Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Связанные состояния фермионов в поле
Ааронова–Бома в $2+1$ измерениях, *ТМФ*, 2010, том 163,
номер 1, 132–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:34:55

© 2010 г.

В. Р. Халилов*

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ ААРОНОВА–БОМА В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Найдены точные решения уравнения Дирака, описывающие связанные состояния фермиона в потенциале Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях с учетом спина частицы. Для этого построены самосопряженные расширения гамильтониана уравнения Дирака в потенциале Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях. Самосопряженные расширения являются однопараметрическими. Выделена область значений параметра самосопряженного расширения, в которой квантовые состояния фермионов связаны. Показано, что уровни энергии частиц и античастиц пересекаются. Так как решения уравнения Дирака в потенциале Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях описывают поведение релятивистских фермионов в поле космической струны в $3 + 1$ измерениях, полученные результаты, скорее всего, применимы для описания фермионов в поле космической струны.

Ключевые слова: спин, потенциал Ааронова–Бома, симметрический оператор, самосопряженный гамильтониан, связанное состояние, пересечение уровней.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Ааронова–Бома (АБ), предсказанный в статье [1] 50 лет назад, представляет собой одно из наиболее интересных и интригующих явлений квантовой механики. Этот эффект был разносторонне изучен в многочисленных работах (см. книгу [2] и ссылки в ней). Он возникает при движении электронов в области с нулевым магнитным полем, но с ненулевым векторным потенциалом A_μ ; магнитное поле потенциала целиком сосредоточено в цилиндрической трубке исчезающе малого радиуса. Чисто калибровочный векторный потенциал АБ производит наблюдаемые эффекты, так как относительная (калибровочно-инвариантная) фаза волновой функции электрона зависит от полного магнитного потока [3].

В цилиндрически-симметричной конфигурации внешнего поля квантово-механическая система, будучи инвариантной вдоль оси симметрии поля (оси z), становится существенно двумерной в плоскости (xy) [3]. Поэтому явления, имеющие место в системах заряженных фермионов в $3 + 1$ измерениях, можно исследовать с помощью уравнения Дирака в $2 + 1$ измерениях, что позволяет учитывать релятивистские

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: khalilov@phys.msu.ru

эффекты. Кроме того, эффективность редукции к $2 + 1$ измерениям связана с возможностью получения точных решений уравнения Дирака в $2 + 1$ измерениях в виде специальных функций для более широкого (по сравнению со случаем $3 + 1$ измерений) класса внешних полей, а также с использованием этих решений для описания других физических явлений. Так, в работах [4]–[7] было показано, что решения в потенциале АБ в $2 + 1$ измерениях являются решениями уравнения Дирака для фермионов в поле космической струны в $3 + 1$ измерениях. Отметим также, что точные решения уравнения Дирака в $2 + 1$ измерениях в потенциале АБ впервые были получены в работе [7], где, в частности, был рассмотрен процесс рождения частиц нестатическим полем движущейся космической струны.

Известно [8], что гамильтониан задачи АБ сингулярен и его нельзя задать сразу во всей области определения для любых дифференцируемых и достаточно быстро убывающих при $r \rightarrow \infty$ функций в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций. Обычно, в естественной области определения, гамильтонианы являются только симметрическими операторами. Поэтому возникает следующая задача: найти все самосопряженные расширения данного симметрического оператора и затем выделить корректное самосопряженное расширение. Корректность известных решений АБ была доказана в работе [8], где самосопряженный гамильтониан выделялся однозначно с помощью физического условия – “принципа минимальной сингулярности”, согласно которому область определения гамильтониана должна содержать только регулярные функции. В работе [4] впервые была решена задача построения самосопряженного дираковского гамильтониана в потенциале АБ в $2 + 1$ измерениях. В частности, в этой работе было показано, что область определения самосопряженного расширения гамильтониана может содержать наряду с регулярными и сингулярные квадратично-интегрируемые при $r = 0$ функции, а также было найдено формальное решение, описывающее связанное состояние фермиона в поле космической струны. Физической причиной включения в область определения самосопряженного расширения гамильтониана сингулярных функций, квадратично-интегрируемых при $r = 0$, является взаимодействие спинного магнитного момента электрона с магнитным полем соленоида. Это было показано в работе [9] на примере рассеяния обладающего аномальным магнитным моментом массивного нейтрального фермиона в электрическом поле прямой тонкой однородно заряженной нити (эффект Ааронова–Кашера [10]). Самосопряженные расширения гамильтонианов для уравнения Дирака в поле АБ, а также в суперпозиции этого поля и параллельного оси соленоида однородного магнитного поля построены в работах [11], [12].

