Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Вырожденные интегрируемые системы на плоскости, обладающие кубическим интегралом движения, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 426–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:01:28

© 2000 г.

А. В. Цыганов*

ВЫРОЖДЕННЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ, ОБЛАДАЮЩИЕ КУБИЧЕСКИМ ИНТЕГРАЛОМ ДВИЖЕНИЯ

Предложена классификация известных двумерных гамильтоновых систем натурального вида, обладающих кубическим по импульсам дополнительным интегралом движения. Замечено, что для вырожденных систем типа Штеккеля дополнительный кубический интеграл имеет вид “обобщенного углового момента”. Это позволяет построить n -мерные вырожденные системы типа Штеккеля с дополнительными кубическими интегралами движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются невырожденные вполне интегрируемые системы на плоскости $\{x, y\}$ с натуральной функцией Гамильтона

$$H = T(p_x, p_y) + V(x, y). \quad (1.1)$$

Напомним, что гамильтонова система является вполне интегрируемой, если помимо гамильтониана H известен второй, функционально не зависящий от H интеграл движения I , определенный на всем фазовом пространстве.

Вырожденной или суперинтегрируемой системой на плоскости называется система, обладающая третьим интегралом движения K таким, что

$$\{H, I\} = \{H, K\} = 0, \quad \{I, K\} = J(p_x, p_y, x, y). \quad (1.2)$$

Далее мы рассмотрим вырожденные системы, у которых дополнительный интеграл $J = J(H, I, K)$ будет функцией от трех исходных интегралов движения.

В работах [1–4] приведен полный список вырожденных систем с двумя степенями свободы, обладающих интегралами движения, квадратичными по импульсам. Одним из основных примеров таких систем является изотропный гармонический осциллятор с интегралами движения

$$H_{\text{osc}} = p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2, \quad I_{\text{osc}} = p_x^2 + x^2 - p_y^2 - y^2.$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Угловой момент

$$K_{\text{osc}} = xp_y - p_x y = \frac{1}{2} \left(p_x \frac{dp_y}{dt} - \frac{dp_x}{dt} p_y \right) \quad (1.3)$$

является третьим интегралом движения, линейным по импульсам [5, 6].

В данной работе рассматриваются вырожденные системы, для которых два интеграла H и I являются квадратичными полиномами по импульсам, как и в случае осциллятора. Так как интегралы H и I квадратичны по импульсам, то по теореме Бернарда–Дарбу [7] данные вырожденные системы принадлежат семейству штеккелевских интегрируемых систем [6, 8].

Для всех рассматриваемых нами вырожденных штеккелевских систем существует третий кубический по импульсам интеграл K , который представим в виде “обобщенного углового момента”

$$K = \frac{\det \mathbf{S}}{s_{21}s_{22}} \left(\mu_1 \frac{d\mu_2}{dt} - \frac{d\mu_1}{dt} \mu_2 \right), \quad \mu_j = \varphi_j(q_j)p_j. \quad (1.4)$$

Здесь p_j, q_j – штеккелевские переменные, s_{ij} – элементы матрицы Штеккеля $\mathbf{S}$, $\varphi(q_j)$ – некоторые функции, которые будут определены позднее.

Заметим, что общий случай натуральной системы (1.1) с двумя степенями свободы, допускающий кубический по импульсам интеграл движения, изучался методом Лапласа [9] в работах [10–14] и методом Якоби в работе [15]. Все полученные таким образом натуральные интегрируемые системы принадлежат одному из трех следующих семейств:

- 1) штеккелевские системы,
- 2) обобщенные штеккелевские системы,
- 3) системы, связанные с цепочками Тоды и системами Калоджеро–Мозера.

Для того чтобы доказать это утверждение, мы просто переберем все системы, перечисленные в работах [6, 10, 14, 15]. Так сложилось, что натуральные системы (1.1) на плоскости с кинетической энергией двух типов

$$T(p_x, p_y) = p_x p_y \quad \text{и} \quad T(p_x, p_y) = p_x^2 + p_y^2$$

рассматривались всегда ранее отдельно ([6, 10] и [14, 15]). Несмотря на то что эти системы связаны простым каноническим преобразованием переменных, мы так же отдельно будем рассматривать системы типа Драша [6, 10] ($T = p_x p_y$) и системы типа осциллятора [14, 15] ($T = p_x^2 + p_y^2$).

2. ВЫРОЖДЕННЫЕ ШТЕККЕЛЕВСКИЕ СИСТЕМЫ

Вполне интегрируемые штеккелевские системы [8] в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ однозначно определяются невырожденной $(n \times n)$ -матрицей Штеккеля $\mathbf{S}$, элементы j -го столбца которой s_{kj} зависят лишь от координаты q_j ,

$$\det \mathbf{S} \neq 0, \quad \frac{\partial s_{kj}}{\partial q_m} = 0, \quad j \neq m.$$

Данной матрице $\mathbf{S}$ сопоставим n квадратичных по импульсам функционально независимых интегралов движения I_k , $k = 1, \dots, n$, в инволюции $\{I_k, I_j\} = 0$ по правилу

$$I_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} (p_j^2 + U_j(q_j)), \quad c_{jk} = \frac{\mathfrak{s}^{kj}}{\det \mathbf{S}}. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{C} = (c_{jk})$ – матрица, обратная к матрице Штеккеля $\mathbf{S}$, а $\mathfrak{s}^{kj}$ – алгебраическое дополнение элемента s_{kj} в определителе $\det \mathbf{S}$.

Совместная поверхность уровня всех интегралов (2.1)

$$M_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : I_k(z) = \alpha_k, k = 1, \dots, n\} \quad (2.2)$$

диффеоморфна n -мерному тору [5], откуда сразу же следует, что

$$p_j^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k s_{kj}(q_j) - U_j(q_j), \quad (2.3)$$

где $\mathcal{S}(q_1, \dots, q_n)$ – функция укороченного действия [5]. Если элементы матрицы Штеккеля $\mathbf{S}$ и потенциалы $U_j(q_j)$ являются рациональными функциями от координат q_j , то равенства (2.3) можно рассматривать как риманову поверхность вида

$$p_j^2 = \frac{\prod_{i=1}^k (q_j - e_i)}{\varphi_j^2(q_j)}. \quad (2.4)$$

Здесь e_i – интегралы движения, а функции $\varphi_j(q_j)$ зависят от координат q_j и некоторых численных констант [16]. Римановы поверхности (2.4) изоморфны каноническим гиперэллиптическим кривым

$$\mathcal{C}_j: \quad \mu_j^2 = \prod_{i=1}^k (\lambda - e_i), \quad \mu_j = \varphi(q_j) p_j. \quad (2.5)$$

Переменные μ_j и функции $\varphi(q_j)$ определяют каноническую форму штеккелевских кривых и входят в определение кубического по импульсам интеграла движения K (1.4).

