Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Быков, Алгебра симметрии суперструны в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 114–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:02:39

© 2010 г.

Д. В. Быков*

АЛГЕБРА СИММЕТРИИ СУПЕРСТРУНЫ В $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$

Прямым вычислением в классической теории выводится центральное расширение алгебры симметрии струны, распространяющейся в пространстве $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Оно оказывается таким же, как и в случае струны в $AdS_5 \times S^5$. Детально рассмотрен выбор калибровки для каппа-симметрии, а также объяснено, каким образом можно выбрать эту калибровку, не нарушив бозонные симметрии.

Ключевые слова: AdS/CFT -соответствие, струна Грина–Шварца, интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Относительно недавно был предложен новый пример AdS/CFT -соответствия [1]–[3] – так называемая модель ABJM [4]. С точки зрения теории струн мы имеем дело с пределом вблизи горизонта $AdS_4 \times S^7/Z_k$ решения 11-мерной супергравитации, описывающего стопку совпадающих M2-бран на сингулярности Z_k -орбифлекса. Z_k действует на S^7 специфическим образом, а именно, если рассмотреть расслоение Хопфа $\pi: S^7 \rightarrow \mathbb{CP}^3$ со слоем S^1 , то Z_k уменьшает эту окружность в k раз, так что в пределе $k \rightarrow \infty$ окружность полностью исчезает и остается проективное пространство $\mathbb{CP}^3$. Дуальной гравитационному решению $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ оказывается $N = 6$ суперсимметричная теория Черна–Саймонса в трехмерном пространстве (вследствие суперсимметрии теория содержит поля материи и потому не является топологической).

Как и в $AdS_5 \times S^5$ -модели, в данной теории также были найдены различные признаки интегрируемости. А именно, в калибровочной теории интегрируемость двухпетлевого гамильтониана (однопетлевой гамильтониан обращается в нуль из-за дискретной симметрии) была показана в работе [5] прямой проверкой. Вскоре после этого была предложена алгебраическая кривая, описывающая классические решения, а также всепетлевой анзац Бете [6], [7]. Исходя из предположения о $su(2|2) \oplus u(1)$ -алгебре симметрии, была найдена точная факторизуемая S -матрица [8]. В той же работе эта S -матрица была диагонализирована, и были получены уравнения Бете, совпадающие с уравнениями из работы [7].

*Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия.
E-mail: dbykov@mi.ras.ru

В рамках струнной σ -модели, так как таргет-пространство является однородным (супер)пространством, σ -модель можно сформулировать в виде фактор-пространства [9], [10]. Используя данное представление, можно построить представление Лакса [9], из которого следует классическая интегрируемость.

Тем не менее вопрос об интегрируемости $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ -модели до сих пор остается открытым. Во-первых, при вычислении однопетлевой поправки к энергии вращающейся струны (с двумя зарядами J и S) было найдено несоответствие с предсказаниями анзаца Бете [11]. В дальнейшем этот результат был подтвержден вычислением поправки к энергии другой струнной конфигурации – так называемой круговой струны – рационального классического решения σ -модели [12]. Убедительного объяснения данного несоответствия пока не найдено. Одно из объяснений связано с возможным изменением функции $h(\lambda)$ (эффективного натяжения струны, или константы связи) вследствие петлевых поправок. Так как $h(\lambda)$ входит в дисперсионное соотношение гигантского магнона, которое в свою очередь может быть выведено из центрально-расширенной алгебры суперсимметрии как БПС-условие (т. е. условие укорачивания мультиплета), то вычисление петлевых поправок к центральному расширению могло бы оказаться очень полезным и внести решающий вклад в решение вопроса.

Еще одна загадка в программе интегрируемости связана с так называемыми тяжелыми модами в БМН-разложении теории струн. Действительно, БМН-разложение в ведущем (квадратичном) порядке было построено в работе [13] и проверено в статье [9], и из этих работ следует, что помимо мультиплета легких частиц массы $1/2$ есть также мультиплет тяжелых частиц массы 1. Тяжелые возбуждения не являются элементарными для спиновой цепочки – они содержат два элементарных (несущих импульс) корня Бете, т. е., вероятно, их можно интерпретировать как своего рода “связанную пару” элементарных магнонов.

Возможный путь решения данной проблемы был недавно предложен в работе [14]. Идея состоит в том, что петлевые поправки удаляют из спектра тяжелые частицы. Это означает, что полюс соответствующего пропагатора тяжелой частицы пропадает при учете, например, однопетлевых поправок. Это связано с тем, что тяжелая частица по своей массе находится как раз на пороге рождения двух легких частиц, а также с видом взаимодействий теории, которые перестают быть релятивистскими, как только мы уходим от строгого БМН-предела.

Центральное расширение алгебры суперсимметрии в случае $AdS_5 \times S^5$ было введено в работе [15]. Если бы алгебра симметрии $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ -струны отличалась от случая $AdS_5 \times S^5$, это могло бы служить подсказкой к решению проблемы массивных мод. Однако, как мы увидим ниже, центральное расширение то же самое.

Важной загадкой рассматриваемой модели является также необычный вид преобразований каппа-симметрии (κ -симметрии), а именно в случае, когда движение струны происходит только в пространстве AdS_4 , количество независимых κ -преобразований увеличивается. Это связано с тем, что данная модель может быть получена из более широкой модели, включающей 32 фермиона, путем частичной фиксации калибровки, и важный факт заключается в том, что эта более широкая модель уже

не может быть записана в виде (супер)фактор-пространства [16], что делает интегрируемость модели вовсе не столь очевидной. Более подходящий в определенных случаях выбор калибровки был предложен в работе [17]. Другие аспекты интегрируемости теории струн в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ изучались в статьях [18]–[20]; например, в этих работах посчитаны поправки к энергиям состояний в определенных секторах вблизи БМН-предела.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 дано определение фактор-пространства (косета), с которым мы будем иметь дело в дальнейшем. В разделе 3 налагается калибровка светового конуса. В разделе 4 мы обсудим преобразования всех физических полей σ -модели относительно глобальной группы симметрии, оставшейся после наложения калибровки светового конуса. В разделе 6 выведено центральное расширение путем вычисления скобок Пуассона. В данном вычислении мы следуем работе [21]: например, используем так называемое гибридное разложение, введенное в этой работе. В приложении читатель найдет необходимые матрицы в явном виде, а также выражение глобальных зарядов в терминах полей, скобки Пуассона этих полей и общее обсуждение геодезических в $\mathbb{CP}^3$.

2. ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВО

Пространство $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ с 24 суперзарядами (в дальнейшем обозначаемое $\mathcal{M}$) является десятимерным многообразием, допускающим действие топологической группы $G = OSP(6|2, 2)$. Это супергруппа, максимальной бозонной подгруппой которой является $O(6) \times USP(2, 2)$. Данная супергруппа действует транзитивно на многообразии, при этом стабилизатором произвольной точки x_0 в $\mathcal{M}$ является $H = U(3) \times O(3, 1)$. Таким образом, $\mathcal{M}$ гомеоморфно фактор-пространству G/H , на котором введена фактор-топология.

Действие группы G на многообразии $\mathcal{M}$ означает, что точке x_0 в $\mathcal{M}$ и элементу g в G соответствует новая точка $x_1 \equiv g(x_0)$, причем это соответствие согласовано с групповой структурой. Ниже будет найден этот закон преобразования в подходящих координатах на $\mathcal{M}$.

$\mathbb{CP}^3$ можно рассматривать как пространство ортогональных комплексных структур в $\mathbb{R}^6$. Действительно, $U(3) \subset O(6)$ – это подгруппа, сохраняющая заданную комплексную структуру, которую мы обозначим K_6 и, следуя работе [9], выберем в простейшем виде $K_6 = I_3 \otimes i\sigma_2$ (I_3 – единичная матрица 3×3). Тогда подалгебра Ли $u(3) \subset o(6)$ описывается матрицами размера 6×6 , коммутирующими с K_6 . Другими словами, как векторные пространства $o(6) = u(3) \oplus V_\perp$.