Решения уравнения Дирака в $2 + 1$ измерениях представляют собой спинор, верхняя и нижняя компоненты которого интерпретируются соответственно как положительно- и отрицательно-частотные состояния. Для описания спина фермиона в работе [13] в двухкомпонентное уравнение Дирака был введен спиновый параметр, а содержащие этот параметр решения были использованы для вычисления амплитуды и поперечного сечения рассеяния электронов потенциалом АБ. Задача рассеяния спин-поляризованных электронов векторным потенциалом АБ с учетом магнитно-

го поля, заключенного в цилиндрическую трубку исчезающе малого радиуса, была рассмотрена в статье [14] с помощью уравнения Паули, так как это уравнение содержит член, описывающий взаимодействие спинного магнитного момента электрона с магнитным полем трубки. Возможность существования слабо связанных электронных состояний, обусловленных взаимодействием спинного магнитного момента электрона с магнитным полем бесконечно тонкого соленоида, обсуждалась в работе [15].

В настоящей статье мы изучаем влияние спина частицы на релятивистские связанные состояния фермиона в потенциале АБ с помощью уравнения Дирака со спинным параметром в $2 + 1$ измерениях. Следует подчеркнуть, что только в $2 + 1$ измерениях удастся исследовать влияние спина частицы и магнитного потока на устойчивость глубоких (релятивистских) связанных состояний. Как отмечалось выше, найденные решения описывают связанные релятивистские состояния фермионов в поле космической струны в $3 + 1$ измерениях. Поэтому полученные результаты, скорее всего, применимы для описания фермионов в поле космической струны.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ В ПОТЕНЦИАЛЕ АБ. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

Уравнение Дирака для фермиона массы m и заряда $e > 0$ в $2 + 1$ измерениях в векторном (A_μ) потенциале имеет вид

$$(\gamma^\mu P_\mu - m)\Psi = 0, \quad (1)$$

где $P_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu$ – оператор обобщенного момента фермиона, а матрицы Дирака γ^μ удобно определить через двумерные матрицы Паули:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = is\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2. \quad (2)$$

Здесь s – параметр [13], характеризующий два значения “проекция спина” электрона: $s = \pm 1$. Решения уравнения (1) в потенциале АБ

$$A^0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = \frac{B}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad (3)$$

будем искать в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iEt + il\varphi} \psi(r, \varphi), \quad (4)$$

где E – энергия фермиона, l – целое число, а $\psi(r, \varphi)$ – двухкомпонентная функция (т.е. спинор),

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r)e^{is\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Собственные значения оператора полного углового момента $J_z = L_z + s\sigma_3/2$, где $L_z = -i\partial/\partial\varphi$, являются сохраняющимися величинами. Очевидно, волновая

функция Ψ является собственной функцией оператора полного углового момента J_z с собственным значением $j = l + s/2$.

Радиальную часть оператора Гамильтона будем называть радиальным гамильтонианом. Им определяется радиальная часть решения уравнения Дирака:

$$h_r \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & s \frac{d}{dr} + \frac{l+\mu+s}{r} \\ -s \frac{d}{dr} + \frac{l+\mu}{r} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\mu = eB$. Видно, что радиальный гамильтониан h_r задачи АБ сингулярен в точке $r = 0$, и его нельзя определить сразу в области $[0, \infty)$ для любых дифференцируемых и достаточно быстро убывающих при $r \rightarrow \infty$ функций.