Старшая степень полинома, входящего в правую часть определения канонической кривой (2.5), задает род $g_j = (k-1)/2$ алгебраической кривой $\mathcal{C}_j$. Все вместе алгебраические кривые $\mathcal{C}_j$ определяют n -мерное лагранжево подмногообразие полного симплектического многообразия

$$\mathcal{C}^{(n)}: \quad \mathcal{C}_1(p_1, q_1) \times \mathcal{C}_2(p_2, q_2) \times \dots \times \mathcal{C}_n(p_n, q_n), \quad (2.6)$$

где импульсы находятся из уравнения (2.4). При этом задача интегрирования уравнений движения сводится к задаче обращения Якоби на лагранжевом многообразии (2.6). Напомним, что в задаче обращения Якоби отображения Абеля используются абелевы дифференциалы первого рода соответствующих алгебраических кривых (2.5). Выбор базиса абелевых дифференциалов первого рода взаимно однозначно связан с видом матрицы $\mathbf{S}$ [16, 17].

Перейдем теперь к рассмотрению вырожденных систем типа систем Штеккеля. Напомним, что изотропный гармонический осциллятор также принадлежит к семейству штеккелевских систем. Так, два набора попарно независимых квадратичных по импульсам интегралов движения $\{I_1 = H_{\text{osc}}, I_2 = I_{\text{osc}}\}$ и $\{\tilde{I}_1 = H_{\text{osc}}, \tilde{I}_2 = K_{\text{osc}}^2\}$ определяются следующими матрицами Штеккеля:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r^{-2} & -1 \end{pmatrix}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных в декартовых и полярных координатах.

Как для осциллятора, так и для всех других известных вырожденных штеккелевских систем с квадратичными интегралами движения число степеней свободы n больше, чем сумма g родов g_j соответствующих алгебраических кривых [16, 17]. В этом случае размерность базиса абелевых дифференциалов первого рода меньше числа дифференциалов, необходимых для однозначного обращения отображения Абеля на лагранжевом подмногообразии $\mathcal{C}^{(n)}$ (2.6).

Таким образом, решая задачу обращения Якоби для вырожденных систем, мы вынуждены пополнить существующий набор из g базисных дифференциалов до набора из n дифференциалов. Существующий произвол в выборе дополнительных дифференциалов приводит к существованию различных матриц Штеккеля для данной гамильтоновой системы [17]. Заметим, что использование абелевых дифференциалов первого типа приводит только к квадратичным по импульсам интегралам движения.

Для всех рассматриваемых в данной работе систем число степеней свободы $n = 2$ будет также больше, чем сумма родов $g = g_1 + g_2 = 0$ соответствующих римановых поверхностей (сфер) (2.5)

$$\mathcal{C}_{1,2}: \quad \mu^2 = \alpha_{1,2}\lambda^2 + \beta_{1,2}\lambda + \gamma_{1,2}, \quad g_{1,2} = 0. \quad (2.7)$$

Здесь α_j , β_j и γ_j – различные инварианты движения. Свойство $n > g$ ограничивает выбор потенциалов U_j для построения вырожденных систем и может быть использовано для их полной классификации.

В переменных $\mu_{1,2}$, входящих в правую часть канонических алгебраических кривых (2.5), дополнительный интеграл движения K имеет вид (1.4). В зависимости от формы матрицы Штеккеля $\mathbf{S}$ и вида потенциалов U_j данный “обобщенный угловой момент” является линейным или кубическим полиномом по импульсам. Алгебро-геометрическая природа данного кубического интеграла нам неизвестна.

Подобно осциллятору, в алгебре интегралов движения для всех рассматриваемых вырожденных систем можно ввести генераторы $\{N, a, a^\dagger\}$ со скобками Пуассона вида

$$\begin{aligned} \{N, a\} &= a, & \{N, a^\dagger\} &= -a^\dagger, \\ \{a, a^\dagger\} &= \Phi(I_1, I_2), & a, a^\dagger &= \Psi(I_1, I_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь генератор $N(I_1, I_2)$ и функции $\Phi(I_1, I_2)$ и $\Psi(I_1, I_2)$ зависят только от квадратичных штеккелевских интегралов. Оставшиеся два генератора a и $a^\dagger$ являются функциями трех исходных интегралов движения I_1, I_2, K ,

$$K = \psi(I_1, I_2)(a - a^\dagger), \quad J(I_1, I_2, K) = \frac{a + a^\dagger}{2}.$$

Подобные алгебры (2.8) часто называют деформированными осцилляторными алгебрами [3, 4]. Однако, в отличие от большинства известных квадратичных деформаций [3, 4] осцилляторной алгебры, в нашем случае алгебры интегралов будут иметь более высокую степень нелинейности.

3. ВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ ДРАША

Общий метод нахождения полиномиальных по импульсам интегралов движения был предложен Лапласом в работе [9], в которой рассматриваются линейные и квадратичные интегралы движения в задаче Кеплера. С другой стороны, с помощью преобразования Якоби любую систему натурального вида (1.1) можно отобразить в движение по геодезическим. После такого отображения вопрос об интегрируемости исходной системы сводится к вопросу об интегрируемости соответствующей метрики Якоби [15]. Идеи Лапласа и Якоби были использованы в работе [10], одной из первых работ, посвященных поиску кубических по импульсам интегралов движения.

Так, в работе [10] использовались следующие выражения для интегралов движения:

$$\begin{aligned} H &= p_x p_y + U(x, y), \\ K &= 6w(x, y) \left(\frac{\partial H}{\partial x} p_y - p_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) - P(p_x, p_y, x, y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь P – кубический по импульсам полином, который выбирается по методу Лапласа. Подстановка интегралов в условие инволютивности $\{H, K\} = 0$ приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на потенциал $U(x, y)$ и функцию $w(x, y)$ [10].

Таким образом были найдены 10 интегрируемых систем с кубическим по импульсам интегралом K (3.1). Используя исходные обозначения работы [10], приведем исправленные выражения для интегралов движения:

$$(a) \quad U = \frac{\alpha}{xy} + \beta x^{r_1} y^{r_2} + \gamma x^{r_2} y^{r_1}, \quad r_j^2 + 3r_j + 3 = 0, \quad (3.2)$$

$$P = (xp_x - p_y y)^3, \quad w = \frac{x^2 y^2}{2};$$

$$(б) \quad U = \frac{\alpha}{\sqrt{xy}} + \frac{\beta}{(y - \mu x)^2} + \frac{\gamma(y + \mu x)}{\sqrt{xy}(y - \mu x)^2}, \quad (3.3)$$

$$P = 3(xp_x - p_y y)^2(p_x + \mu p_y), \quad w = xy(y - \mu x);$$

$$(в) \quad U = \alpha xy + \frac{\beta}{(y - ax)^2} + \frac{\gamma}{(y + ax)^2}, \quad (3.4)$$

