Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Игнатович, Рассеяние на магнитных нанопилин-драх и метод искаженных волн в неколлинеарных по-лях, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 140–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 07:49:04

© 2010 г.

В. К. Игнатович*

РАССЕЯНИЕ НА МАГНИТНЫХ НАНОЦИЛИНДРАХ И МЕТОД ИСКАЖЕННЫХ ВОЛН В НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ ПОЛЯХ

В рамках теории возмущений вычислено сечение рассеяния на магнитных наноцилиндре и геликоиде, произвольно ориентированных во внешнем магнитном поле. Впервые получена матричная функция Грина для двух сред с границей раздела и с неколлинеарными магнитными полями по обе стороны от границы. Показано, как рассчитать рассеяние на магнитных включениях в одной из сред.

Ключевые слова: нейтрон, магнитное рассеяние, функция Грина, наночастицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа вызвана необходимостью рассчитать рассеяние нейтронов в средах, содержащих магнитные включения (см., например, работы [1], [2]). При этом сами среды могут быть магнитными, а внешнее поле – неколлинеарным внутреннему. Для решения этой задачи необходимо пользоваться теорией возмущений по методу искаженных волн в борновском приближении, что требует построения матричной функции Грина, учитывающей и границу раздела, и неколлинеарность полей по обе стороны от нее. Мы показываем, как построить такую функцию в компактном виде и как с ее помощью рассчитать сечение рассеяния на магнитной неоднородности, имеющей вид наноцилиндра, включенного в одну из сред. Спинорная матричная функция Грина, приведенная в настоящей работе, получена впервые. До сих пор матричные функции Грина представляли в виде матриц (см., например, статью [3]), матричные элементы которых являются скалярными функциями Грина. Представление в компактном виде имеет то преимущество, что все амплитуды рассеяния можно находить тоже в матричном виде. Матричные элементы нужно вычислять только на последней стадии, чтобы рассматривать отдельно процессы рассеяния с переворотом и без переворота спина при любой заданной начальной поляризации нейтрона.

Наноцилиндры как объект для изучения интересны тем, что рассеяние на них содержит угловую асимметрию. Это показано в разделе 2, где рассмотрено рассеяние в первом борновском приближении на цилиндре, помещенном в однородное

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: v.ignatovi@gmail.com

поле. Угловая асимметрия возникает относительно плоскости, содержащей ось цилиндра и перпендикулярной той плоскости, в которой лежат внешнее поле и ось цилиндра. При этом асимметрия присутствует только у сечений рассеяния с переворотом спина. В разделе 3 рассмотрено рассеяние на конечном наногеликоиде, помещенном в однородное внешнее поле. Этот случай интересен тем, что в одном из сечений рассеяния с переворотом спина четко прослеживается резонанс при переданном импульсе, равном вектору геликоида. Раздел 4 посвящен построению матричной функции Грина для двух полупространств с неколлинеарными полями, и здесь же показано, как рассчитать сечения рассеяния для наноцилиндра, погруженного в одно из полупространств, при некоторых упрощающих предположениях. В заключении сформулированы полученные результаты.

2. РАССЕЯНИЕ НА ОТДЕЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим в рамках теории возмущений рассеяние нейтрона на цилиндре высоты $2H$ и радиуса a , намагниченном по окружности и имеющем компоненту B_{iz} намагниченности вдоль оси цилиндра, которую мы направим вдоль оси z и будем характеризовать единичным вектором $\mathbf{e}_z$. Внешнее поле B_0 направим вдоль произвольного единичного вектора $\mathbf{b}_0$. Чтобы рассчитать сечение рассеяния, воспользуемся золотым правилом Ферми, согласно которому вероятность рассеяния в единицу времени на любой системе равна

$$dw(\mathbf{k}_i, \xi_i \rightarrow \mathbf{k}_f, \xi_f; \lambda_i \rightarrow \lambda_f) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \lambda_f, \mathbf{k}_f, \xi_f | U | \lambda_i, \mathbf{k}_i, \xi_i \rangle|^2 \delta(E_{fk} + E_{f\lambda} - E_{ik} - E_{i\lambda}) \Gamma(E_{fk}), \quad (1)$$

где $|\mathbf{k}_i, \xi_i\rangle$, $|\lambda_i\rangle$ – начальные состояния нейтрона и системы, $|\mathbf{k}_f, \xi_f\rangle$, $|\lambda_f\rangle$ – конечные состояния нейтрона и системы с энергиями E_{ik} , $E_{i\lambda}$, E_{fk} , $E_{f\lambda}$ соответственно, U – потенциал взаимодействия, который мы задаем в виде

$$U = \left(\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi N_0 b - \boldsymbol{\mu} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma} \right) \Theta(-H < z < H) \Theta(0 < \rho < a), \quad (2)$$

где z , ρ – цилиндрические координаты, а Θ – ступенчатая функция, равная единице, когда неравенство в аргументе выполнено, и нулю в ином случае.

Золотое правило Ферми, вообще говоря, логически не состоятельно, не говоря уже о том, что справедливость его не доказана [4]. Однако в случае упругого рассеяния, которым мы будем заниматься, золотое правило является рецептом, приводящим более коротким путем к тем же результатам, что и теория возмущений со сферическими функциями. Именно поэтому мы им воспользуемся как широко применяемым стандартным рецептом.

Магнитное взаимодействие будем представлять в виде

$$\mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma} = B_{iz}(\rho, z) \sigma_z + (-\sigma_x \sin \varphi + \sigma_y \cos \varphi) B_\varphi(\rho, z),$$

т.е. учтем, что величина поля $\mathbf{B}_i$ может, вообще говоря, зависеть от координат z и ρ внутри цилиндра. Координатную ось x выберем в плоскости векторов $\mathbf{b}_o$ и $\mathbf{e}_z$ параллельно вектору $[\mathbf{e}_z[\mathbf{b}_o\mathbf{e}_z]] = \mathbf{b}_o - \mathbf{e}_z(\mathbf{b}_o\mathbf{e}_z)$.

Будем считать, что в процессе рассеяния состояние системы не меняется, поэтому выражение (1) приводится к виду

$$dw(\mathbf{k}_i, \xi_i \rightarrow \mathbf{k}_f, \xi_f) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathbf{k}_f, \xi_f | U | \mathbf{k}_i, \xi_i \rangle|^2 \delta(E_{fk} - E_{ik}) \Gamma(E_{fk}), \quad (3)$$

где $\Gamma(E_{fk}) = (L/2\pi)^3 d^3k_f$ – плотность конечных состояний нейтрона, $E_{jk} = \hbar^2 k_j^2 / 2m$, m – масса нейтрона, L – размер произвольной пространственной ячейки. Волновые функции нейтрона представляются в виде

$$|\mathbf{k}_{i,f}, \xi_{i,f}\rangle = \frac{1}{L^{3/2}} e^{j\mathbf{k}_{i,f}\mathbf{r}} |\xi_{i,f}\rangle,$$

где $\mathbf{k}_{i,f}$ и $|\xi_{i,f}\rangle$ – начальные и конечные значения импульса и спиновой поляризации нейтрона соответственно.

