Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Васин, Н. М. Щелкачёв, В. М. Винокур, Новый
подход к описанию кинетики стеклования, *ТМФ*, 2010,
том 163, номер 1, 163–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:51:31

© 2010 г. М. Г. Васин^{*†} Н. М. Щелкачёв^{†‡§}, В. М. Винокур[†]

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ КИНЕТИКИ СТЕКЛОВАНИЯ

С помощью техники функционального интеграла, обобщающей диаграммную технику Келдыша, описана кинетика стеклования. Показано, что келдышевский функциональный подход точно учитывает динамический детерминант, возникающий при описании динамики стекол, и обобщает традиционный подход, использующий метод суперсимметричного динамического производящего функционала. В отличие от суперсимметричного метода этот подход позволяет обойтись без дополнительных гравитационных полей и проследить нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы в явном виде. С помощью данного метода описана динамика модели типа мягкого спинового стекла Эдвардса–Андерсона вблизи перехода парамагнетик–стекло. Во флуктуационной области показано, что динамика типа Фогеля–Фульчера возникает только тогда, когда в репличном пространстве в процессе динамической перенормировки келдышевского действия нарушается флуктуационно-диссипативная теорема.

Ключевые слова: стеклование, неравновесные переходы, техника Келдыша.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие аналитических методов исследования сильно неравновесных процессов в неупорядоченных системах является актуальной задачей [1]. Проблема кинетики сильно неупорядоченных систем – наличие широкого спектра времен релаксации, что значительно усложняет написание каких-либо кинетических уравнений в связи с тем, что трудно произвести разделение масштабов на “быстрые” и “медленные”. Имеется еще стандартная для таких систем проблема с усреднением по беспорядку и по пространству состояний. Решаются эти проблемы разными способами. Наиболее общий подход основан на технике репличной суперсимметрии, когда динамические уравнения типа Ланжевена записываются в виде функционального интеграла

^{*}Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: dr_vasin@mail.ru

[†]Argonne National Laboratory, Argonne, USA

[‡]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Московская обл., Черноголовка, Россия

[§]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

с комплексными и грассмановыми полями, которые учитывают детерминант динамических уравнений (см., например, монографию [2]). К сожалению, этот подход не получил широкого распространения из-за нефизичности грассмановых полей и громоздкости метода. В результате обычно при решении большинства динамических задач используются численные методы, основанные на “приближении взаимодействующих мод” [2], [3], которое лишь в некоторых предельных случаях имеет обоснование (например, в рамках суперсимметричного метода [2], [4], [5]). Практически не существует аналитических решений кинетики стекольных систем, существенно выходящих за рамки приближения среднего поля. Нахождение аналитических непертурбативных решений кинетики стекольных систем остается фундаментальной задачей теории неравновесных систем.

Известно, что метод Келдыша в принципе описывает любую неравновесную систему [6], [7]. Можно попытаться адаптировать метод Келдыша к описанию кинетики сильно неупорядоченных систем типа спинового стекла. В настоящей работе с помощью техники функционального интеграла, обобщающей диаграммную технику Келдыша, описана кинетика стеклования. В отличие от суперсимметричного метода, этот подход позволяет обойтись без дополнительных грассмановых полей и проследить нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) в явном виде. С помощью данного метода описана кинетика модели типа мягкого спинового стекла Эдвардса–Андерсона и воспроизведены уравнения молекулярного поля для параметра порядка спинового стекла, которые раньше были получены методом суперсимметрии. Рассмотрена также динамика модели Эдвардса–Андерсона во флуктуационной области вблизи перехода парамагнетик–стекло. Традиционно при описании динамики реплики не рассматриваются [1]. Мы показали, что для (микроскопического) учета ультраметрии времен релаксации все же необходимо ввести реплики в динамику, в нашем случае – в келдышевскую технику. Существенной особенностью рассматриваемой теории и одним из ключевых результатов является появление в процессе перенормировки эффективных температур $T_{\alpha\beta}$, характеризующих состояния, в которых долины (реплики) α и β находятся в равновесии между собой. Только в случае, когда $\alpha = \beta$, ФДТ будет выполняться. Динамика типа Фогеля–Фульчера развивается тогда, когда в репличном пространстве в процессе динамической перенормировки келдышевского действия полностью нарушается ФДТ.

2. КЕЛДЫШЕВСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ

Покажем, как можно описать динамику спинового стекла с помощью функциональной техники Келдыша. Рассмотрим кинетику скалярного поля $m(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – пространственная координата.

Для того чтобы рассмотреть диссипативную динамику данной системы, поступим стандартным образом [7]: будем считать, что скалярное поле взаимодействует с тепловым резервуаром, например, в виде упругой струны $\phi(x)$. Тогда келдышевская статистическая сумма для этой системы может быть представлена в форме

функционального интеграла:

$$Z = \int Dm D\phi \exp \left\{ i \int_C dt \int d\mathbf{r} \left((\partial_t m)^2 - H[m] + \sqrt{\gamma} \int m (\partial_x \phi)_{x=0} \right) + i S_{\text{osc}}[\phi] \right\}, \quad (1)$$

где H – гамильтониан скалярного поля, C – келдышевский контур, S_{osc} – келдышевское действие струны, γ – константа взаимодействия нашей системы и теплового резервуара. Важно, что производящий функционал $Z = 1$ (в отсутствие внешних полей-источников, имеющих разное значение на верхней и нижней частях келдышевского контура), так как интегрирование по времени на верхней и нижней частях келдышевского контура производится в противоположных направлениях [7]. Это свойство позволяет усреднять Z по беспорядку, не вводя реплики.

Произведем келдышевский поворот переменных, введя так называемые “квантовые” и “классические” степени свободы, полуразность и полусумму значений m на верхней и на нижней частях контура соответственно, $\vec{m} = \{m^{(q)}, m^{(cl)}\}$. Проинтегрировав по степеням свободы, связанным с резервуаром, получим эффективное действие, описывающее диссипативную динамику нашей системы [6], [7]:

$$Z = \int D\vec{m} e^{i S_{\text{eff}}[m]}, \quad (2)$$

$$S_{\text{eff}} = \int dt d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \vec{m}^T \begin{pmatrix} 0 & \gamma \partial_t \\ -\gamma \partial_t & i 4 \gamma T \end{pmatrix} \vec{m} - H[m^{(cl)} + m^{(q)}] + H[m^{(cl)} - m^{(q)}] \right], \quad (3)$$

где T – температура термостата-струны. Данная техника позволяет описывать динамику любых, даже сильно неравновесных систем.

Функции Грина классических и квантовых переменных имеют стандартный [6] матричный вид:

$$G_{ab} = -i \langle m^a(t) m^b(t') \rangle = \begin{pmatrix} G^K & G^R \\ G^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где a и b – индексы классических и квантовых компонент, индексы R, A и K, как обычно, обозначают запаздывающую, опережающую и келдышевскую функции Грина соответственно. Мы рассматриваем классический предел келдышевской техники, и поэтому достаточно разложить H до первого порядка по $m^{(q)}$. Это аналогично методу динамического производящего функционала [8]–[11]. Можно показать, что седло действия (2) соответствует стандартному уравнению Ланжевена:

$$\frac{\gamma}{2} \partial_t m = - \frac{\delta H}{\delta m(\mathbf{r}, t)} + \xi(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r}', t') \rangle = \gamma T \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (6)$$

Ниже будет рассмотрено применение изложенной техники к исследованию ультраметрической динамики стекольных систем.

3. ДИНАМИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ МЯГКОЙ СПИНОВОЙ МОДЕЛИ МЕТОДОМ КЕЛДЫШЕВСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

3.1. Теория взаимодействующих мод. Гамильтониан, описывающий поле, в общем случае можно записать как $H[m] = \int dx \{U(m) + a_1 |\nabla m|^2 + \dots\}$, где многоточием обозначены остальные (нелокальные) члены по m с высшими градиентами. Для удобства расчетов рассмотрим решеточный вариант данной системы, так что $\mathbf{r}$ пробегает узлы некоторой решетки. Будем считать, что гамильтониан инвариантен относительно преобразования $m \rightarrow -m$. Тогда данный гамильтониан на решетке выглядит следующим образом:

$$H[m] = - \sum_{ik} J_{ik} m_i m_k + \sum_i U_i[m_i], \quad (7)$$

где J_{ik} ($J_{i=k} \equiv 0$) – некоторая симметричная матрица, описывающая нелокальные члены в гамильтониане (для простоты мы ограничиваемся вторым порядком по m при учете нелокальности). Локальные члены учтены в потенциальной энергии U .