$$P = 3(xp_x - p_y y)(p_x^2 - a^2 p_y^2), \quad w = \frac{y^2 - a^2 x^2}{2};$$

$$(г) \quad U = \frac{\alpha}{\sqrt{y(x-a)}} + \frac{\beta}{\sqrt{y(x+a)}} + \frac{\gamma x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad (3.5)$$

$$P = 3p_y[(xp_x - p_y y)^2 - a^2 p_x^2], \quad w = -y(x^2 - a^2);$$

$$(д) \quad U = \frac{\alpha}{\sqrt{xy}} + \frac{\beta}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma}{\sqrt{y}}, \quad (3.6)$$

$$(e) \quad \begin{aligned} P &= 3p_y p_x (xp_x - p_y y), \quad w = -2xy; \\ U &= \alpha xy + \beta y \frac{2x^2 + c}{\sqrt{x^2 + c}} + \frac{\gamma x}{\sqrt{x^2 + c}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$(ж) \quad \begin{aligned} P &= 3p_y^2 (xp_x - yp_y), \quad w = \frac{x^2 + c}{2}; \\ U &= \frac{\alpha}{(y + 3mx)^2} + \beta(y - 3mx) + \gamma(y - mx)(y - 9mx), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$(з) \quad \begin{aligned} P &= (p_x + 3mp_y)^2 (p_x - 3mp_y), \quad w = -m(y + 3mx); \\ U &= \left(y + \frac{mx}{3}\right)^{-2/3} \left[\alpha + \beta \left(y - \frac{mx}{3}\right) + \gamma \left(y^2 - \frac{14mxy}{3} + \frac{m^2 x^2}{9}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(и) \quad \begin{aligned} P &= \left(p_x - \frac{mp_y}{3}\right) \left(p_x^2 + \frac{10mp_x p_y}{3} + \frac{m^2 p_y^2}{9}\right), \quad w = -m \left(y + \frac{mx}{3}\right); \\ U &= \alpha y^{-1/2} + \beta xy^{-1/2} + \gamma x, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$(к) \quad \begin{aligned} P &= 3p_x^2 p_y, \quad w = -y; \\ U &= \alpha \left(y - \frac{\rho x}{3}\right) + \beta x^{-1/2} + \gamma x^{-1/2} (y - \rho x), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$P = 3p_x p_y^2 + \rho p_y^3, \quad w = x.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \rho, a, c$ и m – произвольные параметры. По сравнению с результатами Драша [10], приведенными также в книге [6], мы исправили знак у функции w в случае (ж) (3.8) и степень в потенциале U в случае (и) (3.10). Непосредственные вычисления показывают, что исправленные интегралы движения находятся в инволюции.

Последняя из систем (к) (3.11) при $\rho = 0$ совпадает с предыдущей штеккелевской системой (и) (3.10). В общем случае $\rho \neq 0$ последняя из систем Драша может быть отнесена к семейству обобщенных штеккелевских систем и далее рассматриваться не будет.

Заметим, что для всех остальных систем потенциал $U(x, y)$ нетривиально зависит только от трех постоянных α, β и γ . Все другие параметры могут быть убраны линейными преобразованиями координат и перенормировкой интегралов.

Рассматривая далее штеккелевские функции Гамильтона, найденные Драшем, мы будем объединять в пары системы с одинаковыми типами соответствующих матриц Штеккеля **S**.

3.1. Система (а). Первая из систем (3.2) связана с периодической трехчастичной цепочкой Тоды в системе центра масс [18]. Действительно, после канонического преобразования расширенного фазового пространства

$$d\tilde{t} = (xy)^{-1} dt, \quad \tilde{H} = xy(H + \delta) \quad (3.12)$$

и после дополнительного точечного преобразования остальных координат

$$x = e^{\frac{q_1 + iq_2}{2}}, \quad p_x = (p_1 - ip_2)e^{-\frac{q_1 + iq_2}{2}}, \quad y = e^{\frac{q_1 - iq_2}{2}}, \quad p_y = (p_1 + ip_2)e^{-\frac{q_1 - iq_2}{2}}$$

исходная функция Гамильтона (3.2) совпадает с гамильтонианом

$$\tilde{H} = p_1^2 + p_2^2 + \beta \exp\left\{-\frac{1}{2}q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}q_2\right\} + \gamma \exp\left\{-\frac{1}{2}q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}q_2\right\} + \delta e^{q_1} + \alpha$$

периодической трехчастичной цепочки Тоды в системе центра масс. Таким образом, для первой из систем Драша (3.2) уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных и могут быть проинтегрированы в квадратурах аналогично соответствующим вычислениям для цепочки Тоды [19].

Позднее в работе [13] система Драша (а) (3.2) рассматривалась снова. Точечное преобразование переменных

$$x = re^{i\phi}, \quad p_x = \frac{e^{-i\phi}}{2}(p_r - ip_\phi r^{-1}), \quad y = re^{-i\phi}, \quad p_y = \frac{e^{i\phi}}{2}(p_r + ip_\phi r^{-1})$$

преобразует гамильтониан Драша H (3.1) в гамильтониан

$$H = p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + U(r, \phi).$$

Именно этот гамильтониан изучался в работах [13, 15]. Специальная подстановка для потенциала $U(r, \phi)$ упрощает уравнения Драша [10] и приводит к уравнению Томпсона [13, 15]

$$U(r, \phi) = \frac{f(\phi) + f''(\phi)}{r^3}, \quad f'''f'' - 2f''f' - 3f'f = 0.$$

Очевидно, что данное уравнение также может быть получено из известного функционального уравнения на потенциал цепочки Тоды [14].

3.2. Системы (б) и (д). Положим $\mu = 1$ в потенциале (3.3). Введем матрицу Штеккеля

$$\mathbf{S}_{б,д} = \begin{pmatrix} q_1^2 & q_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

и выберем следующие потенциалы:

в случае (б)

$$U_1 = 2\alpha - \frac{\beta - 2\gamma}{q_1^2}, \quad U_2 = -2\alpha - \frac{\beta + 2\gamma}{q_2^2};$$

в случае (д)

$$U_1 = 2\alpha + 2(\beta + \gamma)q_1, \quad U_2 = -2\alpha - 2(\beta - \gamma)q_2.$$

Соответствующие функции Гамильтона I_1 (2.1) совпадают с гамильтонианами H систем Драша (б) (3.3) и (д) (3.6) после точечного преобразования координат

$$x = \frac{(q_1 - q_2)^2}{4}, \quad p_x = \frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2}, \quad y = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4}, \quad p_y = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}.$$

Второй штеккелевский интеграл I_2 (2.1) является квадратичным по импульсам интегралом движения. В каноническую форму штеккелевских гиперэллиптических кривых входят переменные:

в случае (б)

$$\mu_1 = q_1 p_1, \quad \mu_2 = q_2 p_2;$$

в случае (д)

$$\mu_1 = p_1, \quad \mu_2 = p_2.$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4), получаем кубический по импульсам интеграл Драша K (3.1) с точностью до числового множителя.