Далее, из-за существования конечного потока $\Phi = 2\pi B$ внутри соленоида при квадрировании уравнения (6) появляется дополнительный член, который описывает взаимодействие спинного магнитного момента частицы с магнитным полем соленоида

$$\mathbf{H} = (0, 0, H) = \nabla \times \mathbf{A} = B\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Отметим, что если $\mu = n$ – целое число, то полный магнитный поток $\Phi = 2\pi B$ квантован и $\Phi = \Phi_0 n$, где $\Phi_0 \equiv 2\pi/e$ – элементарная единица магнитного потока, “флюксоид”. Для космических струн, рассмотренных в статье [7], $\Phi = e/Q$, где Q – заряд Хиггса. Дополнительный (спиновый) потенциал

$$-seB \frac{\delta(r)}{r} \quad (8)$$

в квадрированном уравнении будем учитывать с помощью граничных условий.

Для нецелых μ регулярные в точке $r = 0$ решения уравнения (6) при $E^2 > m^2$ суть

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} J_\nu(pr) \\ \sqrt{E-m} J_{\nu+s}(pr) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где N – нормировочный коэффициент, $\nu = |l + \mu|$, $p = \sqrt{E^2 - m^2}$, $\nu + s > 0$, а J_ν – функция Бесселя. Сингулярные, но квадратично-интегрируемые в источнике (по мере $r dr$) функции Бесселя также являются допустимыми квантово-механическими решениями уравнения (6). Из физических соображений понятно, что сингулярное решение (очевидно, локализованное в источнике) появляется, если дополнительный потенциал (8) имеет характер притяжения.

Спиновый член инвариантен относительно преобразований $e \mapsto -e$, $s \mapsto -s$, поэтому достаточно рассмотреть только случай $e > 0$. Пусть в этом случае $\mu > 0$, тогда потенциал (8) является потенциалом притяжения для $s = 1$ и потенциалом отталкивания для $s = -1$. Следовательно, сингулярные (локализованные в точке $r = 0$) решения могут существовать, только если $\mu > 0$, $B > 0$, $s = 1$ (для частиц) или $\mu < 0$, $B > 0$, $s = -1$ (для античастиц). Записав соотношение $\mu = [\mu] + \gamma \equiv n + \gamma$, где $[\mu] \equiv n$ – целая часть, а $1 > \gamma > 0$, легко найти, что квадратично-интегрируемыми в источнике (по мере $r dr$) будут функции Бесселя с $l = -n - 1$, $n \geq 0$.

3. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА ГАМИЛЬТОНА

Математическая задача состоит в построении самосопряженных расширений гамильтониана h_r и последующем выделении некоторого расширения с помощью физических условий. Эта задача решена для симметрических операторов (см., например, монографии [16]–[18]) методом индексов дефектов, развитым фон Нейманом. В нашей задаче гамильтониан h_r будет симметрическим оператором, если для произвольных спиноров $f(r)$ и $g(r)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty g^\dagger(r) h_r f(r) r dr = \int_0^\infty [h_r g(r)]^\dagger f(r) r dr, \quad (10)$$

что для достаточно быстро убывающих на бесконечности спиноров приводит к граничному условию (см. работу [5])

$$\lim_{r \rightarrow 0} r g^\dagger(r) i \sigma_2 f(r) = 0. \quad (11)$$

Симметрический оператор h является самосопряженным, если его область определения $D(h)$ совпадает с областью определения сопряженного оператора. Так как дефектное подпространство может содержать сингулярные в источнике функции, сопряженный оператор имеет более широкую область определения. Поэтому естественно потребовать, чтобы и функции из области определения сопряженного оператора удовлетворяли граничному условию (11).

Пусть радиальный гамильтониан h_r из уравнения (6) имеет область определения $D(h_r)$ – множество абсолютно непрерывных функций, квадратично-интегрируемых на отрезке $[0, \infty)$ с мерой $r dr$, регулярных в точке $r = 0$. Построим дефектные подпространства $D^\pm$ сопряженного оператора $h_r^\dagger$ с собственными значениями $\pm im$ (величина m вставлена из соображений размерности):

$$h_r^\dagger f(r) \equiv \begin{bmatrix} m & s \frac{d}{dr} + \frac{l + \mu + s}{r} \\ -s \frac{d}{dr} + \frac{l + \mu}{r} & -m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1^\pm(r) \\ f_2^\pm(r) \end{pmatrix} = \pm im \begin{pmatrix} f_1^\pm(r) \\ f_2^\pm(r) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Тогда любое самосопряженное расширение гамильтониана h_r можно построить с помощью некоторого линейного оператора, изометрически отображающего D^+ на D^- . Это расширение можно фиксировать одним параметром θ : $f^+(r) \mapsto e^{i\theta} f^-(r)$.