Будем рассматривать систему вблизи состояния $\langle m \rangle = 0$, где усреднение подразумевает

$$\langle \dots \rangle = \int D\vec{m}(\dots) e^{iS_{\text{eff}}[m]}. \quad (8)$$

Здесь мы учли, что в отсутствие внешних “квантовых” полей $Z = 1$. Тогда U можно разложить по малым m :

$$U(m) = \frac{m^2}{2b} + \frac{um^4}{8}. \quad (9)$$

Данная модель часто применяется для описания магнетиков. Например, при $J > 0$ она будет описывать спиновую систему вблизи перехода парамагнетик–ферромагнетик.

В случае спинового стекла матрица J выбирается случайной знакопеременной величиной. Для определенности, как в модели Шеррингтона–Киркпатрика [12], будем считать, что матрица J принадлежит гауссовскому ортогональному ансамблю случайных матриц [13] с $\langle J_{ik} \rangle = 0$ и $\langle J_{ik}^2 \rangle = I_{ik}$. Для усреднения келдышевской статистической суммы по ансамблю случайных матриц необязательно вводить реплики, как в работах [12], так как в келдышевской технике $Z \equiv 1$ в отсутствие квантовых полей-источников, в отличие от статистической суммы в статистической механике. Это одно из преимуществ келдышевской техники по сравнению с методами статистической механики.

После усреднения по беспорядку получим

$$Z = \int Dm_i \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int_{t,t'} m_i^a(t) (G_{ab,ij}^{(0)})_{t,t'}^{-1} m_j^b(t') - \int_{t,t'} I_{ik} (\vec{m}_i^\tau \hat{\sigma}_x \vec{m}_k)_t (\vec{m}_i^\tau \hat{\sigma}_x \vec{m}_k)_{t'} - iu \int_t m_i^{(\text{cl})} m_i^{(\text{q})} (m_i^{(\text{cl})})^2 \right\}, \quad (10)$$

где матрица Паули $\hat{\sigma}_x$ действует в келдышевском пространстве; по повторяющимся индексам здесь и ниже предполагается суммирование. Затравочная обратная

функция Грина имеет вид

$$(G_{ab,ij}^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots^A \\ \dots^R & \dots^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\partial_t - 2/b \\ \gamma\partial_t - 2/b & i4\gamma T \end{pmatrix} \delta_{ij}. \quad (11)$$

В приближении среднего поля статистическую сумму можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z_{\text{mf}} &= \int Dm_i \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int_{t,t'} m_i^a(t) (G_{ab,ij}^{(0)})_{t-t'}^{-1} m_j^b(t') - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{t,t'} I_{ik} \langle m_i^a(t) m_i^c(t') \rangle m_k^b(t) m_k^d(t') \sigma_x^{ab} \sigma_x^{cd} + \dots \right\} = \\ &= \int Dm_i \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int_{t,t'} \vec{m}^\tau(t) (G_{ab})_{t-t'}^{-1} \vec{m}(t') \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где для упрощения иллюстрации метода мы оставили только диагональные средние аналогично тому, как это обычно делается в “среднем поле” (см., например, монографию [2]):

$$G_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\partial_t - 2/b - \Sigma^A \\ -\gamma\partial_t - 2/b - \Sigma^R & i4\gamma T - \Sigma^K \end{pmatrix}_{t,t'}. \quad (13)$$

Собственно-энергетические части равны соответственно

$$\Sigma^R = 4I_0 G^R(t) + i3u G^K(t=0) \delta(t-0) - 18u^2 G^R(t) [G^K(t)]^2, \quad (14)$$

$$\Sigma^A = 4I_0 G^A(t) + i3u G^K(t=0) \delta(t+0) - 18u^2 G^A(t) [G^K(t)]^2, \quad (15)$$

$$\Sigma^K = 4I_0 G^K - 18u^2 [G^K(t)]^3. \quad (16)$$

При выводе использовалось то, что

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_k I_{ik}, \quad G^R = G_0^R + G_0^R \Sigma^R G_0^R + \dots, \\ G^K &= G_0^K + G_0^R \Sigma^R G_0^K + G_0^K \Sigma^A G_0^A + G_0^R \Sigma^K G_0^A + \dots. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что Σ^K , Σ^R и Σ^A связаны ФДТ.