Далее выпишем явно деформированные осцилляторные алгебры интегралов движения (2.8):

в случае (б)

$$\begin{aligned} N &= \frac{I_2}{4\sqrt{H}}, \quad a = J + 4\sqrt{H}K, \quad a^\dagger = J - 4\sqrt{H}K, \\ aa^\dagger &= 16[4H(\beta + 2\gamma) - (2\alpha + I_2)^2][4H(\beta - 2\gamma) - (2\alpha - I_2)^2], \\ \{a, a^\dagger\} &= -256\sqrt{H}[I_2(I_2 - 2\alpha)(I_2 + 2\alpha) - 4H(\beta I_2 - 4\alpha\gamma)]; \end{aligned}$$

в случае (д)

$$\begin{aligned} N &= \frac{I_2}{2\sqrt{H}}, \quad a = J + 2\sqrt{H}K, \quad a^\dagger = J - 2\sqrt{H}K, \\ aa^\dagger &= 16[H(2\alpha + I_2) - (\beta - \gamma)^2][H(2\alpha - I_2) + (\beta + \gamma)^2], \\ \{a, a^\dagger\} &= -64H^{3/2}(I_2H - \beta^2 - \gamma^2). \end{aligned}$$

3.3. Системы (в) и (ж). Положим $a = 1$ в потенциале (3.4) и $m = 1/3$ в потенциале (3.8). Введем матрицу Штеккеля

$$\mathbf{S}_{\text{вж}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

и выберем следующие потенциалы:

$$\begin{aligned} \text{в случае (в)} \quad U_1 &= \frac{\alpha q_1^2}{4} + \frac{\gamma}{q_1^2}, \quad U_2 = \frac{\alpha q_2}{4} - \frac{\beta}{q_2^2}; \\ \text{в случае (ж)} \quad U_1 &= -\frac{\gamma q_1^2}{3} + \frac{\alpha}{q_1^2}, \quad U_2 = -\frac{4\gamma q_2^2}{3} - \beta q_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Соответствующие функции Гамильтона I_1 (2.1) совпадают с гамильтонианами H систем Драша (в) (3.4) и (ж) (3.8) после канонического преобразования переменных

$$x = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad p_x = p_1 - p_2, \quad y = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad p_y = p_1 + p_2.$$

Второй штеккелевский интеграл I_2 (2.1) является квадратичным по импульсам интегралом движения. В каноническую форму штеккелевских гиперэллиптических кривых входят переменные:

в случае (в)

$$\mu_1 = q_1 p_1, \quad \mu_2 = q_2 p_2;$$

в случае (ж)

$$\mu_1 = q_1 p_1, \quad \mu_2 = p_2.$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4), получаем кубический по импульсам интеграл Драша K (3.1).

Нелинейные алгебры интегралов движения (2.8) в данных случаях определяются следующим образом:

в случае (в)

$$\begin{aligned} N &= \frac{I_2}{2\sqrt{-\alpha}}, \quad a = J + 2\sqrt{-\alpha}K, \quad a^\dagger = J - 2\sqrt{-\alpha}K, \\ aa^\dagger &= (H^2 + 4HI_2 + 4I_2^2 - 4\alpha\gamma)(H^2 - 4HI_2 + 4I_2^2 + 4\alpha\beta), \\ \{a, a^\dagger\} &= -32\sqrt{a}[I_2(H - 2I_2)(H + 2I_2) - \alpha\beta(H + 2I_2) - \alpha\gamma(H - 2I_2)]; \end{aligned}$$

в случае (ж)

$$\begin{aligned} N &= \frac{I_2}{4} \sqrt{\frac{3}{\gamma}}, \quad a = J + 4\sqrt{\frac{\gamma}{3}}K, \quad a^\dagger = J - 4\sqrt{\frac{\gamma}{3}}K, \\ aa^\dagger &= \frac{1}{9}(8\gamma H - 16\gamma I_2 + 3\beta^2)(3H^2 + 12HI_2 + 12I_2^2 + 16\alpha\gamma), \\ \{a, a^\dagger\} &= 64\left(\frac{\gamma}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{(2I_2 + H)(4\gamma H - 24\gamma I_2 + 3\beta^2)}{4\gamma} - \frac{16\alpha\gamma}{3} \right). \end{aligned}$$

3.4. Системы (г) и (е). Положим $a = 1$ в потенциале (3.5) и $c = 1$ в потенциале (3.7). Введем матрицы Штекеля вида

$$\mathbf{S}_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{q_1^2} & \frac{1}{q_2^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & \frac{1}{q_2} \\ \frac{1}{q_1^2} & \frac{1}{q_2^2} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

и выберем следующие потенциалы:

в случае (г)

$$U_1 = 2\gamma + \frac{2\sqrt{2}(\alpha + \beta)}{q_1}, \quad U_2 = -2\gamma - \frac{2\sqrt{2}(\alpha - \beta)}{q_2};$$

в случае (е)

$$U_1 = \frac{\gamma}{2q_1} + \frac{\alpha + 2\beta}{4}, \quad U_2 = \frac{\gamma}{2q_2} + \frac{\alpha - 2\beta}{4}.$$

Соответствующие функции Гамильтона I_1 (2.1) совпадают с точностью до численного множителя с гамильтонианами H систем Драша (г) (3.5) и (е) (3.7) после точечных преобразований переменных вида:

в случае (г)

$$x = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2q_1q_2}, \quad p_x = \frac{(p_1q_1 - p_2q_2)q_1q_2}{q_1^2 - q_2^2}, \quad y = q_1q_2, \quad p_y = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{2q_1q_2};$$

в случае (е)

$$x = \frac{q_1 - q_2}{2\sqrt{q_1q_2}}, \quad p_x = \frac{2(p_1q_1 - p_2q_2)\sqrt{q_1q_2}}{q_1 + q_2}, \quad y = \sqrt{q_1q_2}, \quad p_y = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{\sqrt{q_1q_2}}.$$

Второй штеккелевский интеграл I_2 (2.1) является квадратичным по импульсам интегралом движения. В каноническую форму штеккелевской гиперэллиптической кривой входят переменные

$$\mu_1 = q_1 p_1, \quad \mu_2 = q_2 p_2.$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4), получаем кубический по импульсам интеграл Драша K (3.1) с точностью до числового множителя.