Плотность потока падающего нейтрона равна $J_i = \hbar k_i / mL^3$. Поделив (3) на J_i , получим сечение рассеяния:

$$\begin{aligned} d\sigma(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f, \xi_i \rightarrow \xi_f) &= \frac{1}{J_i} dw(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f, \xi_i \rightarrow \xi_f) = \\ &= \left| \frac{2mL^3}{4\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f, \xi_f | U | \mathbf{k}_i, \xi_i \rangle \right|^2 \frac{k_f}{k_i} d\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где мы можем учесть зеемановское расщепление во внешнем поле, т.е. зависимость $k_{i,f}$ от $|\xi_{i,f}\rangle$. Исходя из этого выражения можно ввести матричную амплитуду рассеяния

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f) = \frac{2mL^3}{4\pi\hbar^2} \hat{U}(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f) = \int_V \frac{d^3r}{4\pi} e^{-j\hat{\mathbf{k}}_f\mathbf{r}} (u + \mathbf{B}_i\boldsymbol{\sigma}) e^{j\hat{\mathbf{k}}_i\mathbf{r}}, \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{k}}_{i,f} = \mathbf{e}_{i,f}\hat{k}$, $\hat{k} = \sqrt{k^2 - \mathbf{B}_o\boldsymbol{\sigma}}$; $\mathbf{e}_{i,f}$ – единичные векторы, вдоль которых распространяется нейтрон до и после рассеяния, k – волновое число в вакууме, $u = 2mU/\hbar^2$, и все магнитные поля $\mathbf{B}$ включают в себя множитель $\gamma = 2m|\mu|/\hbar^2$.

Ось квантования естественно выбрать по направлению внешнего поля $\mathbf{b}_o$, поэтому начальные и конечные состояния спина нейтрона характеризуются спинорами $|\xi_i\rangle \equiv |l\rangle$, которые являются собственным для матрицы $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_o$: $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_o|l\rangle = (-1)^l|l\rangle$, причем $l = 0$ соответствует состоянию по полю $\mathbf{b}_o$, а $l = 1$ – состоянию против поля. Следовательно, $\hat{\mathbf{k}}|l\rangle = \sqrt{k^2 - (-1)^l B_o} |l\rangle$. Матричные элементы амплитуды (5) равны

$$\langle \xi_f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f) | i \rangle \equiv \langle f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | \xi_i \rangle = \int_V \frac{d^3r}{4\pi} e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}} [\delta_{if} u(\mathbf{r}) + \langle f | \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} | i \rangle], \quad (6)$$

где δ_{if} – символ Кронекера, а $\mathbf{q} = \mathbf{e}_i \sqrt{k^2 - (-1)^i B_o} - \mathbf{e}_f \sqrt{k^2 - (-1)^f B_o}$ – переданный импульс.

В последующем мы исключим $u(\mathbf{r})$ из рассмотрения, поскольку этот потенциал дает только рассеяние на малые углы, нечувствительное к проекции спина.

2.1. Рассеяние без переворота спина. Учтем, что для произвольного вектора $\mathbf{B}$ справедливо равенство [5] $\langle i | (\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}) | i \rangle = (-1)^i (\mathbf{B}\mathbf{b}_0)$, поэтому амплитуды рассеяния без переворота спина равны

$$\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle = \int_V \frac{d^3r}{4\pi} (-1)^i [b_{0z} B_{iz}(z, \rho) - b_{0x} \sin \varphi B_\varphi(z, \rho)] e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (7)$$

где V – объем цилиндра и $b_{0x} = \sqrt{1 - b_{0z}^2}$. Поскольку $e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}} = e^{jq_z z + j\mathbf{q}_\rho \boldsymbol{\rho}}$, а $\mathbf{q}_\rho \boldsymbol{\rho} = q_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_q)$, где φ_q – азимутальный угол вектора $\mathbf{q}_\rho$, учитывая, что

$$e^{jk \cos \varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} j^n J_n(k) e^{jn\varphi} = J_0(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} j^n J_n(k) \cos(n\varphi), \quad (8)$$

где

$$J_n(k) = \frac{1}{2\pi j^n} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{jk \cos \varphi - jn\varphi} = \frac{1}{j^n \pi} \int_0^{\pi} d\varphi e^{jk \cos \varphi} \cos(n\varphi) \quad (9)$$

– функция Бесселя, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right\} e^{jq_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_q)} = 2\pi j \left\{ \frac{\sin \varphi_q}{\cos \varphi_q} \right\} J_1(q_\rho \rho). \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle = \frac{(-1)^i}{2} \int_V \rho d\rho dz [b_{0z} B_{iz}(z, \rho) J_0(\rho q_\rho) - j b_{0x} \sin \varphi_q B_\varphi(z, \rho) J_1(\rho q_\rho)] e^{jq_z z}.$$

Если $\mathbf{B}_i$ зависит только от ρ , то

$$\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle = (-1)^i \frac{\sin(q_z H)}{q_z} \int_0^a \rho d\rho [b_{0z} B_{iz}(\rho) J_0(\rho q_\rho) - j b_{0x} \sin \varphi_q B_\varphi(\rho) J_1(\rho q_\rho)]. \quad (11)$$

Если поле $\mathbf{B}_i$ внутри цилиндра не зависит от координат, то вместо последнего равенства будем иметь

$$\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle = (-1)^i \frac{\sin(q_z H)}{q_z} \left(J_1(q_\rho a) \frac{a}{q_\rho} b_{0z} B_{iz} - j b_{0x} \sin \varphi_q \frac{B_\varphi}{q_\rho^2} F(a q_\rho) \right),$$

где мы воспользовались соотношением $\int_0^x dx' x' J_0(x') = x J_1(x)$ и положили

$$F(x) = \int_0^x dx' x' J_1(x'). \quad (12)$$

Из формул для амплитуд следует выражение для дифференциальных сечений без переворота спина:

$$\frac{d}{d\Omega} \sigma_{ii} = |\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 = \left| \frac{\sin(q_z H)}{q_z q_\rho^2} \right|^2 (|J_1(q_\rho a) a q_\rho b_{0z} B_{iz}|^2 + |b_{0x} \sin \varphi_q B_\varphi F(a q_\rho)|^2),$$

причем $k_f = k_i$. Если $H q_z \ll 1$, то

$$\frac{d}{d\Omega} \sigma_{ii} = \left| \frac{H}{q_\rho^2} \right|^2 (|J_1(q_\rho a) a q_\rho b_{0z} B_{iz}|^2 + |b_{0x} \sin \varphi_q B_\varphi F(a q_\rho)|^2).$$

2.2. Рассеяние с переворотом спина. Чтобы определить амплитуды рассеяния с переворотом спина представим состояния $|n\rangle$ в виде

$$|n\rangle = \frac{1 + (-1)^n \sigma \mathbf{b}_o}{\sqrt{2[1 + (-1)^n \mathbf{b}_o \mathbf{a}]}} |\xi_a\rangle,$$