Получим теперь уравнения диссипативной динамики из действия (12). Для этого распарим с помощью процедуры Стратановича–Хаббарда [14] квадратичный член типа $\propto (m^{(q)})^2$ в действии (12):

$$\begin{aligned} \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int_{t,t'} m_t^{(q)} (i4\gamma T - \Sigma^K)_{tt'} m_{t'}^{(q)} \right\} &= \\ = \int D\xi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{tt'} \xi_t \left(\frac{1}{\gamma T + (1/4) \text{Im } \Sigma^K} \right)_{tt'} \xi_{t'} \right\} \exp \left\{ -i2 \int_t m_t^{(q)} \xi_t \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Проварьировав эффективное действие по “квантовому” полю $m^{(q)}$, получим следующее уравнение движения, обобщающее уравнение Ланжевена:

$$\frac{\gamma}{2} \partial_t m = -\frac{m_t}{b} - \int dt' \text{Re } \Sigma_{t-t'}^R m_{t'} + \xi(\mathbf{r}, t), \quad (18)$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r}', t') \rangle = \left(\gamma T \delta(t - t') + \frac{1}{4} (\text{Im } \Sigma^K)_{\mathbf{r}, |t-t'|} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (19)$$

Σ^K и Σ^R можно найти, используя процедуру самосогласования. Следует отметить, что полученное уравнение является частным случаем уравнений теории взаимодействующих мод. Таким образом, метод Келдыша – удобный способ обоснования этой теории.

3.2. Парамагнитная область. Будем работать в парамагнитной области. Тогда можно считать, что выполняется ФДТ. В технике Келдыша это означает [7], что

$$G_K(\omega) = \frac{2T}{\omega} \{G_R(\omega) - G_A(\omega)\}. \quad (20)$$

Аналогичные соотношения выполняются для обратных функций Грина и для собственно-энергетических частей Σ .

Удобно, следуя монографии [2], ввести параметр $g \equiv -TG^{R(A)}(\omega = 0)$, который определяет восприимчивость: $\chi(\omega = 0) = g/T$. Формально это можно проверить следующим образом: ввести в действие магнитное поле источников h с классическими и квантовыми компонентами, что даст добавку в действии вида $iS_h = \int_t \vec{m}^\tau \hat{\sigma}_x \vec{h}$. Тогда восприимчивость будет равна

$$\chi(t - t') = \frac{\delta^2 Z}{\delta h^{(cl)}(t) \delta h^{(q)}(t')} \Big|_{h=0} = i \langle m^{(cl)}(t) m^{(q)}(t') \rangle = -G^{(R)}(t - t'). \quad (21)$$

Используя (13), находим следующее уравнение для g , которое позволяет вычислить зависимость восприимчивости от температуры:

$$-\frac{g}{T} = G^{R(A)}(\omega = 0) = \frac{1}{-1/b - \Sigma^R(\omega = 0)}. \quad (22)$$

Для того чтобы это уравнение было замкнутым, найдем $\Sigma^R(\omega = 0)$, используя (14):

$$\Sigma^R(\omega = 0) = -4I_0 \frac{g}{T} - 6ug + 24u^2 \frac{g^3}{T}. \quad (23)$$

При выводе формулы (23) использовались функции Грина, найденные в реальном времени:

$$\begin{aligned} G_K(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} i 2 \text{Im } G_R(\omega) \frac{2T}{\omega} = \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} i 2 \text{Im } \frac{1}{i(\gamma/2)\omega - T/g} \frac{2T}{\omega} = 2ig e^{-2|t|T/\gamma g}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$G_R(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{i(\gamma/2)\omega - T/g} = -\frac{2}{\gamma} e^{-2tT/\gamma g} \theta(t), \quad (25)$$

$$\{G_R(t)[G_K(t)]^2\}_{\omega=0} = \int dt G_R(t)[G_K(t)]^2 = \frac{4g^3}{3T}. \quad (26)$$