Корректная область определения самосопряженного расширения h^θ оператора h_r есть

$$D(h^\theta) = D(h_r) + C[f^+(r) + e^{i\theta} f^-(r)], \quad (13)$$

где C – произвольная комплексная постоянная, а θ – произвольный (однако фиксированный для данного расширения) вещественный параметр. Решения уравнения (12) нетрудно получить в виде

$$\begin{pmatrix} f_1^\pm(r) \\ f_2^\pm(r) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} K_\nu(\sqrt{2}mr) \\ se^{\pm i\pi/4} K_{\nu+s}(\sqrt{2}mr) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где N – нормировочный коэффициент, а K_ν – функция Макдональда.

В нашей задаче, однако, проще использовать решения уравнения (12), положив $m = 0$ в операторе $h_r^\dagger$:

$$\begin{pmatrix} f_1^\pm(r) \\ f_2^\pm(r) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} K_\nu(mr) \\ se^{\mp i\pi/2} K_{\nu+s}(mr) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Квадратично-интегрируемыми в источнике (по мере $r dr$) будут функции с индексами $\gamma - 1$ (верхняя компонента спинора) и $-\gamma$ (нижняя компонента спинора). Параметризованные спиноры из дефектного подпространства в корректной области определения самосопряженного расширения (13) легко построить в простом виде

$$2Ce^{i\theta/2} \begin{pmatrix} K_{\gamma-1}(mr) \cos(\theta/2) \\ -sK_\gamma(mr) \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

С учетом формулы $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ и асимптотического поведения функции Макдональда $K_\nu(x) \cong 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)/x^\nu$ при $x \rightarrow 0$, где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция Эйлера, легко показать, что граничное условие (11) будет удовлетворяться для произвольного спинора с асимптотическим поведением

$$\lim_{mr \rightarrow 0} f(mr) \sim \begin{pmatrix} (mr)^{\gamma-1} \sin(\vartheta'/2) \\ -s(mr)^{-\gamma} \cos(\vartheta'/2) \end{pmatrix}, \quad 2\pi > \vartheta' > 0. \quad (17)$$

Отметим, что решения уравнения (12) можно выразить через другие цилиндрические функции, удовлетворяющие граничному условию (11).

Для нецелых μ сингулярные квадратично-интегрируемые в источнике (по мере $r dr$) решения уравнения (6) при $E^2 > m^2$ выражаются через спиноры:

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} J_{\gamma-1}(pr) \\ \sqrt{E-m} J_{-\gamma}(pr) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Стоит отметить, что данные решения принадлежат дефектному подпространству и удовлетворяют граничному условию (11).

4. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОТЕНЦИАЛЕ АБ

Для нецелых μ существуют формальные решения (6) с $m^2 > E^2$, описывающие связанное состояние фермиона со спином s :

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \sqrt{m+E} K_{\gamma-1}(kr) \\ s\sqrt{m-E} K_\gamma(kr) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где N – нормировочный коэффициент, $k = \sqrt{m^2 - E^2}$. Очевидно, связанное состояние фермиона существует, если $2\pi > \vartheta' > \pi$. Из (17) и (19) получаем трансцендентное уравнение, которое неявно определяет энергию связанного состояния фермиона:

$$\frac{(m+E)^\gamma}{(m-E)^{1-\gamma}} = -(2m)^{2\gamma-1} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2}. \quad (20)$$

Из соображений непрерывности состояния частиц (античастиц) – это состояния, которые при бесконечно медленном выключении внешнего поля примыкают к границе непрерывного спектра $E = m$ (соответственно к границе спектра $E = -m$); см., например, монографию [19]. Уравнением (20) можно описать две ветви энергий (частиц и античастиц). Для $\vartheta' = 3\pi/2$ эти ветви симметричны относительно горизонтальной прямой $E = 0$. Видно, что уравнение (20) в зависимости от параметра γ неявно определяет энергию связанного состояния частицы только в области значений $0 \leq E(\gamma) < m$ при $0 < \gamma \leq 1/2$, так как при $\gamma > 1/2$ уравнение (20) удовлетворяется только при отрицательных E . Заменяя (для удобства) в (20) E на $-E$, получим уравнение, которое неявно определяет отрицательную ветвь энергий связанного состояния (т.е. энергию античастицы) в области значений $0 \geq E(\gamma) > -m$ при $0 < \gamma \leq 1/2$. Таким образом, энергии связанного состояния частицы и античастицы в области $0 < \gamma \leq 1/2$ определяются выражением