Векторное фактор-пространство W , описывающее касательное пространство $T_x \mathcal{M}$ (касательные пространства изоморфны для всех x , так как $\mathcal{M}$ – многообразие), описывается кососимметричными матрицами (т. е. элементами $o(6)$), антикоммутирующими с комплексной структурой. Действительно, заметим, что для любой матрицы $\omega \in O(6)$ присоединенное действие $\omega K_6 \omega^{-1}$ есть вновь комплексная структура. Для ω , достаточно близкой к единице, $\omega = 1 + \epsilon + \dots$, имеем $(K_6 + [\epsilon, K_6])^2 + O(\epsilon^2) = -I_6$. Линейный порядок по ϵ дает $\{K_6, [\epsilon, K_6]\} = 0$. Определим отображение $f: o(6) \rightarrow o(6)$ как $f(a) = [a, K_6]$. Так как $\text{Ker}(f) = u(3)$, W изоморфно $\text{Im}(f)$.

Можно также убедиться, что если $g(b) \equiv \{K_6, b\} = 0$, то $b \in \text{Im}(f) = W$ ¹⁾. Заметим, что все вышесказанное можно резюмировать точной последовательностью гомоморфизмов векторных пространств (i – включение):

$$0 \rightarrow u(3) \xrightarrow{i} o(6) \xrightarrow{f} o(6) \xrightarrow{g} \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

где $\mathbb{R}^N$ – векторное пространство симметричных матриц.

Несложно явно построить базис в этом линейном пространстве. Обозначив через J_1, J_2, J_3 три генератора $O(3)$ в векторном 3-представлении (явный вид см. в приложении), имеем

$$V_\perp = \text{Span}\{J_i \otimes \sigma_1; J_i \otimes \sigma_3\}. \quad (2.2)$$

Чтобы сравнить с обозначениями работы [9], выпишем генераторы T_i , использованные там, через введенный выше базис:

$$T_{1,3,5} = J_{1,2,3} \otimes \sigma_3, \quad T_{2,4,6} = J_{1,2,3} \otimes \sigma_1. \quad (2.3)$$

Основное свойство этих генераторов, важное для нас в дальнейшем, таково:

$$\{T_1, T_2\} = \{T_3, T_4\} = \{T_5, T_6\} = 0. \quad (2.4)$$

Удобно ввести следующие комплексные комбинации:

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_1 - iT_2), \quad T_2 = \frac{1}{2}(T_3 - iT_4). \quad (2.5)$$

$\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ обозначают комплексно-сопряженные комбинации.

3. КАЛИБРОВКА СВЕТОВОГО КОНУСА

Развернутый обзор квантования в калибровке светового конуса для случая суперструны в $AdS_5 \times S^5$ (которое можно обобщить и на другие максимально симметрические пространства) содержится в работе [22]. Введем координаты светового конуса:

$$x_+ = \frac{1}{2}(\varphi + t), \quad x_- = \varphi - t. \quad (3.1)$$

Соответствующие канонические импульсы p_+ и p_- сопряжены x_- и x_+ соответственно. Напомним, что калибровка светового конуса состоит из двух условий: $x_+ = \tau$, $p_+ = \text{const}$. Было бы желательно, чтобы струнный лагранжиан (и, следовательно, гамильтониан) не зависел от времени τ даже после наложения калибровки светового конуса. Это требование приводит к следующему выбору элемента фактор-пространства:

$$g = g_0 g_\chi g_B, \quad (3.2)$$

¹⁾На самом деле, выбор представителей в фактор-пространстве становится каноническим, как только введено киллингово скалярное произведение (так как f кососимметрично относительно этого скалярного произведения $\text{tr}(a, f(c)) = -\text{tr}(f(a), c)$). Действительно, если $a \in u(3)$ и $b \in \text{Im}(f)$, то $\text{tr}(ab) = \text{tr}(a[c, K_6]) = \text{tr}(acK_6 - aK_6c) = 0$, так как $[a, K_6] = 0$. Это оправдывает использование символа $V_\perp$ для W .

где $g_0 = e^{it\Gamma_0/2 + \varphi T_6/2}$, $g_\chi = e^\chi$, $g_B = e^{\alpha T_5/2} g_{\mathbb{CP}} g_{AdS}$. Представитель фактор-пространства g_{AdS} для пространства AdS выбран так же, как в работе [23]:

$$g_{AdS} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2/4}} \left(1 + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^3 z_i \Gamma_i \right), \quad (3.3)$$

где $z^2 = -\sum_{i=1}^3 z_i^2$. Матрица $g_{\mathbb{CP}}$ задает в свою очередь параметризацию $\mathbb{CP}^2$ и получается очевидной редукцией элемента фактор-пространства из работы [9]:

$$g_{\mathbb{CP}} = I + \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} (W + \bar{W}) + \frac{\sqrt{1+|w|^2} - 1}{|w|^2 \sqrt{1+|w|^2}} (W\bar{W} + \bar{W}W), \quad (3.4)$$

где

$$W = w_1 \mathcal{T}_1 + w_2 \mathcal{T}_2, \quad \bar{W} = \bar{w}_1 \bar{\mathcal{T}}_1 + \bar{w}_2 \bar{\mathcal{T}}_2. \quad (3.5)$$

Фермионная матрица χ имеет следующий вид:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ \eta & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} n_{11} & \cdots & n_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{41} & \cdots & n_{46} \end{bmatrix}, \quad \eta = -\theta^T C_4.$$

Из условия вещественности в алгебре следует, что две нижние строки матрицы θ связаны с двумя верхними комплексным сопряжением (более подробное описание этого и других свойств фактор-пространства см. в работе [9]):

$$n_{3j} = -n_{2j}^*, \quad n_{4j} = n_{1j}^*. \quad (3.6)$$

Легко видеть, что при данном выборе ток $A \equiv g^{-1}dg$, из которого строится лагранжиан, не зависит явно от времени мировой поверхности τ . Чтобы сделать это еще более очевидным, перепишем экспоненту g_0 в терминах координат светового конуса:

$$g_0 = e^{ix_+ \Sigma_+ / 2 + ix_- \Sigma_- / 4}, \quad (3.7)$$

где введены обозначения $\Sigma_\pm = \pm \Gamma_0 - iT_6 = \text{diag}\{\pm \Gamma_0; -iT_6\}$.

Как обычно, при фиксации калибровки теряется определенная доля симметрии. Поэтому следующая задача – определить подгруппу симметрии G , которая остается после фиксации калибровки светового конуса. Обозначим эту подгруппу G_{lc} . Ее алгебра Ли состоит из матриц, коммутирующих с направлением светового конуса Σ_+ . Блочнo-диагональная бозонная подалгебра g_{lc}^{Bose} описывается матрицами, коммутирующими как с Γ_0 , так и с T_6 (т. е. конкретная комбинация Σ_+ важна только для фермионной части алгебры – для суперзарядов). Можно явно проверить, что $g_{lc}^{\text{Bose}} = su(2) \oplus su(2) \oplus u(1)$. Одна из алгебр $su(2)$ возникает из условия коммутации с Γ_0 , а $su(2) \oplus u(1)$ – подалгебра матриц, коммутирующих с T_6 . Первую можно условно считать алгеброй $su(2)$, происходящей от AdS_4 , а вторую – алгеброй, происходящей от $\mathbb{CP}^3$. Схематично вложения соответствующих матриц выглядят следующим образом:

$$\omega = \begin{pmatrix} su(2)|_{4 \times 4}^{AdS} & 0 & 0 \\ 0 & u(1)|_{2 \times 2}^{\mathbb{CP}} & 0 \\ 0 & 0 & su(2)|_{4 \times 4}^{\mathbb{CP}} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Более детальное описание этих матриц приведено в приложении.