где $\mathbf{a}$ – некоторый единичный вектор, а $|\xi_a\rangle$ – собственный спинор матрицы $\sigma \mathbf{a}$: $\sigma \mathbf{a} |\xi_a\rangle = |\xi_a\rangle$. В этом случае при $f \neq i$ имеем

$$\begin{aligned} \langle f | (\mathbf{B}\sigma) | i \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{1 - (\mathbf{a}\mathbf{b}_o)^2}} \langle \xi_a | [1 - (-1)^i \sigma \mathbf{b}_o] (\mathbf{B}\sigma) [1 + (-1)^i \sigma \mathbf{b}_o] | \xi_a \rangle = \\ &= \frac{\mathbf{a} [\mathbf{b}_o [\mathbf{B}\mathbf{b}_o]] + (-1)^i j \mathbf{a} [\mathbf{B}\mathbf{b}_o]}{\sqrt{1 - (\mathbf{a}\mathbf{b}_o)^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Это выражение можно также представить в виде $\langle f | (\mathbf{B}\sigma) | i \rangle = |[\mathbf{B}\mathbf{b}_o]| e^{(-1)^i j \chi}$, где

$$\chi = \arctg \left(\frac{\mathbf{a} [\mathbf{B}\mathbf{b}_o]}{\mathbf{a} [\mathbf{b}_o [\mathbf{B}\mathbf{b}_o]]} \right).$$

Поэтому при вычислении матричных элементов (13) можно пользоваться любым подходящим вектором $\mathbf{a}$.

Выберем $\mathbf{a} = \mathbf{e}_y$ (единичный вектор вдоль оси y). Тогда $\mathbf{a}\mathbf{b}_o = 0$ и (13) приводится к виду

$$\langle f | (\mathbf{B}\sigma) | i \rangle = B_y + (-1)^i j (B_{iz} b_{ox} - B_{ix} b_{oz}) = B_\varphi \cos \varphi + (-1)^i j (B_{iz} b_{ox} + b_{oz} B_\varphi \sin \varphi).$$

Амплитуда рассеяния с переворотом спина с учетом (8)–(10) равна

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle &= \int_V \frac{d^3 r}{4\pi} [(-1)^i j (B_{iz} b_{ox} + b_{oz} B_\varphi \sin \varphi) + B_\varphi \cos \varphi] e^{jq_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_q) + jq_z z} = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho d\rho dz [(-1)^i j b_{ox} B_{iz}(z, \rho) J_0(\rho q_\rho) + \\ &\quad + (-1)^i b_{oz} \sin \varphi_q + j \cos \varphi_q] B_\varphi(z, \rho) J_1(\rho q_\rho) e^{jq_z z}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае, когда поля в цилиндре не зависят от координат z и ρ , сечение рассеяния с переворотом спина равно

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \sigma_{fi} &= |\langle f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 \frac{k_f}{k_i} = \\ &= \left| \frac{\sin(q_z H)}{q_z q_\rho^2} \right|^2 (|J_1(q_\rho a) a q_\rho b_{ox} B_{iz} + (-1)^i \cos \varphi_q B_\varphi F(a q_\rho)|^2 + \\ &\quad + \sin^2 \varphi_q |b_{oz} B_\varphi F(a q_\rho)|^2) \frac{k_f}{k_i}, \end{aligned} \quad (15)$$

причем $k_l = \sqrt{k^2 - (-1)^l B_o}$, а функция $F(x)$ определена в (12).

Мы получили типичные формулы рассеяния на малые углы с переворотом спина и без переворота спина, но они содержат интересную особенность, связанную

с нетривиальной зависимостью от азимутального угла φ_q . Сечение рассеяния с переворотом спина имеет четко выраженную угловую асимметрию. Оно асимметрично относительно плоскости (y, z) . При этом асимметрия двух сечений с противоположным переворотом спина различается знаком. Если внешнее поле мало, то можно пренебречь различием k_0 и k_1 , тогда разность сечений с двумя противоположными поворотами спина равна

$$\begin{aligned} \Delta \frac{d}{d\Omega} \sigma_{fi} &= |\langle 1 | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | 0 \rangle|^2 - |\langle 0 | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | 1 \rangle|^2 \approx \\ &\approx 4 \left| \frac{\sin(q_z H)}{q_z q_p^2} \right|^2 \cos \varphi_q B_\varphi F(aq) J_1(qa) a q_\rho b_{ox} B_{iz}. \end{aligned} \quad (16)$$

2.3. Пример конкретного расчета. В работе [6] приведены аналитические зависимости распределения намагнитченности в диске малой толщины H :

$$\begin{aligned} B_{iz} &= B_i \begin{cases} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2}, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a, \end{cases} \\ B_\varphi &= \sqrt{B_i^2 - B_{iz}^2} = B_i \frac{2a\rho}{a^2 + \rho^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим рассеяние на таком диске для нейтрона с волновым вектором $\mathbf{k}_0 = k_0(0, 0, 1)$, параллельным оси диска. Будем считать, что внешнее поле B_0 мало и направлено под углом 45° по отношению к оси z . Угол рассеяния θ будем считать фиксированным, тогда компоненты вектора рассеяния $q_z = k_0(1 - \cos \theta)$ и $q_\rho = k_0 \sin \theta$ тоже фиксированы для обоих типов рассеяния, с переворотом и без переворота спина. При этом $\varphi_q = \varphi$ – азимутальный угол рассеяния относительно оси x , определенной, как указано выше.

Рассчитаем численно зависимость от φ всех сечений рассеяния, приведенных к безразмерной форме,

$$\bar{\sigma}_{fi} = \left| \frac{2q_z q_p^2}{\sin(q_z H) B_i^2 a^2} \right|^2 \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega}, \quad (17)$$

полагая, что радиус диска a имеет такую величину, что $k_0 a = 1$. Сечение без переворота спина согласно (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ii} &= \left| \int_0^{\sin \theta} dx x \frac{J_0(x)(1 - x^2)}{1 + x^2} \right|^2 + \sin^2 \varphi \left| \int_0^{\sin \theta} dx x \frac{2x J_1(x)}{1 + x^2} \right|^2 = \\ &= A^2(\theta) + B^2(\theta) \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (18)$$

а сечения с переворотом спина согласно (14) равны

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{fi} &= \left| \int_0^{\sin \theta} dx x \frac{(-1)^i (1 - x^2) J_0(x) + 2\sqrt{2} x J_1(x) \cos \varphi}{1 + x^2} \right|^2 + \\ &+ \sin^2 \varphi \left| \int_0^{\sin \theta} dx x \frac{2x J_1(x)}{1 + x^2} \right|^2 = \\ &= A^2(\theta) + B^2(\theta) + 2\sqrt{2} (-1)^i A(\theta) B(\theta) \cos \varphi + B^2(\theta) \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$A(\theta) = \int_0^{\sin \theta} dx x \frac{J_0(x)(1-x^2)}{1+x^2}, \quad B(\theta) = \int_0^{\sin \theta} dx x \frac{2xJ_1(x)}{1+x^2}. \quad (20)$$

Заметим, что сумма всех сечений, которая характеризует сечение рассеяния неполяризованных нейтронов, не зависит от угла φ . Согласно (17)–(20) сечение рассеяния неполяризованных нейтронов зависит только от угла рассеяния θ .