Генераторы деформированных осцилляторных алгебр интегралов движения (2.8) одинаковы для обеих систем:

$$N = \sqrt{I_2}, \quad a = J + 2\sqrt{I_2}K, \quad a^\dagger = J - 2\sqrt{I_2}K,$$

а функции $\Phi(I_1, I_2)$ и $\Psi(I_1, I_2)$ имеют вид:
в случае (г)

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= 16[I_2(2\gamma - H) + 2(\alpha + \beta)^2][I_2(2\gamma - H) - 2(\alpha - \beta)^2], \\ \{a, a^\dagger\} &= 64\sqrt{I_2}[I_2(2\gamma - H)(2\gamma + H) + 2(\alpha^2 + \beta^2)H + 8\alpha\beta\gamma]; \end{aligned}$$

в случае (е)

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= \frac{1}{16}[4I_2(\alpha + 2\beta) + (\gamma - 2H)^2][4I_2(\alpha - 2\beta) + (\gamma + 2H)^2], \\ \{a, a^\dagger\} &= -4\sqrt{I_2}\left((2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha)I_2 + \alpha H^2 + 2\beta\gamma H + \frac{\alpha\gamma^2}{4}\right). \end{aligned}$$

3.5. Системы (з) и (и). Положим $m = 3$ в потенциале (3.9). Введем матрицы Штеккеля вида

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_и = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

и выберем следующие потенциалы:

в случае (з)

$$U_1 = \frac{\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{16}}{4\gamma} - \frac{2\gamma q_1^3}{9}, \quad U_2 = \frac{\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{16}}{4\gamma} - \frac{2\gamma q_2^3}{9};$$

в случае (и)

$$U_1 = \alpha + \beta q_1 + \frac{\gamma q_1^2}{2}, \quad U_2 = -\alpha + \beta q_2 + \frac{\gamma q_2^2}{2}.$$

Соответствующие функции Гамильтона I_1 (2.1) совпадают с точностью до численного множителя с гамильтонианами H систем Драша (3.9) и (3.10) после канонического преобразования координат:

в случае (з)

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_2 - p_1}{4\sqrt{\gamma}} + \frac{(3q_1 + 3q_2)^{3/2}}{54} + \frac{\beta}{16\gamma}, & p_x &= 3\frac{p_1 + p_2}{\sqrt{3q_1 + 3q_2}} + \sqrt{\gamma}(q_1 - q_2), \\ y &= -\frac{p_2 - p_1}{4\sqrt{\gamma}} + \frac{(3q_1 + 3q_2)^{3/2}}{54} - \frac{\beta}{16\gamma}, & p_y &= 3\frac{p_1 + p_2}{\sqrt{3q_1 + 3q_2}} - \sqrt{\gamma}(q_1 - q_2); \end{aligned}$$

в случае (и)

$$x = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad p_x = p_1 - p_2, \quad y = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4}, \quad p_y = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}.$$

В отличие от остальных систем Драша, в случае (з) (3.9) используется неточечное каноническое преобразование переменных.

Для системы (и) (3.10) второй интеграл I_2 (2.1) по-прежнему является квадратичным по импульсам $\{p_x, p_y\}$ интегралом движения. В каноническую форму штеккелевской гиперэллиптической кривой входят переменные

$$\mu_1 = p_1 \quad \text{и} \quad \mu_2 = p_2.$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4), получаем кубический по импульсам $\{p_x, p_y\}$ интеграл Драша K (3.1). Деформированная осцилляторная алгебра интегралов движения (2.8) выглядит в случае (и) следующим образом:

$$\begin{aligned} N &= \frac{I_2}{\sqrt{-2\gamma}}, \quad a = J + \sqrt{-2\gamma}K, \quad a^\dagger = J - \sqrt{-2\gamma}K, \\ aa^\dagger &= [2\gamma(I_2 + \alpha) + (H + \beta)^2][2\gamma(I_2 - \alpha) + (H - \beta)^2], \\ \{a, a^\dagger\} &= -4\gamma\sqrt{-2c}(H^2 + 2\gamma I_2 + \beta^2). \end{aligned}$$

Для системы (з) (3.9) второй квадратичный в переменных разделения $\{p_1, p_2\}$ штеккелевский интеграл I_2 (2.1) совпадает с интегралом Драша K (3.1), кубическим по физическим импульсам $\{p_x, p_y\}$ [20]. Это связано с использованием в данном случае неточечных канонических преобразований. Соответствующие алгебраические кривые являются торами, $g_j = 1$. Таким образом, число степеней свободы равно сумме родов алгебраических кривых, т.е. $n = 2$, и соответствующая система невырождена. Заметим, что данная система позднее изучалась также Холтом [12] и упоминается в литературе как система Холта [6, 14, 15].

4. ВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРНОГО ТИПА

Рассмотрим теперь вырожденные штеккелевские системы, обладающие кубическим по импульсам интегралом движения и функций Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y).$$

Полная классификация известных интегрируемых систем на плоскости, допускающих кубический интеграл движения, приведена в работах [11–15]. При поиске таких интегрируемых систем использовались различные подстановки для кубического интеграла K . Однако почти все эти интегралы могут быть переписаны в форме интеграла Драша (3.1). Далее мы будем использовать именно это представление для кубического интеграла K .

В этой работе мы больше не будем рассматривать интегрируемые системы, связанные с цепочкой Тоды и системами Калоджеро–Мозера. Заметим только, что среди них также встречаются вырожденные системы [6].

Все остальные известные вырожденные системы на плоскости являются штеккелевскими и допускают разделение переменных в одной из четырех ортогональных криволинейных систем координат: декартовых, параболических, полярных или эллиптических [7].

Системы, допускающие разделение переменных в декартовых координатах, следующие:

$$(A) \quad V = \alpha(4x^2 + y^2) + \beta x + \frac{\gamma}{y^2}, \quad (4.1)$$

$$P = p_x p_y^2, \quad w = \frac{y}{6}; \quad (4.2)$$

$$(B) \quad V = \alpha(x^2 + y^2) + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{y^2}, \quad (4.3)$$

$$P = (xp_y - yp_x)p_x p_y, \quad w = \frac{xy}{6};$$

$$(B) \quad V = \alpha(x^2 + y^2) + \beta \frac{xy}{(x^2 - y^2)^2}, \quad (4.4)$$

$$P = (xp_y - yp_x)(p_x^2 - p_y^2), \quad w = \frac{x^2 - y^2}{6};$$

$$(Г) \quad V = \alpha(9x^2 + y^2), \quad (4.5)$$

$$P = (xp_y - yp_x)p_y^2, \quad w = -\frac{y^2}{18}.$$

Системы, допускающие разделение переменных в параболических координатах, имеют вид:

$$(Д) \quad V = \left(\alpha + \frac{\beta}{r+x} + \frac{\gamma}{r-x} \right) r^{-1}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.6)$$

$$P = (xp_y - yp_x)^2 p_x, \quad w = \frac{yr^2}{12};$$

$$(E) \quad V = \left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} \right) r^{-1}, \quad (4.7)$$

$$P = (xp_y - yp_x)^2 p_x, \quad w = \frac{yr^2}{12};$$

$$(Ж) \quad V = (\alpha + \beta\sqrt{r+x} + \gamma\sqrt{r-x})r^{-1}, \quad (4.8)$$

$$P = (xp_y - yp_x) \left(2p_x^2 + 2p_y^2 - \frac{\beta}{\sqrt{r+x}} - \frac{\gamma}{\sqrt{r-x}} \right), \quad w = -\frac{r^2}{6}.$$

Система, допускающая разделение переменных в полярных координатах, следующая:

$$(3) \quad V = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\rho}{(\delta x + \gamma y)^2} + \frac{\gamma x - \delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}(\delta x + \gamma y)^2}, \quad (4.9)$$

$$P = (p_x y - p_y x)(\gamma p_x - \delta p_y), \quad w = \frac{(x^2 + y^2)(\delta x + \gamma y)}{12}.$$

Данная система не вошла в списки работ [14, 15] и, по-видимому, является новой.