Теперь необходимо определить полную алгебру g_{lc} , которая остается после наложения калибровки светового конуса. Это значит, что мы хотим включить также преобразования суперсимметрии и более не будем ограничиваться бозонной частью g_{lc}^{Bose} . Тогда, как можно убедиться прямой проверкой, полная алгебра есть $g_{lc} = su(2|2) \oplus u(1)$. Именно эта алгебра приобретает центральное расширение в гамильтоновой формулировке. Отложим более детальное обсуждение данного вопроса до раздела 6.

4. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ

4.1. Бозоны. В данном разделе будут выяснены свойства преобразования полей, как бозонных, так и фермионных, относительно G_{lc}^{Bose} (или g_{lc}^{Bose} в бесконечно малом виде). Важно заметить, что $G_{lc}^{\text{Bose}} \subset H$. Подействуем на элемент фактор-пространство (3.2) слева бозонным групповым элементом из G_{lc}^{Bose} , который обозначим e^a , имея в виду, что a лежит в алгебре Ли g_{lc} :

$$g \rightarrow e^a g = g_0 e^{ad_a}(g_\chi) e^{ad_a}(g_B) e^a, \quad (4.1)$$

где мы воспользовались тем, что $[a, \Gamma_0] = [a, T_6] = 0$. Самая правая экспонента несущественна, так как она лежит в стабилизаторе, в связи с чем не меняет соответствующий класс сопряженности. Из вышеприведенной формулы следует, что бозоны и фермионы преобразуются по присоединенному представлению G_{lc}^{Bose} . Для полной ясности мы еще более явно опишем свойства преобразования этих полей. Будем работать в базисе γ -матриц, описанном в приложении, при этом для $k = 1, 2, 3$ имеем $\gamma_k = i\sigma_2 \otimes \sigma_k$, так что часть фактор-пространства, описывающая AdS , имеет вид

$$g_{AdS} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2/4}} \begin{pmatrix} I_2 & \sum_{i=1}^3 z_i \sigma_i \\ -\sum_{i=1}^3 z_i \sigma_i & I_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Как говорилось ранее, относительно действия группы $SU(2)$ из AdS этот элемент преобразуется по присоединенному представлению. Поэтому, вводя обозначение $Z \equiv \sum_{i=1}^3 z_i \sigma_i$, будем иметь (Δ – диагональное вложение, определенное в приложении)

$$g_{AdS} \rightarrow \Delta(\omega) g_{AdS} \Delta(\omega^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2/4}} \begin{pmatrix} I_2 & \omega Z \omega^\dagger \\ -\omega Z \omega^\dagger & I_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Так как Z – бесследовая эрмитова матрица, преобразование $Z \rightarrow \omega Z \omega^\dagger$ с $\omega \in SU(2)$ определяет векторное представление. Чтобы выделить неприводимые представления, введем три комплексные комбинации генераторов T_i :

$$\tau_1 = T_1 + iT_2; \quad \tau_2 = T_3 + iT_4; \quad \tau_3 = T_5 + iT_6. \quad (4.4)$$

Запишем $\sum_{i=1}^4 \beta_i T_i = \beta_1^+ \tau_1 + \beta_2^+ \tau_2 + \text{к.с.}$, где $\beta_{1,2}^+$ – набор новых (комплексных) координат. Легко проверить, что относительно $su(2) \oplus u(1)$ из $\mathbb{CP}^3$ эти координаты образуют комплексный дублет и, следовательно, β_i преобразуются по представлению

$2^1 + 2^{-1}$, где показатель отвечает $u(1)$ -заряду. Действительно, обозначим алгебры $su(2)$ из AdS_4 и $\mathbb{CP}^3$ как $su(2)_R$ и $su(2)_L$ соответственно. Пусть

$$\omega = \begin{pmatrix} \Delta\omega_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_u & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

– матрица преобразования общего вида. Используя тот факт, что для компактных групп экспоненциальное отображение является сюръекцией, введем явную параметризацию для этих матриц: $\omega_u = e^{-\alpha i \sigma_2}$ и $\omega_2 = e^{\sum_{i=1}^3 \delta_i s_i}$. Далее, ненулевую часть верхней строки матрицы W (см. приложение) можно записать в виде

$$\hat{w} = (w_1, w_2) \otimes \frac{1}{2}(1, -i). \quad (4.6)$$

Действуя на нее матрицей w_2^{-1} справа, получаем закон преобразования:

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_1, w_2) (e^{\pm i \sum_{j=1}^3 \delta_j \sigma_j})^T, \quad (4.7)$$

что есть не что иное, как каноническое действие $SU(2)$ (определенное на вектор-строках, а не на вектор-столбцах).

Справедливо даже более сильное утверждение, а именно: τ_i находятся в неприводимом представлении 3 относительно присоединенного действия $H = U(3)$, т. е. они преобразуются как комплексный триплет. Это значит, что T_i – в представлении $3 + \bar{3}$. Одним из следствий данного факта является следующее интересное свойство: кососимметрические (6×6) -матрицы (т. е. матрицы из $so(6)$), коммутирующие с T_6 , одновременно коммутируют с T_5 . Таким образом, преобразования, оставляющие инвариантным T_6 , также оставляют инвариантным T_5 .

4.2. Фермионы. Перейдем к определению свойств преобразования фермионов χ . Они образуют представление алгебры $su(2) \oplus su(2) \oplus u(1)$, и необходимо разложить его на неприводимые. Будем действовать аналогично случаю бозонов. Фермионная матрица θ преобразуется таким образом:

$$\theta \rightarrow \Delta\omega_1 \theta \tilde{\omega}^{-1}. \quad (4.8)$$

Как следует из приложения, матричный базис алгебры Ли $su(2)|_{4 \times 4}^{\mathbb{CP}}$ имеет вид $A \otimes B$, где B – либо единичная матрица I_2 , либо кососимметричная матрица $i\sigma_2$. Более того, $u(1)$ -генератор есть просто $i\sigma_2$. Поэтому имеет смысл выделить компоненты фермионной матрицы, отвечающие собственным значениям σ_2 . Получим, что две верхние строки матрицы θ имеют вид

$$\theta^{(+1)} + \theta^{(-1)} + \theta_+^{(0)} + \theta_-^{(0)}, \quad (4.9)$$

где $\theta^{(\pm 1)}$ имеют ненулевые 1-й и 2-й столбцы, а $\theta_{\pm}^{(0)}$ – нулевые 1-й и 2-й столбцы. Для упрощения некоторых выражений временно отсечем нулевые столбцы у всех этих матриц, т. е. будем считать, что $\theta^{(\pm 1)}$ – (2×2) -матрица, а $\theta_{\pm}^{(0)}$ – (4×2) -матрица.

Из контекста должно быть ясно, нужно ли вложить эти матрицы в большие. Тогда можно их определить таким образом:

$$\theta^{(+1)} = \kappa^{(+1)} \otimes (1, -i), \quad \theta^{(-1)} = \kappa^{(-1)} \otimes (1, i), \quad (4.10)$$

$$\theta_+^{(0)} = \chi^{+0} \otimes (1, -i), \quad \theta_-^{(0)} = \chi^{-0} \otimes (1, i). \quad (4.11)$$

В приложении можно найти явное выражение матрицы θ через все эти компоненты.