3. РАССЕЯНИЕ НА ОТДЕЛЬНОМ ГЕЛИКОИДЕ

Вместо магнитного цилиндра можно рассмотреть цилиндрический геликоид, магнитное поле которого равно

$$\mathbf{B}(z) = b_h \Theta(\rho < a) \Theta(0 < z < 2H) (\cos(pz - \varphi_0), \sin(pz - \varphi_0), 0),$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и введена некоторая, вообще говоря, произвольная фаза φ_0 . Матричные элементы амплитуды рассеяния геликоида определяются аналогично (6), и после интегрирования по ρ и φ они приводятся к виду (u полагаем равным нулю)

$$f_{fi} = \langle f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle = \frac{a}{q_\rho} J_1(q_\rho a) \int_0^{2H} \frac{dz}{2} \langle f | \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(z) | i \rangle e^{jq_z z}. \quad (21)$$

3.1. Рассеяние без переворота спина. Амплитуды рассеяния без переворота спина пропорциональны интегралу

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2H} \frac{dz}{2} \langle i | \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(z) | i \rangle e^{jq_z z} = (-1)^i \int_0^{2H} \frac{dz}{2} b_o \mathbf{B}(z) e^{jq_z z} = \\ &= (-1)^i b_{ox} b_h \int_0^{2H} \frac{dz}{2} \cos(pz - \varphi_0) e^{jq_z z}. \end{aligned} \quad (22)$$

После интегрирования получаем

$$I = (-1)^i \frac{b_{ox} b_h}{2} e^{jq_z H} \left(e^{-j\varphi_0 + jpH} \frac{\sin((q_z + p)H)}{q_z + p} + e^{j\varphi_0 - jpH} \frac{\sin((q_z - p)H)}{q_z - p} \right).$$

Соответственно, амплитуда рассеяния без переворота спина равна

$$\begin{aligned} f_{ii} &= \frac{a}{q_\rho} J_1(q_\rho a) I = (-1)^i \frac{a}{q_\rho} J_1(q_\rho a) \frac{b_{ox} b_h}{2} e^{jq_z H} \times \\ &\times \left(e^{-j\varphi_0 + jpH} \frac{\sin((q_z + p)H)}{q_z + p} + e^{j\varphi_0 - jpH} \frac{\sin((q_z - p)H)}{q_z - p} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

а сечение рассеяния без переворота спина имеет вид

$$\begin{aligned} |\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 &= \left| \frac{a}{q_\rho} \right|^2 |b_{ox} b_h J_1(q_\rho a)|^2 \left(\frac{\sin^2((q_z - p)H)}{(q_z - p)^2} + \frac{\sin^2((q_z + p)H)}{(q_z + p)^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\sin((q_z + p)H) \sin((q_z - p)H) \cos(2pH - 2\varphi_0)}{q_z^2 - p^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

В случае рассеяния на многих геликоидах с различными фазами φ_0 можно произвести усреднение по φ_0 , и усредненное сечение без переворота спина приводится к виду

$$\langle |\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 \rangle = \left| \frac{a}{q_\rho} \right|^2 |b_{ox} b_h J_1(q_\rho a)|^2 \left(\frac{\sin^2((q_z - p)H)}{(q_z - p)^2} + \frac{\sin^2((q_z + p)H)}{(q_z + p)^2} \right).$$

Сечение рассеяния максимально, когда $q_z = \pm p$. Тогда его можно приближенно записать как

$$\langle |\langle i | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 \rangle = \left| \frac{aH}{q_\rho} \right|^2 |b_{ox} b_h J_1(q_\rho a)|^2.$$

Заметим, что если $b_{ox} = 0$, то сечения рассеяния без переворота спина равны нулю.

3.2. Рассеяние с переворотом спина. Для простоты мы примем, что внешнее поле мало и можно пренебречь изменением энергии после переворота спина. Тогда амплитуды рассеяния с переворотом спина записываются в виде

$$\langle f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle = \frac{a}{q_\rho} J_1(q_\rho a) \int_0^{2H} \frac{dz}{2} \langle f | \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(z) | i \rangle e^{jq_z z}.$$

Воспользуемся выражением (13) и выберем вектор $\mathbf{a}$ параллельным оси y : $\mathbf{a} = \mathbf{e}_y$. Тогда

$$\langle f | (\mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}) | i \rangle = b_h \sin(pz - \varphi_0) - (-1)^i j b_{oz} b_h \cos(pz - \varphi_0).$$

Примем для простоты, что $b_{oz} = 1$, тогда

$$\langle f | (\mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}) | i \rangle = -(-1)^i j b_h e^{(-1)^i (jpz - j\varphi_0)},$$

амплитуда рассеяния равна

$$f_{fi} = \frac{a}{q_\rho} J_1(q_\rho a) e^{j[q_z + (-1)^i p]H - (-1)^i j\varphi_0} \frac{\sin((q_z + (-1)^i p)H)}{q_z + (-1)^i p}$$

и, соответственно,

$$|\langle f | \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 \frac{k_f}{k_i} = \left| \frac{a}{q_\rho} \right|^2 |b_h J_1(q_\rho a)|^2 \frac{\sin^2((q_z + (-1)^i p)H)}{(q_z + (-1)^i p)^2}. \quad (25)$$

Заметим, что если волновой вектор падающего нейтрона направлен по оси z , то $0 < q_z \leq 2k_0$, и рассеяние с переворотом спина имеет резонанс при $q_z = p$ для перехода $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$:

$$\frac{d\sigma_{01}}{d\Omega} = \left| \frac{a}{q_\rho} \right|^2 |b_h J_1(q_\rho a)|^2 \frac{\sin^2((q_z - p)H)}{(q_z - p)^2}. \quad (26)$$

Этот результат хорошо согласуется с резонансным характером отражения от магнитных зеркал с геликоидальной намагниченностью, обнаруженным в работах [7].

4. РАССЕЯНИЕ НА ОТДЕЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ, ПОГРУЖЕННОЙ В МАГНИТНУЮ СРЕДУ

Рассмотрим задачу рассеяния на магнитной неоднородности типа цилиндра или геликоида, погруженной внутрь вещества, находящегося в области $z > 0$, с потенциалом $\hbar^2 u/2m$ и внутренним магнитным полем $\mathbf{B}_i$. Внешнее поле, равное $\mathbf{B}_o$, неколлинеарно внутреннему, и граница раздела вещества совпадает с плоскостью $z = 0$. Рассеяние будем считать упругим, и для его описания будем решать стационарное уравнение Шредингера по теории возмущений с помощью функции Грина и с учетом границы раздела, т.е. методом искаженных волн, принимая во внимание неколлинеарность полей по обе стороны от границы раздела.