Вырожденные системы, для которых кубический по импульсам интеграл K нам не удалось переписать в виде “обобщенного углового момента” (1.4), имеют вид:

$$(И) \quad V = \alpha\sqrt{x} \pm \beta\sqrt{y}, \quad P = \frac{\beta}{\alpha}p_x^3 \mp \frac{\alpha}{\beta}p_y^3, \quad w = \sqrt{xy}; \quad (4.10)$$

$$(К) \quad V = \alpha(\sqrt{x} + \beta y), \quad P = p_x^3, \quad w = -\frac{\sqrt{x}}{2\beta}; \quad (4.11)$$

$$(Л) \quad V = f'(\phi)r^{-2}, \quad K = p_\phi^2(\cos\phi p_r - \sin\phi r^{-1}p_\phi) + \\ + [2f'(\phi)\cos\phi - f(\phi)\sin\phi]p_r + [3f'(\phi)\sin\phi + f(\phi)\cos\phi]r^{-1}p_\phi. \quad (4.12)$$

В последнем случае (Л) (4.12) использованы полярные координаты $\{r, p_r, \phi, p_\phi\}$, а функция $f(\phi)$ должна удовлетворять уравнению

$$f''(3f'\sin\phi + f\cos\phi) + 2f'(2f'\cos\phi - f\sin\phi) = 0.$$

Для данных трех исключительных систем (4.10)–(4.12) соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных в декартовых или полярных координатах. Однако штеккелевские потенциалы $U_j(q_j)$ не являются полиномами, и требуются особые преобразования для перехода к канонической форме штеккелевской кривой.

Нам не известно ни одного примера вырожденных систем с кубическим по импульсам интегралом движения, для которых переменные разделяются после перехода к эллиптическим координатам.

Далее, как и для систем типа Драша, мы опишем явно все эти штеккелевские системы, опустив за недостатком места детальное описание соответствующих деформированных осцилляторных алгебр (2.8) интегралов движения.

4.1. Декартовы координаты: системы (А)–(Г). Введем матрицы Штеккеля

$$S_{A-G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

и выберем следующие потенциалы:

$$\begin{array}{ll} \text{для случая (А)} & U_1 = 8\alpha q_1^2 + 2\beta q_1, \quad U_2 = 2\alpha q_2^2 + \frac{2\gamma}{q_2^2}; \\ \text{для случая (Б)} & U_1 = 2\alpha q_1^2 + \frac{2\beta}{q_1^2}, \quad U_2 = 2\alpha q_2^2 + \frac{2\gamma}{q_2^2}; \\ \text{для случая (В)} & U_1 = \frac{\alpha q_1^2}{2} - \frac{\beta}{4q_1^2}, \quad U_2 = \frac{\alpha q_2^2}{2} + \frac{\beta}{4q_2^2}; \\ \text{для случая (Г)} & U_1 = 18\alpha q_1^2, \quad U_2 = 2\alpha q_2^2. \end{array} \quad (4.14)$$

Соответствующие функции Гамильтона I_1 (2.1) совпадают с гамильтонианами H систем (4.1), (4.3), (4.5) и (4.4) после замены переменных для случаев (А), (Б), (Г):

$$x = q_1, \quad y = q_2,$$

или для случая (В):

$$x = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad p_x = p_1 - p_2, \quad y = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad p_y = p_1 + p_2.$$

Второй штеккелевский интеграл I_2 (2.1) является квадратичным по импульсам интегралом движения. В каноническую форму штеккелевских гиперэллиптических кривых входят переменные:

для случая (А)

$$\mu_1 = p_1, \quad \mu_2 = q_2 p_2,$$

для случаев (Б), (В)

$$\mu_1 = q_1 p_1, \quad \mu_2 = p_2.$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4), получаем кубический по импульсам интеграл K (3.1).

Для системы (Г) переменные

$$\mu_1 = p_2 q_1 - \frac{p_1 q_2}{3}, \quad \mu_2 = p_2 q_2,$$

определяющие кубический интеграл K , не имеют такой явной связи с каноническими алгебраическими кривыми.

Генераторы деформированной осцилляторной алгебры интегралов движения (2.8) имеют вид для случаев (А), (Б):

$$N = \frac{I_2}{4\sqrt{-2\alpha}}, \quad a = J + 4\sqrt{-2\alpha}K, \quad a^\dagger = J - 4\sqrt{-2\alpha}K.$$

В случае (Г) (4.5) известен квантовый аналог данной алгебры, который использовался в работе [3] для изучения спектра и волновых функций квантовых операторов H , I_2 и K .

4.2. Параболические координаты: системы (Д)–(Ж). Введем матрицы Штекеля

$$\mathbf{S}_{\text{ДЕ}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1^{-1} & q_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\text{Ж}} = \begin{pmatrix} q_1^2 & q_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

и выберем следующие потенциалы:

$$\begin{aligned} \text{для случая (Д)} \quad U_1 &= -\frac{\alpha}{2q_1} - \frac{\beta}{2q_1^2}, & U_2 &= \frac{\alpha}{2q_2} - \frac{\gamma}{2q_2^2}; \\ \text{для случая (Е)} \quad U_1 &= \frac{\alpha}{2q_1} - \frac{\beta}{4q_1^2}, & U_2 &= -\frac{\alpha}{2q_2} + \frac{\beta}{4q_2^2}; \\ \text{для случая (Ж)} \quad U_1 &= -4\alpha - 8\sqrt{2}\beta q_1, & U_2 &= 4\alpha + 8\sqrt{2}\gamma q_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Соответствующие функции Гамильтона I_1 (2.1) совпадают с гамильтонианами H систем (4.1), (4.3) и (4.4) после точечного преобразования координат:

для случаев (Д), (Е)

$$x = q_1 + q_2, \quad p_x = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 - q_2}, \quad y = 2\sqrt{-q_1 q_2}, \quad p_y = \frac{(p_1 - p_2)\sqrt{-q_1 q_2}}{q_1 - q_2};$$

для случая (Ж)

$$x = q_1^2 + q_2^2, \quad p_x = \frac{1}{2} \frac{p_1 q_1 - p_2 q_2}{q_1^2 - q_2^2}, \quad y = 2i q_1 q_2, \quad p_y = \frac{i}{2} \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1^2 - q_2^2}.$$

Второй штеккелевский интеграл I_2 (2.1) является квадратичным по импульсам интегралом движения. В каноническую форму штеккелевских гиперэллиптических кривых входят переменные:

для случаев (Д), (Е)

$$\mu_1 = q_1 p_1, \quad \mu_2 = q_2 p_2;$$

для случая (Ж)

$$\mu_1 = p_1, \quad \mu_2 = p_2,$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4), получаем кубический по импульсам интеграл K (3.1).

