + 3\rho^2\phi_1(z) = 0. \quad (33)$$

Вводя функцию $\psi(z) = \phi_1(-z)$, мы сводим уравнение (33) к гауссовому гипергеометрическому уравнению (23), (24). Пусть $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — линейно независимые решения уравнения (23). Тогда векторные функции

$$U_k(z, \rho) = \left[\psi_k(-z)v_1 - \frac{z}{\sqrt{3}\rho}\psi_k'(-z)v_2 \right] z^{-\rho}(1+z)^{-\rho}, \quad k = 1, 2, \quad (34)$$

являются решениями уравнения (28). Таким образом, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Фундаментальное решение $W_2(z, \rho)$ уравнения (28) определяется соотношением*

$$W_2(z, \rho) = [U_1(z, \rho), U_2(z, \rho)]. \quad (35)$$

Рассмотрим случай $\rho = -1$. В этом случае уравнение (33) принимает вид

$$z(1+z)\phi_1''(z) + (3+5z)\phi_1'(z) + 3\phi_1(z) = 0. \quad (36)$$

Легко проверить прямым вычислением, что функции

$$\phi_{1,1} = \frac{1}{1+z}, \quad \phi_{1,2} = \frac{1-z}{z^2} \quad (37)$$

являются решениями уравнения (36). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\rho = -1$, то решения $U_1(z, -1)$ и $U_2(z, -1)$ уравнения (36) имеют вид

$$U_1(z, -1) = zv_1 + \frac{z^2}{\sqrt{3}(1+z)}v_2, \quad U_2(z, -1) = \frac{1-z^2}{z}v_1 - \frac{(z-2)(z+1)}{\sqrt{3}z}v_2. \quad (38)$$

Мы построили фундаментальные решения $W_1(y, z, \rho)$ и $W_2(y, z, \rho)$ уравнений (11) и (28) соответственно. Используя наши предыдущие результаты (см. [5], раздел 3), получаем основную теорему настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2. (2×2) -матричная функция

$$W(y, z, \rho) = W_1(y, z, \rho)W_1^{-1}(0, z, \rho)W_2(0, z, \rho) \quad (39)$$

является фундаментальным решением системы КЗ (11), (12), где $y = u_2$, $z = u_3$. Если ρ – целое число, то это фундаментальное решение является рациональным.

4. СИСТЕМА С НЕРАЦИОНАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ

Рассмотрим случай $n = 5$, $m = 5$. В этом случае имеется следующее неприводимое матричное представление [9], [10]:

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_{1,4} = \begin{pmatrix} -1/3 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{6}/3 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & 5/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 \\ -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/6 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_{1,5} = \begin{pmatrix} -1/3 & \sqrt{2}/9 & \sqrt{6}/9 & -4/9 & -4\sqrt{3}/9 \\ \sqrt{2}/9 & -19/54 & 23\sqrt{3}/54 & -8\sqrt{2}/27 & 4\sqrt{6}/27 \\ \sqrt{6}/9 & 23\sqrt{3}/54 & 1/2 & 4\sqrt{6}/27 & 0 \\ -4/9 & -8\sqrt{2}/27 & 4\sqrt{6}/27 & 37/54 & -5\sqrt{3}/54 \\ -4\sqrt{3}/9 & 4\sqrt{6}/27 & 0 & -5\sqrt{3}/54 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Используя приведенные представления матриц $P_{1,k}$, получаем, что матрица $Q_1 = P_{1,2} + P_{1,3} + P_{1,4} + P_{1,5}$ имеет вид

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2\sqrt{2}/9 & -2\sqrt{2/3}/3 & -4/9 & -4/3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{2}/9 & 53/54 & -13\sqrt{3}/54 & -8\sqrt{2}/27 & 4\sqrt{2/3}/9 \\ -2\sqrt{2/3}/3 & -13\sqrt{3}/54 & 1/2 & 4\sqrt{2/3}/9 & 0 \\ -4/9 & -8\sqrt{2}/27 & 4\sqrt{2/3}/9 & 37/54 & -5/18\sqrt{3} \\ -4/3\sqrt{3} & 4\sqrt{2/3}/9 & 0 & -5/18\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы T_{-1} определяются соотношениями

$$\lambda_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{433}}{18}, \quad \lambda_3 = \frac{5}{3}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{9}. \quad (40)$$

Мы видим, что все собственные значения матрицы Q_1 не являются целочисленными. Поэтому согласно предложению 1 получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть ρ – целое число. Система КЗ в случае $n = 5$, $m = 5$ не имеет рациональных решений.

Соотношения (40) были получены с помощью компьютерных вычислений. Теперь выполним простые вычисления без использования компьютера. Обозначим через $t_{i,j}$ элементы матрицы T_{-1} . Введем обозначение $v_i = \sum_{j=1}^5 t_{i,j}^2$. Легко видеть, что

$$v_1 = \frac{80}{27}, \quad v_2 = \frac{125}{81}, \quad v_3 = \frac{207}{243}, \quad v_4 = v_5 = 1. \quad (41)$$

Отсюда получаем, что сумма

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 5} t_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^5 v_i = \frac{596}{81} \quad (42)$$

не является целым числом. Однако эта сумма равна сумме квадратов собственных значений матрицы T_{-1} . Таким образом, без помощи компьютера мы получаем следующий результат:

не все собственные значения матрицы T_{-1} целочисленны.

Используя соотношение (40), мы получаем

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2 = \frac{596}{81}. \quad (43)$$

Равенства (42) и (43) и соотношения

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i = 4 = \text{Tr } T_{-1} \quad (44)$$

подтверждают верность наших компьютерных вычислений (см. (40)).

Список литературы

- [1] P. I. Etingof, I. B. Frenkel, A. A. Kirillov Jr., *Lectures on Representation Theory and Knizhnik–Zamolodchikov Equations*, Math. Surv. Monogr., **58**, AMS, Providence, RI, 1998.
- [2] L. A. Sakhnovich, *Rational solutions of Knizhnik–Zamolodchikov system*, [arXiv:math-ph/0609067](#).
- [3] L. A. Sakhnovich, *Rational solutions of KZ equation, case S_4* , [arXiv:math.CA/0702404](#).
- [4] A. N. Varchenko, *Comm. Math. Phys.*, **171**:1 (1995), 99–137.
- [5] L. A. Sakhnovich, *Cent. Eur. J. Math.*, **6**:1 (2008), 179–187.
- [6] A. Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, [arXiv:hep-th/0604128](#).
- [7] G. Felder, A. P. Veselov, *Int. Math. Res. Not.*, **15** (2007), Art. ID rnm046, 21.
- [8] L. A. Sakhnovich, *Oper. Matrices*, **1**:1 (2007), 87–111.
- [9] Jin-Quan Chen, *Group Representation Theory for Physicists*, World Sci., Singapore, 1989.
- [10] Хамермеш М., *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966.
- [11] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1. Гипергеометрическая функция. *Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.
- [12] L. A. Sakhnovich, *Spectral Theory of Canonical Differential Systems. Method of Operator Identities*, Operator Theory: Adv. Appl., **107**, Birkhäuser, Basel, 1999.

Поступила в редакцию 10.10.2009