$$\frac{1 \pm E/m}{(1 - E^2/m^2)^{1-\gamma}} = b, \quad b = 2^{2\gamma-1} \pi^{-1} \Gamma^2(\gamma) \sin \pi\gamma > 0. \quad (21)$$

Здесь энергии частицы (античастицы) соответствует верхний (нижний) знак в числителе этой формулы. Две кривые пересекают в точке $\gamma = 1/2$ горизонталь $E = 0$, так как при $\gamma = 1/2$ имеем $dE/d\gamma < 0$ для ветви положительных энергий и $dE/d\gamma > 0$ для ветви отрицательных энергий. Следовательно, при адиабатическом изменении параметра γ от 0 до $1/2$ энергетическая щель между связанными состояниями частиц и античастиц исчезает, и задача о поведении уровней энергий связанных состояний при $\gamma > 1/2$ не может быть решена в рамках одночастичной квантовой механики.

В заключение отметим, что слабо связанные электронные состояния в поле тонкого соленоида, локализованные в области с линейными размерами порядка 10^{-7} см, в принципе, возможны при энергии связи ~ 0.0025 эВ. Существование свободных локализованных в источнике состояний (обусловленных, как и связанные состояния, взаимодействием спинового магнитного момента электрона с магнитным полем тонкого соленоида), по-видимому, можно установить в экспериментах со спин-поляризованными электронами [14]. Существование глубоких (релятивистских) связанных состояний требует сверхсильных полей, способных локализовать частицу на расстояниях от источника, меньших чем ее комптоновская длина, поэтому релятивистские связанные состояния фермионов, вероятно, могут появиться только в сильных полях космических струн.

Благодарности. Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3312.2008.2).

Список литературы

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115** (1959), 485–491.
- [2] M. Peshkin, A. Tonomura, *The Aharonov–Bohm Effect*, Lecture Notes in Phys., **340**, Springer, Berlin, 1989.
- [3] К. Хуанг, *Кварки, лептоны и калибровочные поля*, Мир, М., 1985.

- [4] P. de Sousa Gerbert, R. Jackiw, *Comm. Math. Phys.*, **124**:2 (1989), 229–260.
- [5] P. de Sousa Gerbert, *Phys. Rev. D*, **40**:4 (1989), 1346–1349.
- [6] M. G. Alford, J. March-Pussel, F. Wilczek, *Nucl. Phys. B*, **328**:1 (1989), 140–158.
- [7] M. G. Alford, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:10 (1989), 1071–1074.
- [8] И. В. Тютин, *Рассеяние электронов соленоидом*, Препринт ФИАН № 27, 1974; [arXiv: 0801.2167](#).
- [9] В. Р. Халилов, И. В. Мамсуров, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 212–223.
- [10] Y. Aharonov, A. Casher, *Phys. Rev. Lett.*, **53**:4 (1984), 319–321.
- [11] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Smirnov, *Eur. Phys. J. C*, **32**:S1 (2004), 119–142; [arXiv: hep-th/0210312](#).
- [12] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Smirnov, B. L. Voronov, “Dirac fermions in a magnetic solenoid field”, *Focus on Mathematical Physics Research*, ed. C. V. Benton, Nova Sci., Hauppauge, NY, 2004, 131–168; [arXiv: hep-th/0308093](#).
- [13] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:5 (1990), 503–506.
- [14] V. R. Khalilov, C.-L. Ho, *Ann. Phys.*, **323**:5 (2008), 1280–1293; [arXiv: 0708.3131](#).
- [15] V. R. Khalilov, *Modern Phys. Lett. A*, **21**:21 (2006), 1647–1656.
- [16] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [17] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Справочно-математическая библиотека, Наука, М., 1972.
- [18] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [19] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.

Поступила в редакцию 10.09.2009