Генераторы деформированной осцилляторной алгебры (2.8) одинаковы для всех трех систем (Д), (Е) и (Ж):

$$N = \frac{I_2}{2\sqrt{H}}, \quad a = J + 2\sqrt{H}K, \quad a^\dagger = J - 2\sqrt{H}K.$$

4.3. Полярные координаты: случай (3). Введем матрицу Штеккеля

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1^{-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

и выберем следующие потенциалы:

$$U_1 = \alpha + \frac{\beta}{q_1}, \quad U_2 = \frac{\gamma \cos q_2 - \delta \sin q_2 + \rho}{(\delta \cos q_2 + \gamma \sin q_2)^2}. \quad (4.18)$$

Соответствующая функция Гамильтона I_1 (2.1) совпадает с гамильтонианом H системы (4.9) после перехода от обычных полярных координат $q_1 = r$ и $q_2 = \phi$ к декартовым координатам x, y . Второй штеккелевский интеграл I_2 (2.1) является квадратичным по импульсам интегралом движения. В каноническую форму штеккелевских гиперэллиптических кривых входят переменные:

$$\mu_1 = p_1, \quad \mu_2 = p_2(\delta \cos q_2 + \gamma \sin q_2).$$

Подставляя данные переменные в определение (1.4) получаем кубический по импульсам интеграл K (3.1).

Алгебру интегралов движения (2.8) выпишем только в частном случае, когда $\delta = 1$ и $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} N &= -\sqrt{-I_2}, \quad a = J + 2\sqrt{-I_2}K, \quad a^\dagger = J - 2\sqrt{-I_2}K, \\ aa^\dagger &= (4HI_2 - 4\alpha I_2 + \beta^2)(4I_2^2 - 4\rho I_2 + 1), \\ \{a, a^\dagger\} &= -8\sqrt{-I_2}[(2I_2 - \rho)\beta^2 + (12I_2^2 - 8\rho I_2 + 1)(H - \alpha)]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для системы (3) (4.9) и для системы (Л) (4.12) полиномиальные части P кубических по импульсам интегралов K похожи. Однако в случае (Л) нам не удалось переписать кубический интеграл в форме “обобщенного углового момента” (1.4).

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА

Ключевым моментом в современном подходе к интегрируемым гамильтоновым системам является представление их уравнений движения в форме Лакса [6]

$$\dot{L}(\lambda) = [L, A],$$

где L, A – матрицы, зависящие от спектрального параметра λ .

В данной работе мы построим (4×4) -матрицы Лакса для некоторых из систем Драша, используя канонические преобразования расширенного фазового пространства, которые порождают сдвиги соответствующих матриц Лакса [17, 18]. Напомним, что если две матрицы Штеккеля $\mathbf{S}$ и $\tilde{\mathbf{S}}$ отличаются только первой строкой, то соответствующие штеккелевские системы связаны следующим преобразованием переменной времени $q_{n+1} = t$ и сопряженного момента $p_{n+1} = -H$:

$$d\tilde{t} = \frac{\det \tilde{\mathbf{S}}}{\det \mathbf{S}} dt, \quad \tilde{H} = \frac{\det \mathbf{S}}{\det \tilde{\mathbf{S}}} H. \quad (5.1)$$

Данное преобразование является каноническим в расширенном фазовом пространстве [17].

Так, системы Драша с матрицей Штеккеля $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{вж}}$ (3.14) связаны с системами Драша с матрицами $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_{\text{бд}}$ (3.13) и $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_{\text{и}}$ (3.17). Далее мы будем использовать эту связь для построения матриц Лакса.

Для штеккелевских систем, допускающих разделение переменных в декартовых координатах, т.е. систем, отвечающих постоянной матрице Штеккеля вида $\mathbf{S}_{\text{вж}}$, можно построить блочные (4×4) -матрицы Лакса, следуя работам [16, 21],

$$\mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1(\lambda, p_1, q_1) & 0 \\ 0 & L_2(\lambda, p_2, q_2) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Для n -мерных штеккелевских систем аналогичным образом рассматривается прямая сумма независимых (2×2) -матриц $L_j(\lambda, p_j, q_j)$. Далее мы будем использовать только два типа (2×2) -блоков вида

$$L_j(\lambda) = \begin{pmatrix} p_j & \lambda - q_j \\ -\left[\frac{\phi_j}{\lambda - q_j}\right]_{MN} & -p_j \end{pmatrix}, \quad L_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{p_j q_j}{\lambda} & 1 - \frac{q_j^2}{\lambda} \\ \frac{p_j^2}{\lambda} - \left[\frac{\phi_j}{1 - (q_j^2/\lambda)}\right]_{MN} & -\frac{p_j q_j}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Здесь определяющая потенциал U_j функция $\phi_j(\lambda)$ зависит только от спектрального параметра λ и $[\xi]_{MN}$ – линейная комбинация различных лорановских проекций [16].

Как для других интегрируемых систем [17, 18], так и для систем Драша преобразования вида (5.1) индуцируют зависящий только от функции Гамильтона сдвиг матриц Лакса $\mathcal{L}(\lambda)$ (5.2):

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \mathcal{L}(\lambda) - \tilde{H} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b = \pm 1, \pm i. \quad (5.3)$$

Здесь значения параметров a, b зависят от выбора типа (2×2) -матриц $L_j(\lambda)$.

Рассмотрим ряд примеров, следуя намеченной нами схеме построения матриц Лакса. Так, для системы Драша (в) (3.4) матрица Лакса имеет вид

$$\mathcal{L}_в(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1 & \lambda - q_1 & 0 & 0 \\ (\lambda + q_1) \left(-\frac{\alpha}{4} + \gamma q_1^2 \lambda^2\right) & -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ip_2 & i(\lambda - q_2) \\ 0 & 0 & i(\lambda + q_2) \left(-\frac{\alpha}{4} - \beta q_2^2 \lambda^2\right) & -ip_2 \end{pmatrix}.$$

Спектральная кривая данной матрицы

$$\Gamma(\lambda, \mu) : \det(\mathcal{L}_в(\lambda) - \mu I) = 0$$

разлагается в произведение

$$\left(\mu^2 - \frac{I_1}{2} - I_2 + \frac{\alpha \lambda^2}{4} + \frac{\gamma}{\lambda^2}\right) \left(\mu^2 - \frac{I_1}{2} + I_2 - \frac{\alpha \lambda^2}{4} + \frac{\beta}{\lambda^2}\right) = 0$$

штеккелевских кривых в канонической форме (2.7).