Уравнение Шредингера приводится к виду

$$[\Delta + k^2 - \Theta(z < 0)\mathbf{B}_o\boldsymbol{\sigma} - \Theta(z > 0)\{u + \mathbf{B}_i\boldsymbol{\sigma} + v(\mathbf{r})\}]\Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (27)$$

Здесь k^2 – полная энергия нейтрона, $v(\mathbf{r})$ – потенциал взаимодействия нейтрона с неоднородностью,

$$v(\mathbf{r}) = (\mathbf{B}_c\boldsymbol{\sigma} + \delta u)\Theta(z_1 - H < z < z_1 + H)\Theta(0 < \rho < a),$$

где в случае цилиндра

$$\mathbf{B}_c\boldsymbol{\sigma} = B_{cz}\sigma_z + (-\sigma_x \sin \varphi + \sigma_y \cos \varphi)\mathbf{B}_\varphi, \quad z_1 > H,$$

а δu – разность оптических потенциалов цилиндра и среды. Вклад δu в рассеяние достаточно тривиален, и потому в дальнейшем мы будем полагать, что $\delta u = 0$.

Решение уравнения (27) по теории возмущений равно $|\Psi(\mathbf{r})\rangle = |\psi(\mathbf{r})\rangle + |\delta\psi(\mathbf{r})\rangle$, где $|\psi(\mathbf{r})\rangle$ – решение при отсутствии потенциала $v(\mathbf{r})$. При отсутствии возмущения пространство вдоль границы раздела однородно, поэтому функцию $|\psi(\mathbf{r})\rangle$ можно представить в виде $|\psi(\mathbf{r})\rangle = e^{j\mathbf{k}_\parallel \mathbf{r}_\parallel} \hat{\phi}(z)|\xi\rangle$, где

$$\hat{\phi}(z) = \Theta(z < 0)[e^{j\hat{k}_z z} + e^{-j\hat{k}_z z}\hat{\mathbf{r}}(k_i)] + \Theta(z > 0)e^{j\hat{k}_z z}[\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{r}}(k)], \quad (28)$$

$\mathbf{k}_\parallel$ – проекция волнового вектора на границу раздела, $|\xi\rangle$ – произвольный спинор,

$$\hat{\mathbf{r}}(k_z) = (\hat{k}_z - \hat{k}'_z)^{-1}(\hat{k}_z + \hat{k}'_z), \quad \hat{k}_z = \sqrt{k_\perp^2 \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{B}_o\boldsymbol{\sigma}}, \quad \hat{k}'_z = \sqrt{(k_\perp^2 - u)\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{B}_i\boldsymbol{\sigma}},$$

$k_\perp^2 = k^2 - k_\parallel^2$, а $\hat{\mathbf{I}}$ – единичная матрица, которую мы часто будем опускать.

Поправка $|\delta\psi(\mathbf{r})\rangle$ описывает рассеяние нейтрона. Она задается с помощью матричной функции Грина $\hat{\mathbf{G}}$,

$$|\delta\psi(\mathbf{r})\rangle = \int d^3 r' \hat{\mathbf{G}}(k, \mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') |\psi(\mathbf{r}')\rangle, \quad (29)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + k^2 - \Theta(z < 0)\mathbf{B}_o\boldsymbol{\sigma} - \Theta(z > 0)(u + \mathbf{B}_i\boldsymbol{\sigma})]\hat{\mathbf{G}}(k, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (30)$$

Заметим, что функция Грина – это матрица, симметричная относительно координат $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, но симметрия эта состоит в том, что по координатам $\mathbf{r}'$ функция Грина удовлетворяет уравнению в обратном порядке:

$$\widehat{\mathbf{G}}(k, \mathbf{r}, \mathbf{r}') [\overleftarrow{\Delta'} + k^2 - \Theta(z < 0) \mathbf{B}_o \boldsymbol{\sigma} - \Theta(z > 0)(u + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma})] = \widehat{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (31)$$

где $\overleftarrow{\Delta'}$ – лапласиан, действующий на координаты $\mathbf{r}'$ справа налево. Покажем, как построить эту функцию несколько иным способом, чем это сделано в работе [3].

Поскольку вдоль поверхности раздела пространство в уравнении (30) однородно, функция Грина представима в виде

$$\widehat{\mathbf{G}}(k, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{j\mathbf{k}_{\parallel}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_{\parallel}} \widehat{\mathbf{G}}(k_{\perp}, z, z'),$$

где $k_{\perp} = \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2}$, а матричная функция $\widehat{\mathbf{G}}(p, z, z')$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\left(\frac{d^2}{dz^2} + p^2 \right) \widehat{\mathbf{I}} - \Theta(z < 0) \mathbf{B}_o \boldsymbol{\sigma} - \Theta(z > 0)(u \widehat{\mathbf{I}} + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma}) \right] \widehat{\mathbf{G}}(p, z, z') = \widehat{\mathbf{I}} \delta(z - z') \quad (32)$$

или уравнению

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{G}}(p, z, z') \left[\left(\frac{d^2}{dz'^2} + p^2 \right) \widehat{\mathbf{I}} - \Theta(z' < 0) \mathbf{B}_o \boldsymbol{\sigma} - \right. \\ \left. - \Theta(z' > 0)(u \widehat{\mathbf{I}} + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma}) \right] = \widehat{\mathbf{I}} \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (33)$$

Эта функция выражается через произведение двух линейно независимых матричных функций $\widehat{\phi}_{1,2}(z, p)$, которые удовлетворяют однородному уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + p^2 - \Theta(z < 0) \mathbf{B}_o \boldsymbol{\sigma} - \Theta(z > 0)(u + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma}) \right] \widehat{\phi}_{1,2}(z, p) = 0.$$

В качестве одной из них можно взять матрицу (28), а в качестве другой – матрицу

$$\widehat{\phi}_2(z, p) = \Theta(z > 0)[e^{-j\widehat{\mathbf{p}}'z} - e^{j\widehat{\mathbf{p}}'z} \widehat{\mathbf{r}}(p)] + \Theta(z < 0)e^{-j\widehat{\mathbf{p}}z}[1 - \widehat{\mathbf{r}}(p)],$$

где $\widehat{\mathbf{p}} = \sqrt{p^2 - \mathbf{B}_o \boldsymbol{\sigma}}$, $\widehat{\mathbf{p}}' = \sqrt{p^2 - u - \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma}}$. Эта матрица соответствует волне, падающей на границу раздела изнутри среды.

Матричная функция Грина $\widehat{\mathbf{G}}(p, z, z')$ задается в виде

$$\widehat{\mathbf{G}}(p, z, z') = \Theta(z > z') \widehat{\phi}_1(z, p) \widehat{\mathbf{w}}^{-1} \overleftarrow{\widehat{\phi}}_2(z', p) + \Theta(z < z') \widehat{\phi}_2(z, p) \widehat{\mathbf{w}}^{-1} \overleftarrow{\widehat{\phi}}_1(z', p), \quad (34)$$

где функции $\overleftarrow{\widehat{\phi}}_{1,2}(z', p)$ удовлетворяют уравнению

$$\overleftarrow{\widehat{\phi}}_{1,2}(z, p) \left[\frac{d^2}{dz'^2} + p^2 - \Theta(z < 0) \mathbf{B}_o \boldsymbol{\sigma} - \Theta(z > 0)(u + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\sigma}) \right] = 0 \quad (35)$$

и равны

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\phi}_1(z, p) &= \Theta(z < 0)[e^{j\hat{\mathbf{p}}z} + \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p)e^{-j\hat{\mathbf{p}}z}] + \Theta(z > 0)[\hat{\mathbf{I}} + \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p)]e^{j\hat{\mathbf{p}}'z}, \\ \overleftarrow{\phi}_2(z, p) &= \Theta(z > 0)[e^{-j\hat{\mathbf{p}}'z} - \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p)e^{j\hat{\mathbf{p}}'z}] + \Theta(z < 0)[\hat{\mathbf{I}} - \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p)]e^{-j\hat{\mathbf{p}}z},\end{aligned}$$

причем

$$\hat{\mathbf{w}}^{-1} = (2i\hat{\mathbf{p}})^{-1}[\hat{\mathbf{I}} - \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p)]^{-1}, \quad \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p) = (\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}')(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}')^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что матрица (34) действительно удовлетворяет уравнениям (32) и (33).