При умножении на ω_u^{-1} справа, очевидно, $\chi^{\pm 0}$ не меняются, а $\kappa^{(\pm 1)}$ преобразуются следующим образом:

$$\kappa^{(\pm 1)} \rightarrow e^{\pm i\alpha} \kappa^{(\pm 1)}. \quad (4.12)$$

С другой стороны, при умножении на ω_2^{-1} справа κ не меняются, а $\chi^{(\pm 0)}$ преобразуются следующим образом:

$$\chi^{(\pm 0)} \rightarrow \chi^{(\pm 0)} (e^{\pm i \sum_{j=1}^3 \delta_j \sigma_j})^T, \quad (4.13)$$

что совпадает с законом преобразования (4.7). Компоненты матриц $\kappa^{(+1)}$ и χ^{+0} в явном виде выписаны в приложении (см. формулы (П.6)). В терминах этих компонент свойства преобразования фермионов таковы:

$$\begin{aligned} \kappa^{a,+1} &\rightarrow e^{i\phi} (\omega_1)^a_b \kappa^{b,+1}, \\ (\chi^{+0})_\alpha^a &\rightarrow (\omega_1)^a_b (\omega_2)^\beta_\alpha (\chi^{+0})_\beta^b. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Иными словами, как матрица $\chi = \{\chi_\alpha^a\}$ преобразуется по формуле $\chi \rightarrow \omega_1 \chi (\omega_2)^T$. Конечно, также необходимо знать, как меняются комбинации вроде $n_{11} - i n_{12}$ (входящие в $\kappa^{(-1)}$ и χ^{-0}). Оказывается, они в сопряженном представлении относительно $\mathbb{CP}^3$ -части алгебры и в том же представлении относительно AdS -части алгебры. Полезно обеспечить, чтобы χ^- преобразовывались идентично $\chi^\dagger$, а κ^{-1} – по представлению, сопряженному κ^{+1} . Это удобно, потому что $\chi^\pm$ не заряжены по $U(1)$, а $\kappa^\pm$ имеют противоположные $U(1)$ заряды. Так как поля κ несут противоположные $U(1)$ заряды, естественно также снабдить их противоположными свойствами преобразования по $SU(2)$ из AdS (они нейтральны по $SU(2)$ из $\mathbb{CP}^3$).

Всегда можно изменить таким путем свойства преобразования полей, так как фундаментальное и сопряженное фундаментальное представления $SU(2)$ эквивалентны, что означает существование матрицы $C \in SU(2)$, обеспечивающей выполнение соотношения

$$\omega^* = C \omega C^{-1}, \quad \omega \in SU(2). \quad (4.15)$$

На самом деле $C = i\sigma_2$. Явный вид соответствующих комбинаций можно также найти в приложении (см. формулы (П.7)): они преобразуются аналогично (4.14) с той лишь разницей, что экспоненту $e^{i\phi}$ необходимо заменить на $e^{-i\phi}$, чтобы учесть противоположный закон преобразования относительно $U(1)$.

Индексы выбраны таким образом, чтобы было ясно, как преобразуются фермионы. Коротко можно сформулировать вышеописанные свойства преобразования таким образом: $\kappa_{1,2}^{\pm 1}$ преобразуются по фундаментальному представлению $su(2)_R$,

причем знаки $\pm$ обозначают, что они несут противоположные заряды относительно $u(1)$, в то время как $\chi_{\alpha\beta}^{\pm 0}$ бифундаментальны по $su(2)_R \oplus su(2)_L$ и нейтральны по $u(1)$. Из формул (3.6) следует, что две нижние строки матрицы θ преобразуются аналогичным путем. В сумме имеется 12 комплексных фермионных полей, сгруппированных в неприводимые представления $\kappa_{\alpha}^{\pm 1}$, $\chi_{\alpha\beta}^{\pm 0}$.

5. КАЛИБРОВКА κ -СИММЕТРИИ

Известно, что струнные σ -модели в формулировке Грина–Шварца обладают, помимо вейль- и диффеоморфизм-инвариантности, также другим типом калибровочной симметрии – κ -симметрией, которая является фермионной в том смысле, что калибровочные (т. е. локальные) параметры являются фермионными (и в дальнейшем обозначаются ϵ). Здесь уместно небольшое историческое отступление²⁾. Впервые κ -симметрия была найдена в теории массивной суперчастицы, распространяющейся в четырехмерном пространстве, в работе [24]. Затем аналогичная симметрия была обнаружена и в случае безмассовой частицы в работе [25]. Существование таких преобразований в теории суперструн было впервые показано Грином и Шварцем для случая суперструны в плоском пространстве [26], однако κ -симметрией обладают и другие модели, включая случай $AdS_5 \times S^5$. Такого рода инвариантность также имеет место и в рассматриваемом случае $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ -струны [9].

Убедившись в существовании κ -симметрии, мы должны выбрать для нее калибровку (т. е. представителя на каждой орбите калибровочной группы). Это можно сделать различными способами, однако нашей целью является сохранить столько глобальной симметрии, сколько возможно, так как глобальная симметрия позволяет легче классифицировать мультиплеты полей и в конце концов ведет к более простой формулировке теории. В нашем случае это требование означает, что вся группа G_{lc}^{Bose} должна быть сохранена. Опишем подробно, как этого можно добиться. Как показано в работе [9], в ведущем порядке по ϵ вариация поля θ такова:

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & -i\epsilon_2 & -i\epsilon_1 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & -i\epsilon_4 & -i\epsilon_3 \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение аналогично (3.6). Можно убедиться, что (5.1) – верхний правый блок фермионной матрицы общего вида ϑ , удовлетворяющей требованию $f_1(\vartheta) \equiv [\vartheta, \Sigma_+] = 0$ (не говоря об условиях вещественности, многократно обсуждавшихся выше). Пусть W_F – полное фермионное векторное пространство. Факторизуя по калибровочно-эквивалентным конфигурациям, получим $W_F / \text{Ker } f_1 \sim \text{Im } f_1$. Проверим, что пространство $\text{Im } f_1$ инвариантно относительно действия G_{lc}^{Bose} . Пусть a принадлежит g_{lc}^{Bose} (это означает, что $[a, \Sigma_+] = 0$) и $c = [d, \Sigma_+] \in \text{Im } f_1$, тогда $e^{ad_a}(c) = [e^{ad_a}(d), \Sigma_+] \in \text{Im } f_1$. Ограничение фермионного векторного пространства на $\text{Im } f_1$ означает, что нужно положить

$$n_{15} = in_{14}, \quad n_{16} = in_{13}, \quad n_{25} = in_{24}, \quad n_{26} = in_{23}, \quad (5.2)$$

²⁾Я благодарен Д. П. Сорокину, обратившему мое внимание на данную хронологию событий.

и это явный вид калибровки, которой мы будем пользоваться. Тогда, как легко видеть из формул (П.6), (П.7) приложения, $\chi^{+0} = \chi^{-0} \equiv \chi^0$, так что мы избавляемся от одного из мультиплетов. В результате остается 8 комплексных фермионов, как и должно быть для суперсимметрии. Подчеркнем, что данный выбор κ -калибровки эквивалентен требованию, чтобы для любого χ существовала матрица ξ такая, что $\chi = [\Sigma_+, \xi]$. Очевидно, что эта матрица не единственна.

6. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ

В разделе 4 обсуждались представления фермионных полей относительно действия бозонной части алгебры симметрии. Нечетная часть алгебры симметрии может быть реализована аналогично фермионным полям, т. е. как нечетные элементы матрицы размера $4|6 \times 4|6$. Это означает, что представление суперзарядов есть подпредставление представления, по которому преобразуются фермионы. Действительно, по сравнению с фермионами имеется дополнительное условие для суперзарядов: они должны коммутировать с Σ_+ . Это требование оставляет лишь четыре комплексных независимых суперзаряда, как и должно быть в алгебре $su(2|2)$.