Для системы Драша (и) (3.10) матрица Лакса есть

$$\tilde{\mathcal{L}}_и = \begin{pmatrix} p_1 & \lambda - q_1 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma(\lambda + q_1)}{2} - \beta & -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ip_2 & i(\lambda + q_2) \\ 0 & 0 & \frac{i\gamma(\lambda - q_2)}{2} + i\beta & -ip_2 \end{pmatrix} + \tilde{H} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{H} = I_1$ — соответствующая функция Гамильтона с потенциалом (3.10). Как и в предыдущем примере, спектральная кривая факторизуется в произведение

$$\left(\mu^2 - \frac{\gamma \lambda^2}{2} + (\beta + I_1)\lambda + \alpha + I_2\right) \left(\mu^2 + \frac{\gamma \lambda^2}{2} + (\beta - I_1)\lambda + \alpha - I_2\right) = 0$$

канонических штеккелевских кривых (2.7).

Для системы Драша (б) (3.3) матрица Лакса имеет вид

$$\tilde{\mathcal{L}}_б = \begin{pmatrix} \frac{p_1 q_1}{\lambda} & 1 - \frac{q_1^2}{\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{p_1^2 - (\beta - 2\gamma) q_1^{-2}}{\lambda} & -\frac{p_1 q_1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_2 q_2}{\lambda} & 1 + \frac{q_2^2}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{-p_2^2 + (\beta + 2\gamma) q_2^{-2}}{\lambda} & -\frac{p_2 q_2}{\lambda} \end{pmatrix} + \tilde{H} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{H} = I_1$ — соответствующая функция Гамильтона (3.3). Спектральная кривая данной матрицы

$$\Gamma(y, \mu) : \det(\tilde{\mathcal{L}}_б(\lambda) - yI) = 0$$

разлагается в произведение

$$\left(y^2 - I_1 + \frac{2\alpha + I_2}{\lambda} - \frac{\beta + 2\gamma}{\lambda^2}\right) \left(y^2 - I_1 + \frac{2\alpha - I_2}{\lambda} - \frac{\beta - 2\gamma}{\lambda^2}\right) = 0$$

исходных штеккелевских кривых (2.4), которые могут быть переписаны в канонической форме (2.7).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемой работе рассматриваются интегрируемые системы на плоскости, допускающие кубический по импульсам интеграл движения. Большинство из известных систем такого типа [10, 14, 15] являются вырожденными штеккелевскими системами, для которых кубический интеграл движения имеет вид “обобщенного углового момента” (1.4).

Остальные известные натуральные интегрируемые системы, перечисленные в работах [6, 10, 14, 15] и обладающие кубическим интегралом движения, можно либо связать с цепочками Тоды или с системами Калоджеро–Мозера, либо с системами типа системы Штеккеля. Так, например, функция Гамильтона для системы Фокаса–Лагерстрема [11, 14, 15] представима в виде отношения штеккелевских интегралов [18]. Таким образом, эту систему вместе с системой Драша (к) (3.11) можно отнести к семейству обобщенных штеккелевских систем. Данные системы будут рассмотрены отдельно.

Изучение вырожденных штеккелевских систем на плоскости позволяет в дальнейшем построить вырожденные n -мерные интегрируемые системы. Например, рассмотрим в трехмерном пространстве обобщение кулоновской задачи с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\gamma + \delta}{r} + \frac{1}{x^2 + y^2} \left(\frac{\alpha(r - z)}{r} + \frac{\beta(r + z)}{r} + U\left(\frac{y}{x}\right) \right), \quad (6.1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $U(y/x)$ – произвольная функция.

Соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных после перехода к параболическим координатам

$$q_1 = r + z, \quad q_2 = r - z, \quad q_3 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

После замены переменных функция Гамильтона (6.1) совпадает со штеккелевским интегралом I_1 (2.1) после подходящего выбора матрицы Штеккеля

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ q_1^{-1} & q_2^{-1} & 0 \\ q_1^{-2} & q_2^{-2} & -4 \end{pmatrix}$$

и потенциалов

$$U_1 = \frac{\alpha}{q_1^2} + \frac{\gamma}{q_1}, \quad U_2 = \frac{\beta}{q_2^2} + \frac{\delta}{q_2}, \quad U_3 = U(q_3).$$

Таким образом, данная система обладает тремя независимыми штеккелевскими интегралами движения I_1 , I_2 и I_3 , квадратичными по импульсам.

Простые вычисления показывают, что в каноническую форму штеккелевских кривых входят переменные

$$\mu_1 = p_1 q_1, \quad \mu_2 = p_2 q_2, \quad \mu_3 = p_3.$$

Подставляя данные переменные в определение “обобщенного углового момента” (1.4), получаем кубический интеграл движения, который в исходных физических переменных имеет вид

$$K = (x^2 + y^2)p_z^3 - 2zp_z^2(p_x x + p_y y) - p_z(p_x x + p_y y)^2 + \\ + r^2 \left(\frac{\partial H}{\partial z}(p_x x + p_y y) + p_z \left(p_x^2 + p_y^2 - x \frac{\partial H}{\partial x} - y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right).$$

Заметим, что данный интеграл достаточно просто записать в алгебро-геометрических переменных (1.4), в то время как в физических переменных этот интеграл имеет более сложную структуру.

Список литературы

- [1] *П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Углирж, И. Фриш.* ЯФ. 1966. Т. 4. С. 625.
- [2] *N. W. Evans.* Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 5666.
- [3] *D. Bonatos, C. Daskaloyannis, K. Kokkotas.* Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 3700.
- [4] *P. Letourneau, L. Vinet.* Ann. Phys. 1995. V. 243. P. 144.
- [5] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
- [6] *А. М. Переломов.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [7] *Э. Т. Уиттекер.* Аналитическая динамика. М.-Л.: ОНТИ, Гл. ред. техн.-теор. лит-ры, 1937.
- [8] *P. Stäckel.* Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1893. V. 116. P. 485; P. 1284.
- [9] *P.-S. Laplace.* Traité de mécanique céleste. V. 1. Paris, 1799. P. 395.
- [10] *J. Drach.* Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1935. V. 200. P. 22.
- [11] *A. S. Fokas, P. Lagerstrom.* J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 74. P. 325.
- [12] *C. R. Holt.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 37.
- [13] *G. Thompson.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 3474.
- [14] *J. Hietarinta.* Phys. Rep. 1987. V. 147. P. 87.
- [15] *M. Karlovini, K. Rosquist.* A unified treatment of cubic invariants at fixed and arbitrary energy. solv-int/9811005.
- [16] *А. В. Цыганов.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 3.
- [17] *А. В. Цыганов.* ТМФ. 1999. Т. 120. С. 27.
- [18] *A. V. Tsiganov.* Canonical transformations of the extended phase space, Toda lattices and Stäckel family of integrable systems. solv-int/9909006.
- [19] *A. V. Tsiganov.* Canonical transformations of the time for the Toda lattice and the Holt system. solv-int/99011001.
- [20] *A. V. Tsiganov.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 7983.
- [21] *P. Vanhaecke.* Math. Z. 1992. V. 211. P. 265.

Поступила в редакцию 20.I.2000 г.