Подстановка (34) в (29) дает матричную поправку к волновой функции, описывающую рассеяние в вакууме:

$$\begin{aligned}\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^2p_{\parallel}}{2\pi} e^{j\mathbf{p}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel}} e^{-j\hat{\mathbf{p}}_{\perp}z} [\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}(p_{\perp})] \hat{\mathbf{w}}(p_{\perp})^{-1} [\hat{\mathbf{I}} + \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p_{\perp})] \times \\ &\quad \times \int \frac{d^3r'}{2\pi} e^{j\mathbf{q}_{\parallel}\mathbf{r}'_{\parallel}} e^{j\hat{\mathbf{p}}'_{\perp}z'} v(\mathbf{r}') e^{j\hat{\mathbf{k}}'_{\perp}z'} [\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{r}}(k_{\perp})] = \\ &= -i \int \frac{d^2p_{\parallel}}{2\pi} e^{j\mathbf{p}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel}} \hat{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}),\end{aligned}\tag{36}$$

где $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}$, $\hat{p}_{\perp} = \sqrt{p_{\perp}^2 - \sigma\mathbf{B}_0}$, $\hat{k}_{\perp} = \sqrt{k_{\perp}^2 - \sigma\mathbf{B}_0}$, $\hat{p}'_{\perp} = \sqrt{p_{\perp}^2 - u_0 - \sigma\mathbf{B}_i}$, $\hat{k}'_{\perp} = \sqrt{k_{\perp}^2 - u_0 - \sigma\mathbf{B}_i}$, $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{e}_z(\hat{p}'_{\perp} + \hat{k}'_{\perp})$ и $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z . Выражение (36) определяет матрицу

$$\hat{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{M}}_1(p_{\perp}) \hat{\mathbf{M}}_2(\hat{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{M}}_3(k_{\perp}),\tag{37}$$

равную произведению следующих матриц:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}}_1(p_{\perp}) &= e^{-j\hat{p}_{\perp}z} (\hat{p}_{\perp} + \hat{p}'_{\perp})^{-1}, \\ \hat{\mathbf{M}}_2(\hat{\mathbf{q}}) &= \int \frac{d^3r'}{2\pi} e^{j\mathbf{q}_{\parallel}\mathbf{r}'_{\parallel}} e^{j\hat{p}'_{\perp}z'} v(\mathbf{r}') e^{j\hat{k}'_{\perp}z'}, \\ \hat{\mathbf{M}}_3(k_{\perp}) &= (\hat{k}_{\perp} + \hat{k}'_{\perp})^{-1} \hat{k}_{\perp}.\end{aligned}\tag{38}$$

причем для вывода $\hat{\mathbf{M}}_1$ использовано легко проверяемое соотношение

$$[\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}(p_{\perp})] \hat{\mathbf{w}}(p_{\perp})^{-1} [\hat{\mathbf{I}} + \overleftarrow{\hat{\mathbf{r}}}(p_{\perp})] = -i(\hat{p}_{\perp} + \hat{p}'_{\perp})^{-1}.$$

Заметим, что полученная здесь матричная функция Грина (34) ранее в научной литературе не встречалась.

4.1. Матричные элементы. Матричные элементы волновой функции (36) и матрицы (37) рассчитываются с помощью матричных элементов матриц (38). Для расчета удобно, как и ранее, пользоваться состояниями $|i, j\rangle$, $i, j = 0, 1$, характеризующими поляризацию с осью квантования вдоль внешнего поля $\mathbf{B}_0$, и состояниями $|n, m\rangle$, $n, m = 0, 1$, характеризующими поляризацию с осью квантования вдоль внутреннего поля $\mathbf{B}_i$.

Вставив единичную матрицу $\widehat{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ между матрицами $\widehat{M}_1, \widehat{M}_2$ и $\widehat{M}_2, \widehat{M}_3$, получаем, что матричный элемент произведения матриц в (36) между начальным $|i\rangle$ и конечным $|f\rangle$ состояниями равен

$$\widehat{M}_{fi} \equiv \langle f|\widehat{M}|i\rangle = \sum_{n,m} \langle f|\widehat{M}_1(p_\perp)|n\rangle\langle n|\widehat{M}_2(\widehat{q})|m\rangle\langle m|\widehat{M}_3(k_\perp)|i\rangle. \quad (39)$$

С помощью соотношений (36) и (39) можно найти полное сечение рассеяния для заданного импульса $\mathbf{k}_i$ падающих нейтронов:

$$\sigma(\mathbf{k}_i) = \frac{-1}{2ik_{i\perp}} \int d^2r_\parallel \langle i|\delta\widehat{\psi}^*(\mathbf{r})|f\rangle \left[\frac{\overrightarrow{d}}{dz} - \frac{\overleftarrow{d}}{dz} \right] \langle f|\delta\widehat{\psi}(\mathbf{r})|i\rangle = k_f \int d\Omega \frac{k_{f\perp}^2}{k_{i\perp}} |\widehat{M}_{fi}|^2, \quad (40)$$

где $k_f = \sqrt{k_\parallel^2 + k_{f\perp}^2}$. Соответственно, дифференциальное сечение равно

$$\frac{d}{d\Omega} \sigma(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f) = k_f \frac{k_{f\perp}^2}{k_{i\perp}} |\widehat{M}_{fi}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|^2. \quad (41)$$

Множитель $k_f k_{f\perp}$ в (40) возникает в результате цепочки преобразований

$$d^2p_\parallel = 2p_\perp \delta(p^2 - k_f^2) d^3p = k_f k_{f\perp} d\Omega.$$

В дальнейшем мы будем полагать, что внешнее поле достаточно мало и можно пренебречь изменением кинетической энергии, возникающим после переворота спина, тогда $k_f = k_i = k_0$.

Для вычисления $\widehat{M}_{fi}$ необходимо согласно (39) вычислить матричные элементы $\widehat{M}_{1,2,3}$.