В контексте алгебры $su(2) \oplus su(2)$ будем использовать латинские индексы для AdS -части и греческие для $\mathbb{CP}^3$ -части. Генераторы $su(2|2)$ удобно описывать с помощью двух бесследовых бозонных операторнозначных матриц R_α^β и L_a^b , а также операторнозначной (комплексной) фермионной матрицы $\mathcal{Q}_\alpha^a$. Отсюда должно быть понятно, что L и R описывают AdS - и $\mathbb{CP}^3$ -вращения соответственно. Относительно скобки Пуассона элементы этих матриц образуют следующую алгебру Ли:

$$\begin{aligned} [R_\alpha^\beta, R_\gamma^\delta] &= \delta_\alpha^\delta R_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\beta R_\alpha^\delta, \\ [L_a^b, L_c^d] &= \delta_a^d L_c^b - \delta_c^b L_a^d, \\ \{\mathcal{Q}_\alpha^a, \overline{\mathcal{Q}}_b^\beta\} &= \delta_\alpha^\beta L_b^a - \delta_b^a R_\alpha^\beta + \frac{1}{2} \delta_b^a \delta_\alpha^\beta H, \\ \{\mathcal{Q}_\alpha^a, \mathcal{Q}_\beta^b\} &= \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ab} P_1, \\ \{\overline{\mathcal{Q}}_a^\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_b^\beta\} &= \epsilon_{ab} \epsilon^{\alpha\beta} P_2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Очевидно, что $P_2 = \overline{P}_1$. Кроме того, можно проверить, что бозонная часть (первые две строки) есть в точности $su(2) \oplus su(2)$, если сделать следующие отождествления: $R_1^1 = \sigma_3/2$, $R_1^2 = \sigma_-$, $R_2^1 = \sigma_+$.

Используя теорему Нётер, можно найти матрицу суперзарядов, т. е. векторное поле со значениями в алгебре Ли $osp(6|2, 2)$ и нулевой дивергенцией:

$$J^\alpha = g \left(\gamma^{\alpha\beta} A_\beta^{(2)} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta} (A_\beta^{(3)} - A_\beta^{(1)}) \right) g^{-1}. \quad (6.2)$$

Здесь, как обычно, верхние индексы в скобках обозначают соответствующую компоненту тока A_α относительно Z_4 -градуировки. Компоненты J_α при разложении по базису алгебры Ли – сохраняющиеся токи, отвечающие различным зарядам, как бозонным, так и фермионным.

Перейдем к наложению калибровки светового конуса. Для этого воспользуемся формализмом первого порядка, как в работе [23]. Это не является необходимым, но упрощает вычисления. Перепишем лагранжиан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \mathcal{L} = & \frac{1}{2\gamma^{00}} \text{Str}((\mathcal{P}_0)^2) - \text{Str}\left(\mathcal{P}_0^{(2)}\left(A_0 + \frac{\gamma^{01}}{\gamma^{00}} A_1\right)\right) + \frac{1}{2\gamma^{00}} \text{Str}((A_1^{(2)})^2) - \\ & - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \text{Str}(A_\alpha^{(1)} A_\beta^{(3)}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

В первом члене можно было бы написать $\mathcal{P}_0^{(2)}$, однако все остальные члены в любом случае отщепляются, поэтому они могут давать вклад лишь в нормировку континуального интеграла, которая в данном случае несущественна. На самом деле физическое значение величины $\mathcal{P}_0$ состоит в том, что она задает разложение импульса по локальной (супер)тетраде (по крайней мере, если пренебречь членом Весса–Зумино). Действительно, обозначая набор всех полей через X_μ , можно записать $A_0^{(2)} \equiv -E_\mu^a \dot{X}_\mu T_a$, так что при отбрасывании члена Весса–Зумино $p_{X_\mu} = E_\mu^a \text{Str}(\mathcal{P}_0 T_a) = E_\mu^a \mathcal{P}_{0,a}$. Таким путем мы эффективно избавляемся от сложных вкладов тетрад в явные выражения для импульсов. Возможность отбрасывания члена Весса–Зумино в нашем случае оправдывается тем, что он не дает вклада ни в какие величины, входящие в алгебру, в ведущем порядке. Действительно, для вычисления алгебры нам нужен лишь тот член в суперзарядах, который линеен по фермионам, и член в бозонных зарядах, квадратичный по бозонам, в то время как член Весса–Зумино по крайней мере квадратичен по фермионам.

Из формулы (6.3) можно сразу получить условия Вирасоро:

$$V_1 \equiv \text{Str}(\mathcal{P}_0^{(2)} A_1) = 0, \quad (6.4)$$

$$V_2 \equiv \text{Str}((\mathcal{P}_0^{(2)})^2 + (A_1^2)^2) = 0. \quad (6.5)$$

Важно заметить, что, как только наложена κ -калибровка, действие преобразований суперсимметрии на физические поля дается $g \rightarrow e^\epsilon g e^{\tilde{\epsilon}}$, где $\tilde{\epsilon}$ – компенсирующее κ -преобразование (оно однозначно определяется по ϵ). Это действие отлично от $g \rightarrow e^\epsilon g$, которое (как описано ранее) было до наложения калибровки κ -симметрии. Данное явление не специфично для рассматриваемого случая, а является общим свойством теорий суперструн – например, оно также присутствует в плоском случае [27]. Оно весьма напоминает калибровку Весса–Зумино в суперсимметричных теориях: она явно нарушает суперсимметрию, однако калибровочно-фиксированное действие обладает симметрией, являющейся комбинацией преобразования суперсимметрии и калибровочного преобразования [28].

При вычислении скобок Пуассона мы будем активно пользоваться формулами, полученными в приложении. Прямое вычисление дает следующий результат для центрального расширения, входящего в формулы (6.1):

$$P_1 = -\frac{i}{2} \int d\sigma e^{-ix_-} x'_- = \frac{1}{2} e^{-ix_-(-\infty)} (e^{-ip} - 1) = \frac{\xi}{2} (e^{-ip} - 1), \quad (6.6)$$

$$P_2 = \frac{i}{2} \int d\sigma e^{ix_-} x'_- = \frac{1}{2} e^{ix_-(-\infty)} (e^{ip} - 1) = \frac{\xi^*}{2} (e^{ip} - 1), \quad (6.7)$$

где мы ввели обозначение $\xi \equiv e^{-ix_-(-\infty)}$.

Интересно заметить, что такую алгебру вполне можно назвать алгеброй мирового листа, так как в нее помимо генераторов суперсимметрии и других зарядов таргет-пространства входят элементы тензора энергии-импульса мирового листа p и H . На самом деле, единственное отличие от обычной алгебры суперсимметрии состоит в том, что p и H центральны. Тем не менее и в обычной алгебре суперсимметрии, если отбросить лоренцевы генераторы, соответствующие энергия и импульс также становятся центральными. Конечно, в нашем случае в калибровке светового конуса нет никакой алгебры Лоренца, так как теория не лоренц-инвариантна на мировом листе. Даже если она и была бы лоренц-инвариантна, лоренц-симметрия выглядит очень просто в двух измерениях. Однако в данном случае имеется значительно более интересный аналог, а именно группа $SL(2)$ внешних автоморфизмов алгебры [29]. Она действует как трехмерная группа вращений (или группа Лоренца) [30]. Эти автоморфизмы являются внешними, так как не сохраняют свойства вещественности фермионных зарядов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части настоящей статьи была предложена калибровка κ -симметрии, согласованная с бозонными $su(2) \oplus su(2) \oplus u(1)$ -симметриями. Вторая часть была посвящена вычислению в рамках классической теории центрального расширения алгебры суперсимметрии в рамках так называемого гибридного разложения. Вычисление соответствующих скобок Пуассона между суперзарядами привело к такому же результату, который был ранее получен для случая $AdS_5 \times S^5$. Несколько отклонившись от основной темы статьи, мы привели в приложении общую схему анализа геодезических в $\mathbb{CP}^3$ (которая также подходит для любого другого симметрического пространства).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Матрицы

В статье используется следующее представление γ -матриц:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Можно убедиться, что, как указано в тексте, при $k = 1, 2, 3$ имеем $\gamma_k = i\sigma_2 \otimes \sigma_k$. Еще одна матрица, которая встречается в тексте:

$$C_4 = i\Gamma_0\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

J -матрицы – генераторы $SO(3)$ из раздела 2 – определяются следующим образом:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3})$$

Они удовлетворяют обычным соотношениям $[J_k, J_l] = -\epsilon_{klm}J_m$.