4.1.1. *Матричные элементы $\widehat{M}_1$.* Чтобы рассчитать элементы $\langle f|\widehat{M}_1(k_{f\perp})|n\rangle$ и $\langle m|\widehat{M}_3(k_{i\perp})|i\rangle$, запишем в явном виде зависимость матриц $\widehat{k}_{f\perp}, \widehat{k}'_{f\perp}$ от $\sigma\mathbf{B}_0$ и $\sigma\mathbf{B}_i$ и найдем $(\widehat{k}_{f\perp} + \widehat{k}'_{f\perp})^{-1}$ и, соответственно, $(\widehat{k}_{i\perp} + \widehat{k}'_{i\perp})^{-1}$:

$$\begin{aligned} (\widehat{k}_{f\perp} + \widehat{k}'_{f\perp})^{-1} &\equiv (\widehat{k}_{f\perp}(\sigma\mathbf{B}_0) + \widehat{k}'_{f\perp}(\sigma\mathbf{B}_i))^{-1} = \\ &= \frac{1}{N(k_{f\perp})} (\widehat{k}_{f\perp}(-\sigma\mathbf{B}_0) + \widehat{k}'_{f\perp}(-\sigma\mathbf{B}_i)), \end{aligned} \quad (42)$$

где в знаменателе стоит скалярная функция [5]

$$\begin{aligned} N(k_{f\perp}) &= (\widehat{k}_{f\perp}(-\sigma\mathbf{B}_0) + \widehat{k}'_{f\perp}(-\sigma\mathbf{B}_i))(\widehat{k}_{f\perp}(\sigma\mathbf{B}_0) + \widehat{k}'_{f\perp}(\sigma\mathbf{B}_i)) = \\ &= (k_{f\perp}(B_0) + k'_{f\perp}(B_i))(k_{f\perp}(-B_0) + k'_{f\perp}(-B_i)) + 2k_{f\perp}^- k_{f\perp}'^- [1 - \mathbf{b}_0\mathbf{b}_i], \\ k_{f\perp}^- &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{k_{f\perp}^2 - B_0} - \sqrt{k_{f\perp}^2 + B_0} \right], \\ k_{f\perp}'^- &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{k_{f\perp}^2 - u - B_i} - \sqrt{k_{f\perp}^2 - u + B_i} \right], \end{aligned}$$

и введены единичные векторы $\mathbf{b}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$ и $\mathbf{b}_i = \mathbf{B}_i/B_i$. В дальнейшем, простоты ради, мы примем, что поле B_0 мало и им всюду можно пренебречь. Тогда

$$(\widehat{k}_{f\perp} + \widehat{k}'_{f\perp})^{-1} = \frac{1}{k_{f\perp} + \widehat{k}'_{f\perp}(\sigma\mathbf{B}_i)}.$$

С учетом этого результата получаем

$$\langle f | \widehat{\mathbf{M}}_1(p_\perp) | n \rangle = \frac{1}{k_{f\perp} + k'_{fn\perp}} e^{-jk_{f\perp}z} \langle f || n \rangle, \quad (43)$$

где $k'_{fn\perp} = \sqrt{k_{f\perp}^2 - u - (-1)^n B_i}$. Таким образом, для окончательного вычисления матричного элемента (43) требуется найти произведение $\langle f || n \rangle$. Это произведение находится моментально, если оба состояния записать через реперное состояние $|a\rangle$, в котором единичный вектор a параллелен векторному произведению $[b_o b_i]$:

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (-1)^f (\sigma b_o)] |a\rangle, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (-1)^n (\sigma b_i)] |a\rangle. \quad (44)$$

Тогда

$$\langle f || n \rangle = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{f+n} \{ (b_o b_i) + j [b_o b_i] \}) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{f+n} e^{j\chi}), \quad (45)$$

где χ – угол между векторами b_o и b_i . Таким образом,

$$\langle f || n \rangle = e^{j\chi/2} \left[\delta_{fn} \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) - j(1 - \delta_{fn}) \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \right]. \quad (46)$$

4.1.2. Матричные элементы $\widehat{\mathbf{M}}_3$. Элементы матрицы $\widehat{\mathbf{M}}_3$ считаются аналогично $\widehat{\mathbf{M}}_1$, и мы сразу можем записать

$$\langle m | \widehat{\mathbf{M}}_3(k_\perp) | i \rangle = \frac{k_{i\perp}}{k_{i\perp} + k'_{im\perp}} \langle m || i \rangle, \quad (47)$$

где $k'_{im\perp} = \sqrt{k_{i\perp}^2 - u - (-1)^m B_i}$ и

$$\langle m || i \rangle = e^{j\chi/2} \left[\delta_{im} \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) - j(1 - \delta_{im}) \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \right]. \quad (48)$$

4.1.3. Матричные элементы $\widehat{\mathbf{M}}_2$. Элементы матрицы $\widehat{\mathbf{M}}_2$ представляются в виде интеграла Фурье от матричного элемента возмущения:

$$\langle n | \widehat{\mathbf{M}}_2(\hat{q}) | m \rangle = \int \frac{d^3 r'}{2\pi} e^{j\mathbf{q}_{nm} \mathbf{r}'_\parallel} \langle n | v(\mathbf{r}') | m \rangle, \quad (49)$$

где $\mathbf{q}_{nm} = \mathbf{q}_\parallel + \mathbf{e}_z q'_{nm\perp}$, $\mathbf{q}_\parallel = \mathbf{k}_{i\parallel} - \mathbf{k}_{f\parallel}$, $q'_{nm\perp} = p'_{n\perp} + k'_{m\perp}$, $p'_{n\perp} = \sqrt{k_{f\perp}^2 - u - (-1)^n B_i}$ и $k'_{m\perp} = \sqrt{k_{i\perp}^2 - u - (-1)^m B_i}$.

Для рассеяния на нанопилиндрах с полем B_c таким, что

$$v(\mathbf{r}) = B_c \sigma = (-\sigma_x \sin \varphi + \sigma_y \cos \varphi) B_\varphi(\rho) \Theta(z_1 - H \leq z \leq z_1 + H), \quad (50)$$

матричные элементы возмущения равны

$$\begin{aligned} \langle n | v(\mathbf{r}') | m \rangle &= \frac{1}{2} \langle a | [1 + (-1)^n \sigma b_i] (\sigma B_c) [1 + (-1)^m \sigma b_i] | a \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ (a B_c) [1 - (-1)^{m+n}] + [(-1)^n + (-1)^m] (b_i B_c) + \\ &\quad + j [(-1)^n - (-1)^m] (a [b_i B_c]) \}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{a} = [\mathbf{b}_o \mathbf{b}_i] / |[\mathbf{b}_o \mathbf{b}_i]| = \mathbf{e}_y$, мы имеем

$$(\mathbf{a} \mathbf{B}_c) = B_\varphi(\rho) \cos \varphi, \quad (\mathbf{a} [\mathbf{b}_i \mathbf{B}_c]) = -b_{iz} B_\varphi(\rho) \sin \varphi, \quad (\mathbf{b}_i \mathbf{B}_c) = -b_{ix} B_\varphi(\rho) \sin \varphi$$

и

$$\begin{aligned} \langle n | \widehat{\mathbf{M}}_2(\hat{\mathbf{q}}) | m \rangle &= D(q_{nm}) ([1 - (-1)^{m+n}] \cos \varphi_q - \\ &\quad - [(-1)^n + (-1)^m] b_{ix} \sin \varphi_q - j [(-1)^n - (-1)^m] b_{iz} \sin \varphi_q), \end{aligned} \quad (51)$$