Матрица W , определенная в формуле (3.5), выглядит следующим образом:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_1/2 & -iw_1/2 & w_2/2 & -iw_2/2 \\ 0 & 0 & -iw_1/2 & -w_1/2 & -iw_2/2 & -w_2/2 \\ -w_1/2 & iw_1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ iw_1/2 & w_1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_2/2 & iw_2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ iw_2/2 & w_2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

В основном тексте мы использовали отдельное обозначение для первой строки этой матрицы:

$$\hat{w} = \left(\frac{w_1}{2}, -\frac{iw_1}{2}, \frac{w_2}{2}, -\frac{iw_2}{2} \right) = (w_1, w_2) \otimes \frac{1}{2}(1, -i). \quad (\text{П.5})$$

Фермионная матрица θ выглядит так:

$$\theta = \begin{pmatrix} \kappa_1^{+1} - \kappa_2^{-1} & -i(\kappa_1^{+1} + \kappa_2^{-1}) & \frac{\chi_{1,1}^+ - \chi_{1,2}^-}{2} & -i\frac{\chi_{1,1}^+ + \chi_{1,2}^-}{2} & \frac{\chi_{1,2}^+ + \chi_{1,1}^-}{2} & -i\frac{\chi_{1,2}^+ - \chi_{1,1}^-}{2} \\ \kappa_1^{-1} + \kappa_2^{+1} & i(\kappa_1^{-1} - \kappa_2^{+1}) & \frac{\chi_{2,1}^+ - \chi_{2,2}^-}{2} & -i\frac{\chi_{2,1}^+ + \chi_{2,2}^-}{2} & \frac{\chi_{2,2}^+ + \chi_{2,1}^-}{2} & -i\frac{\chi_{2,2}^+ - \chi_{2,1}^-}{2} \\ -\bar{\kappa}_1^{-1} - \bar{\kappa}_2^{+1} & i(\bar{\kappa}_1^{-1} - \bar{\kappa}_2^{+1}) & \frac{\bar{\chi}_{2,2}^- - \bar{\chi}_{2,1}^+}{2} & -i\frac{\bar{\chi}_{2,1}^+ + \bar{\chi}_{2,2}^-}{2} & -\frac{\bar{\chi}_{2,2}^+ + \bar{\chi}_{2,1}^-}{2} & -i\frac{\bar{\chi}_{2,2}^+ - \bar{\chi}_{2,1}^-}{2} \\ \bar{\kappa}_1^{+1} - \bar{\kappa}_2^{-1} & i(\bar{\kappa}_1^{+1} + \bar{\kappa}_2^{-1}) & \frac{\bar{\chi}_{1,1}^+ - \bar{\chi}_{1,2}^-}{2} & i\frac{\bar{\chi}_{1,1}^+ + \bar{\chi}_{1,2}^-}{2} & \frac{\bar{\chi}_{1,2}^+ + \bar{\chi}_{1,1}^-}{2} & i\frac{\bar{\chi}_{1,2}^+ - \bar{\chi}_{1,1}^-}{2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при наложении каша-калибровки необходимо взять $\chi^\dagger = \chi^- \equiv \chi$.

Также можно выразить поля $\kappa^{\pm 1}$, $\chi^{\pm 0}$ в терминах n_{ij} , т. е. элементов матрицы θ , а именно

$$\begin{aligned} \kappa_1^{+1} &= \frac{1}{2}(n_{11} + in_{12}), & \kappa_2^{+1} &= \frac{1}{2}(n_{21} + in_{22}), \\ \chi_{11}^{+0} &= n_{13} + in_{14}, & \chi_{12}^{+0} &= n_{15} + in_{16}, \\ \chi_{21}^{+0} &= n_{23} + in_{24}, & \chi_{22}^{+0} &= n_{25} + in_{26}. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Сопряженные комбинации таковы:

$$\begin{aligned}\kappa_1^{-1} &= \frac{1}{2}(n_{21} - in_{22}), & \kappa_2^{-1} &= -\frac{1}{2}(n_{11} - in_{12}), \\ \chi_{11}^{-0} &= n_{15} - in_{16}, & \chi_{12}^{-0} &= -(n_{13} - in_{14}), \\ \chi_{21}^{-0} &= n_{25} - in_{26}, & \chi_{22}^{-0} &= -(n_{23} - in_{24}).\end{aligned}\tag{П.7}$$

Прежде всего, опишем явно матричные генераторы алгебры $su(2) \oplus su(2) \oplus u(1)$. Введем следующие матрицы:

$$\begin{aligned}t_k &= -\frac{i}{2}\Delta(\sigma_k), & u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \\ s_1 &= \frac{1}{2}\sigma_1 \otimes i\sigma_2, & s_2 &= -\frac{1}{2}i\sigma_2 \otimes I_2, & s_3 &= \frac{1}{2}\sigma_3 \otimes i\sigma_2,\end{aligned}\tag{П.8}$$

где I_2 – единичная матрица 2×2 , а Δ – диагональное вложение: $\Delta(a) = I_2 \otimes a$. В этих обозначениях t_k описывают $su(2)|_{4 \times 4}^{AdS}$, u есть $u(1)|_{2 \times 2}$ $U(1)$ -заряд из $\mathbb{CP}^3$, а s_k описывают $su(2)|_{4 \times 4}^{\mathbb{CP}}$. Эти матрицы (после соответствующих вложений в (10×10) -матрицы) удовлетворяют необходимым условиям вещественности (например, s_i вещественны), а также следующим коммутационным соотношениям:

$$[t_i, t_j] = \epsilon_{ijk}t_k, \quad [s_i, s_j] = \epsilon_{ijk}s_k, \quad [t_i, s_j] = [t_i, u] = [s_i, u] = 0.\tag{П.9}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Заряды

В данном приложении мы выпишем явно выражения (в терминах полей модели) для всех зарядов, появляющихся в алгебре симметрии. Также будут выписаны скобки Пуассона полей, чтобы можно было легко проверить, что заряды действительно удовлетворяют предложенной алгебре.

Прежде всего, поясним используемые ниже обозначения. А именно необходимо указать, каким образом поднимаются и опускаются индексы различных полей, так как без понимания этого невозможно проверить ковариантность полученных выражений, даже если нижние индексы всегда свернуты с верхними. Во-первых, $Z \equiv z_i \sigma_i$ и $P_z \equiv P_{z_i} \sigma_i$. Матричные элементы этих матриц будем обозначать Z^a_b и $(P_z)^a_b$ соответственно. Мы вынуждены использовать такую “сдвинутую” запись индексов, так как в противном случае было бы не ясно, что означают Z_1^2 и Z_2^1 . Как всегда, индексы в наших обозначениях необходимо читать слева направо, т.е. например, Z^1_2 – элемент в первой строке и втором столбце и т.д. Что касается фермионов, мы используем обозначение $\chi^a_\alpha, \kappa^{a,+1}_\alpha, \kappa^{a,-1}_\alpha$. Индексы у $\kappa^{\pm 1}$ стоят в разных местах, так как они преобразуются по сопряженным представлениям³⁾. Очевидно, комплексное сопряжение поля меняет представление на сопряженное, поэтому сопряжение меняет положение индекса. Например, $\bar{\chi}^a_\alpha \equiv (\chi^a_\alpha)^*$, $\bar{\kappa}^{a,+1}_\alpha \equiv (\kappa^{a,+1}_\alpha)^*$, $(Z^*)^a_b \equiv (Z^a_b)^*$

³⁾Эти представления эквивалентны, как говорилось выше. Тем не менее мы предпочитаем определять фермионы именно таким образом, чтобы избавиться от дополнительных ϵ -символов. Необходимо просто держать в уме, что в этом случае необходимо сворачивать индексы следующим образом: $\kappa^{a,+1}_\alpha \kappa^{a,-1}_\alpha$ или $(\kappa^{a,\pm 1}_\alpha)^* \kappa^{a,\pm 1}_\alpha$ и т.д.

и т. д. С этого момента можно повышать или понижать индексы, используя ϵ^{ab} и $\epsilon^{\alpha\beta}$. Например, $v^a \equiv \epsilon^{ab}v_b$ и $v_a = -\epsilon_{ab}v^b$. Как только минус в предыдущей формуле выписан явно, то $\epsilon^{ab} = \epsilon_{ab}$.

Напомним, что ϵ_{ab} – коэффициент Клебша–Гордана для получения спина 0 из двух спинов 1/2, а $(\epsilon\sigma_i)_{ab}$ – коэффициенты Клебша–Гордана для получения спина 1 из двух спинов 1/2. Это означает, например, что $\epsilon_{ab}v^aw^b$ – скаляр, а $(\epsilon\sigma_i)_{ab}v^aw^b$ – вектор.

Б.1. Фермионные заряды. Фермионные заряды, выписанные в явно ковариантном виде, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\alpha^a &= \frac{i}{4} \int d\sigma e^{-ix-/2} \left(2p_y \chi_\alpha^a + 2\epsilon^{ab}(Z^*)_b{}^c (\epsilon_{\alpha\beta} \bar{\chi}_c^\beta + i\epsilon_{cd} \chi_\alpha^d) - \right. \\ &\quad - 2i\epsilon^{ab}(P_z^*)_b{}^c \epsilon_{\alpha\beta} \bar{\chi}_c^\beta - i\epsilon_{\alpha\beta} \bar{w}^\beta (\kappa_a^{a,+1} - 2i(\bar{\kappa}')^{a,-1}) - i\epsilon^{ab} w_\alpha (\kappa_b^{-1} - 2i(\bar{\kappa}')_b^{+1}) + \\ &\quad \left. + 2\epsilon^{ab} P_{w,\alpha} \kappa_b^{-1} + 2\epsilon_{\alpha\beta} \bar{P}_w^\beta \kappa_a^{a,+1} - 2iy(\chi_\alpha^a + i\epsilon^{ab} \epsilon_{\alpha\beta} (\bar{\chi}')_b^\beta) \right), \\ \bar{\mathcal{Q}}_a^\alpha &= -\frac{i}{4} \int d\sigma e^{ix-/2} \left(2p_y \bar{\chi}_a^\alpha + 2\epsilon_{ab}(Z)^b{}_c (\epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta^c - i\epsilon^{cd} (\bar{\chi}')_d^\alpha) + \right. \\ &\quad + 2i\epsilon_{ab}(P_z)^b{}_c \epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta^c + i\epsilon^{\alpha\beta} w_\beta (\bar{\kappa}_a^{+1} + 2i(\kappa')_a^{-1}) + i\epsilon_{ab} \bar{w}^\alpha (\bar{\kappa}^{b,-1} + 2i(\kappa')^{b,+1}) + \\ &\quad \left. + 2\epsilon_{ab} \bar{P}_w^\alpha \bar{\kappa}^{b,-1} + 2\epsilon^{\alpha\beta} P_{w,\beta} \bar{\kappa}_a^{+1} + 2iy(\bar{\chi}_a^\alpha - i\epsilon_{ab} \epsilon^{\alpha\beta} (\chi')_b^\beta) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Можно видеть, что эти заряды являются комплексно-сопряженными друг другу. Они будут эрмитово сопряженными относительно скалярного произведения в гильбертовом пространстве квантовой теории после квантования.

Б.2. Бозонные заряды. Квадратичная относительно бозонов часть бозонных зарядов, записанная в ковариантных обозначениях, выглядит следующим образом:

$$L_a^b = \frac{i}{4} \int d\sigma ((P_z)_a{}^c Z_c^b - Z_a^c (P_z)_c^b), \quad (\text{П.11})$$

$$R_a^b = \frac{i}{4} \int d\sigma \left(\bar{w}_b p_{w_a} - \bar{p}_{w_b} w_a + \frac{1}{2} \delta_{ab} \sum_{i=1}^2 (w_i \bar{p}_{w_i} - \bar{w}_i p_{w_i}) \right), \quad (\text{П.12})$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\sigma \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(P_z^2 + Z'^2 + Z^2) + p_y^2 + y'^2 + y^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \left(p_{w_i} \bar{p}_{w_i} + w'_i \bar{w}'_i + \frac{1}{4} w_i \bar{w}_i \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

$U(1)$ -заряд имеет вид

$$U = \frac{i}{2} \int d\sigma (\bar{w}_1 p_{w_1} + \bar{w}_2 p_{w_2} - w_1 \bar{p}_{w_1} - w_2 \bar{p}_{w_2}). \quad (\text{П.14})$$

Импульс на мировом листе выглядит так:

$$\begin{aligned} p_{ws} \equiv p &= \int d\sigma x'_- = - \int d\sigma \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(P_z Z') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (p_{w_i} \bar{w}'_i + \bar{p}_{w_i} w'_i) + p_y y' - \right. \\ &\quad \left. - i\bar{\chi}_a^\alpha \chi_\alpha^{a'} - i\bar{\kappa}_a^{+1} \kappa_a^{+1'} - i\bar{\kappa}_a^{-1} \kappa_a^{-1'} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Б.3. Скобки Пуассона. Пуассонову структуру можно посчитать, например, из выражения для p (П.15). При этом получим

$$\begin{aligned} \{Z_a^b, (P_z)_c^d\}_P &= 2\delta_a^d \delta_c^b - \delta_a^b \delta_c^d, \\ \{w_\alpha, \bar{p}_{w_\beta}\}_P &= 2\delta_{\alpha\beta}, \quad \{\bar{w}_\alpha, p_{w_\beta}\}_P = 2\delta_{\alpha\beta}, \\ \{\chi_a^\alpha, i\bar{\chi}_\beta^b\}_P &= \delta_a^b \delta_\beta^\alpha, \quad \{\kappa_a^{+1}, i\bar{\kappa}_b^{+1}\}_P = \delta_{ab}, \quad \{\kappa_a^{-1}, i\bar{\kappa}_b^{-1}\}_P = \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Все остальные скобки равны нулю.

В терминах компонент матриц $Z \equiv z_i \sigma_i$ и $P_z \equiv P_{z_i} \sigma_i$ скобки Пуассона z_i с p_{z_i} принимают канонический вид:

$$\{z_i, p_{z_j}\}_P = \delta_{ij}, \quad \{y, p_y\}_P = 1. \quad (\text{П.17})$$

Обратим внимание на соглашение о виде скобок Пуассона комплексных полей. Они, строго говоря, не канонические, но выбраны так, что если переписать комплексные поля через вещественные компоненты $w = a + ib$ и $p_w = p_a + ip_b$, то скобки для полей a, b, p_a, p_b становятся каноническими $\{a, p_a\} = \{b, p_b\} = 1$, $\{a, b\} = \{p_a, p_b\} = 0$. Благодаря этому легко, например, узнать массы соответствующих полей после подстановки этих разложений в гамильтониан.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Геометрические