где при малых H

$$\begin{aligned} D(q_{nm}) &= e^{jq_{nm\perp} z_1} \frac{\sin(q_{nm\perp} H)}{q_{nm\perp}} \int_0^a \rho d\rho J_1(\rho q_\rho) B_\varphi(\rho) \approx \\ &\approx e^{jq_{nm\perp} z_1} H \int_0^a \rho d\rho J_1(\rho q_\rho) B_\varphi(\rho). \end{aligned}$$

4.2. Сечения рассеяния. Рассмотрим частный случай рассеяния, когда $k_{f\perp} = k_{i\perp}$, следовательно, $\varphi_q = \varphi$. Введем безразмерное сечение

$$\bar{\sigma}_{fi} = |D(q_\rho)|^{-2} \frac{k_{i\perp}}{k_0} \frac{d}{d\Omega} \sigma(\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f). \quad (52)$$

Подставив в это выражение (39) с учетом (43), (47) и (51), получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{fi} &= \left| \sum_{n,m} \frac{2k_{i\perp}^2 \langle f || n \rangle \langle m || i \rangle}{(k_{i\perp} + k'_{in\perp})(k_{i\perp} + k'_{im\perp})} \times \right. \\ &\quad \left. \times \{ (1 - \delta_{mn}) [\cos \varphi - (-1)^n j b_{iz} \sin \varphi] - \delta_{mn} b_{ix} \sin \varphi \} \right|^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Для упрощения направим вектор $\mathbf{B}_i$ по оси z , тогда (51) примет вид

$$\langle n | \widehat{\mathbf{M}}_2(\hat{\mathbf{q}}) | m \rangle = D(q_{nm}) e^{-j(-1)^n \varphi} [1 - \delta_{mn}], \quad (54)$$

и сечение (53) будет равно

$$\bar{\sigma}_{fi} = \left| \sum_{n \neq m} \frac{2k_{i\perp}^2 \langle f || n \rangle e^{-j(-1)^n \varphi} \langle m || i \rangle}{(k_{i\perp} + k'_{in\perp})(k_{i\perp} + k'_{im\perp})} \right|^2. \quad (55)$$

Сечение без переворота спина с учетом (46) и (48) приводится к виду

$$\bar{\sigma}_{ii} = \left| \frac{2k_{i\perp}^2 \sin \chi \cos \varphi}{(k_{i\perp} + k'_{i0\perp})(k_{i\perp} + k'_{i1\perp})} \right|^2, \quad (56)$$

а сечение с переворотом спина – к виду

$$\bar{\sigma}_{fi} = \left| \frac{2k_{i\perp}^2}{(k_{i\perp} + k'_{i0\perp})(k_{i\perp} + k'_{i1\perp})} \right|^2 (\cos^2 \chi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi). \quad (57)$$

Видно, что при $\chi \rightarrow 0$ сечение рассеяния без переворота спина исчезает, а сечение с переворотом становится симметричным по φ .

В результате упрощающих предположений мы не получили асимметрию, аналогичную той, что видна в (19). Однако без этих предположений в случае, когда магнитное поле среды, содержащей наноцилиндр, не параллельно оси цилиндра, а магнитная индукция вдоль оси цилиндра отличается от окружающего поля, асимметрия проявилась бы в полной мере и коснулась бы не только процессов с переворотом спина, но и процессов без переворота спина.

4.3. Рассеяние на системе цилиндров. Если имеется система из многих цилиндров, каждый из которых характеризуется осью $\mathbf{n}_j$, своими размерами и величиной поля внутри него, то матричная амплитуда рассеяния N цилиндров равна

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^N e^{-j\hat{\mathbf{k}}_f \mathbf{r}_l} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{n}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f) e^{j\hat{\mathbf{k}}_i \mathbf{r}_l},$$

где $\mathbf{r}_l$ – положение центра l -го цилиндра, $\mathbf{n}_l$ – направление его оси, а матрица $\hat{\mathbf{f}}$ определяется выражением (5). Можно найти среднюю (когерентную) амплитуду $F_c(\mathbf{q}) = N\hat{\mathbf{f}}_c$, а также когерентное и некогерентное сечения рассеяния, которые определяются бинарными корреляционными функциями двух рассеивателей, которые, в свою очередь, определяются технологией приготовления образцов и внешним полем. Аналогичным образом учитываются корреляции и в методе искаженных волн в борновском приближении при наличии многих цилиндров внутри среды, внутреннее поле которой неколлинеарно внешнему.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главный результат настоящей работы – впервые построенная матричная функция Грина для исследования рассеяния на магнитных неоднородностях в магнитных средах с учетом границы раздела и неколлинеарности магнитных полей по обе стороны от нее. Показано, как с помощью такой функции можно рассчитать рассеяние на магнитном наноцилиндре. В случае однородного внешнего поля сечение рассеяния на наноцилиндре с переворотом спина имеет угловую асимметрию относительно плоскости, содержащей ось цилиндра и перпендикулярной плоскости, в которой лежит ось цилиндра и внешнее поле. При наличии границы раздела имеет место асимметрия относительно плоскости, которая определяется полем среды, содержащей наноцилиндр, но при неколлинеарности полей по обе стороны границы раздела она должна наблюдаться не только в сечении с переворотом спина, но и в сечении без переворота спина. Кроме наноцилиндра, рассмотрено также рассеяние на наногеликоиде и показано, что одно из сечений рассеяния с переворотом спина имеет резонанс, когда компонента вектора рассеяния вдоль оси геликоида равна вектору геликоида.

Благодарности. Автор благодарен Ю.В. Никитенко за обсуждение. Данная работа поддержана РФФИ (грант № 08-02-00467_a).

Список литературы

- [1] R. P. Cowburn, D. K. Koltsov, A. O. Adeyeye, M. E. Welland, D. M. Tricker, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:5 (1999), 1042–1045.
- [2] M. R. Fitzsimmons, S. D. Bader, J. A. Borchers, G. P. Felcher, J. K. Furdyna, A. Hoffmann, J. B. Kortright, I. K. Schuller, T. C. Schulthess, S. K. Sinha, M. F. Toney, D. Weller, S. Wolf, *J. Magn. Magn. Mater.*, **271**:1 (2004), 103–146.
- [3] А. В. Ведяев, М. Е. Журавлев, *ТМФ*, **148**:2 (2006), 179–188.
- [4] V. K. Ignatovich, *Concepts Phys.*, **1**:1–2 (2004), 51–103.
- [5] В. К. Игнатович, *Нейтронная оптика*, Наука, М., 2006.
- [6] M. Berciu, B. Jankó, *Phys. Rev. Lett.*, **90**:24 (2003), 246804.
- [7] В. Л. Аксенов, В. К. Игнатович, Ю. В. Никитенко, *Письма в ЖЭТФ*, **84**:9 (2006), 563–568; *Поверхность. Рентгеновские синхротронные и нейтронные исследования*, 2007, № 9, 40–48.

Поступила в редакцию 9.10.2009