Известно, что предел Пенроуза есть разложение вблизи геодезической. Будем называть геодезические γ_1 и γ_2 эквивалентными, если γ_2 получается из γ_1 действием группы изометрии. Так как геодезическая задается решением дифференциального уравнения второго порядка, она определяется начальной точкой $\gamma(0)$ и скоростью $\dot{\gamma}(0)$. Очевидно, скорости $s\dot{\gamma}(0)$ определяют одну и ту же геодезическую для любого ненулевого s (единственная разница – в растяжении аффинного параметра геодезической). Таким образом, если G действует транзитивно на $\mathcal{M}$ и H действует транзитивно на $P(V_\perp)$ (P обозначает проективизацию), то все геодезические эквивалентны. В нашем случае $P(V_\perp) = \mathbb{RP}^5$. Более сильное условие состоит в том, чтобы вместо действия на $\mathbb{RP}^5$ H действовала транзитивно на S^5 , что может оказаться более удобным и, вероятно, выполняется во многих случаях. Можно перефразировать, сказав, что представление H на V должно быть неприводимым над $\mathbb{R}$. Например, так и происходит в нашем случае, так как V разлагается как $V_\perp = 3 \oplus \bar{3}$ над $\mathbb{C}$, но неприводимо над $\mathbb{R}$ относительно действия $H = U(3)$. С точки зрения приведенной выше аргументации $U(3)$ также действует транзитивно на S^5 , откуда следует, помимо прочего, возможность представить в виде фактор-пространства $U(3)/U(2) = S^5$ (и даже, сокращая $U(1)$ -множители, $SU(3)/SU(2) = S^5$).

Существует, однако, важное исключение, опущенное нами в приведенной выше аргументации. Это случай, когда геодезические “касаются” в некоторой точке $p \in \mathcal{M}$. Определение касания очевидно и означает, что они обе проходят через одну и ту же точку p и имеют в ней одинаково направленные векторы скорости (опять же с точностью до $\pm$, т.е. направления “вперед” и “назад” не различаются), т.е.

$\dot{\gamma}_1(p) \propto \dot{\gamma}_2(p)$. В этом случае решение дифференциального уравнения не определяется точкой p и скоростью в этой точке. Это вполне может произойти, так как для единственности решения дифференциальное уравнение должно иметь регулярную правую часть (предполагается, что система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид $\dot{y}_i = f_i(\{y_j\})$)⁴.

Мы считаем, что задача о геодезических на данный момент не вполне решена, по крайней мере нам не ясно, касаются ли какие-либо геодезические в $\mathbb{CP}^3$. Конечно, это можно проверить прямым вычислением, т. е. решением уравнения геодезической.

Благодарности. Я благодарен С. А. Фролову за постановку задачи и за многочисленные полезные обсуждения в ходе работы. Я также хочу поблагодарить Рио Сузуки за интересное обсуждение вопроса о геодезических в $\mathbb{CP}^3$ и Пера Сундина за несколько интересных обсуждений. Я также благодарен Г. Э. Арутюнову, Д. П. Сорокину и С. А. Фролову за внимательное чтение рукописи и за полезные комментарии, позволившие улучшить статью. Я признателен академику А. А. Славнову за постоянную поддержку и многочисленные обсуждения, а также Факультету математики Тринити Колледжа (Дублин, Ирландия), где была выполнена значительная часть настоящей работы. Работа над рукописью была завершена во время посещения мною школы “Алгебраические и комбинаторные структуры квантовой теории поля” (Каржез, Франция), и я благодарен организаторам за вдохновляющую атмосферу. Работа поддержана грантом Irish Research Council for Science, Education and Technology, частично РФФИ (гранты № 08-01-00281_а, 09-01-12150-офи_М) и частично Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1).

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2:2** (1998), 231–252; [arXiv: hep-th/9711200](#); *Internat. J. Theoret. Phys.*, **38:4** (1999), 1113–1133.
- [2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428:1–2** (1998), 105–114; [arXiv: hep-th/9802109](#).
- [3] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2:2** (1998), 253–291; [arXiv: hep-th/9802150](#).
- [4] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena, *JHEP*, **10** (2008), 091; [arXiv: 0806.1218](#).
- [5] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **09** (2008), 040; [arXiv: 0806.3951](#).
- [6] N. Gromov, P. Vieira, *JHEP*, **02** (2009), 040; [arXiv: 0807.0437](#).
- [7] N. Gromov, P. Vieira, *JHEP*, **01** (2009), 016; [arXiv: 0807.0777](#).
- [8] C. Ahn, R. I. Nepomechie, *JHEP*, **09** (2008), 010; [arXiv: 0807.1924](#).
- [9] G. Arutyunov, S. Frolov, *JHEP*, **09** (2008), 129; [arXiv: 0806.4940](#).
- [10] B. Stefański Jr., *Nucl. Phys. B*, **808:1–2** (2009), 80–87; [arXiv: 0806.4948](#).
- [11] T. McLoughlin, R. Roiban, *JHEP*, **12** (2008), 101; [arXiv: 0807.3965](#); L. F. Alday, G. Arutyunov, D. Bykov, *JHEP*, **11** (2008), 089; [arXiv: 0807.4400](#); C. Krishnan, *JHEP*, **09** (2008), 092; [arXiv: 0807.4561](#).
- [12] T. McLoughlin, R. Roiban, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **11** (2008), 069; [arXiv: 0809.4038](#).
- [13] T. Nishioka, T. Takayanagi, *JHEP*, **08** (2008), 001; [arXiv: 0806.3391](#).
- [14] K. Zarembo, *JHEP*, **04** (2009), 135; [arXiv: 0903.1747](#).

⁴) Для примера рассмотрим уравнение (напоминающее уравнение классического гигантского магнона) $z' = \sqrt{z}$ с начальным условием $z(0) = 0$. У такой задачи два решения: $z \equiv 0$ и $z = t^2/4$. Это связано с тем, что функция $d/dz(\text{r.h.s.}) = 1/(2\sqrt{z})$ не ограничена вблизи $z = 0$.

- [15] N. Beisert, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **12**:5 (2008), 945–979; [arXiv: hep-th/0511082](#).
- [16] J. Gomis, D. Sorokin, L. Wulff, *JHEP*, **03** (2009), 015; [arXiv: 0811.1566](#).
- [17] P. A. Grassi, D. Sorokin, L. Wulff, *JHEP*, **08** (2009), 060; [arXiv: 0903.5407](#).
- [18] G. Grignani, T. Harmark, M. Orselli, *Nucl. Phys. B*, **810**:1–2 (2009), 115–134; [arXiv: 0806.4959](#).
- [19] D. Astolfi, V. G. M. Puletti, G. Grignani, T. Harmark, M. Orselli, *Nucl. Phys. B*, **810**:1–2 (2009), 150–173; [arXiv: 0807.1527](#).
- [20] P. Sundin, *JHEP*, **02** (2009), 046; [arXiv: 0811.2775](#).
- [21] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Plefka, M. Zamaklar, *J. Phys. A*, **40**:13 (2007), 3583–3605; [arXiv: hep-th/0609157](#).
- [22] G. Arutyunov, S. Frolov, *J. Phys. A*, **42**:25 (2009), 254003; [arXiv: 0901.4937](#).
- [23] S. Frolov, J. Plefka, M. Zamaklar, *J. Phys. A*, **39**:41 (2006), 13037–13081; [arXiv: hep-th/0603008](#).
- [24] J. A. de Azcárraga, J. Lukierski, *Phys. Lett. B*, **113**:2 (1982), 170–174.
- [25] W. Siegel, *Phys. Lett. B*, **128**:6 (1983), 397–399.
- [26] M. B. Green, J. H. Schwarz, *Phys. Lett. B*, **136**:5–6 (1984), 367–370.
- [27] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory. V. 1: Introduction*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [28] B. de Wit, D. Z. Freedman, *Phys. Rev. D*, **12**:8 (1975), 2286–2297.
- [29] N. Beisert, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01017; [arXiv: nlin/0610017](#).
- [30] D. M. Hofman, J. M. Maldacena, *J. Phys. A*, **39**:41 (2006), 13095–13117; [arXiv: hep-th/0604135](#).

Поступила в редакцию 2.09.2009