Точные решения для G^K , G^R и G^A в явном виде найти трудно. Поэтому использовалось приближение, справедливое на малых частотах $\omega \ll T/(\gamma g)$:

$$G^R(\omega) = \frac{1}{i(\gamma/2)\omega - 1/b - \Sigma^R(\omega)} \approx \frac{1}{i(\gamma/2)\omega - 1/b - \Sigma^R(0)}. \quad (27)$$

В нулевом порядке по u и I_0 из уравнения (22) следует, что

$$\frac{T}{g} - b = 0. \quad (28)$$

Тогда восприимчивость $\chi = b$, что согласуется с теорией фазовых переходов второго рода [15] для парамагнитной области без беспорядка.

3.3. Область спинового стекла. В области спинового стекла ФДТ нарушается [2]. Покажем, как это можно учесть в технике Келдыша. Для этого добавим к функциям Грина из предыдущего раздела нарушающий ФДТ вклад G_s аналогично тому, как это делалось в технике суперсимметрии [2]. Тогда, например,

$$-TG_R^s = \frac{\alpha}{t} \Delta'(z) \theta(t) \xrightarrow{\text{Фурье}} \Delta(y) + i \frac{\pi\alpha}{2} \Delta'(y), \quad (29)$$

$$-TG_K^s = 2iq(z) \xrightarrow{\text{Фурье}} \frac{2\pi i}{|\omega|} q'(y), \quad (30)$$

где q и Δ – произвольные аналитические функции, $z = \alpha \ln(|t|/\tau)$, $y = -\alpha \ln(|\omega|\tau)$, $\alpha \ll 1$ – безразмерный параметр, который управляет скоростью релаксации, τ – эффективное время релаксации. Преобразования Фурье для q и Δ найдены в приложении. Ниже будет показано, что Δ выражается через q и играет роль параметра порядка стекла [16], [17].

Подставим выражения (29) и (30) в формулу (14) и найдем

$$\begin{aligned} \Sigma^R(\omega) = 4\beta I_0 \left\{ -g - \Delta(y) - i \frac{\pi\alpha}{2} \Delta'(y) \right\} + \\ + i6u(2ig - 2i\beta q(\infty)) - 18u^2 [G^R(t)[G^K(t)]^2]_\omega, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} [G^R(t)[G^K(t)]^2]_\omega \rightarrow \frac{g^3}{T} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{\alpha\gamma\Delta'(0)}{T\tau} - \frac{4\alpha\gamma\Delta'(0)q(0)}{gT^2\tau} + \frac{4q^2(0)}{Tg^2} - \frac{4q(0)}{gT} \right\} + \\ + \frac{4}{T^3} \int_0^{\Delta(y)+i(\pi\alpha/2)\Delta'(y)} q^2(\Delta) d\Delta. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь мы имеем возможность определить запаздывающую (опережающую) функцию Грина, используя соотношение (13):

$$-\frac{g + \Delta(y) + i(\pi\alpha/2)\Delta'(y)}{T} = G^{R(A)}(\omega) = \frac{1}{-1/b - \Sigma^R(\omega)}. \quad (33)$$

Дифференцируя это выражение по y , найдем

$$\left\{ 1 - (4\beta^2 I_0 + 64\beta^4 u^2 q(y)^2) \left[(\Delta(y) + g)^2 + \frac{(\pi\alpha\Delta'(y))^2}{4} \right] \right\} \Delta'(y) = 0. \quad (34)$$

Это уравнение связывает Δ и q . Можно показать, что оно эквивалентно уравнениям молекулярного поля для параметра порядка спинового стекла $\Delta(q)$ (см., например, обзор [2]).

4. УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕНОРМГРУППА

4.1. Ультраметрическая кинетика в окрестности температуры стеклования. Выше была рассмотрена полуфеноменологическая модель логарифмической динамики стекольного состояния, которая не учитывала явным образом ультраметрическую структуру времен релаксации системы и, вообще говоря, описывала стекло в рамках среднего поля (флуктуации параметра порядка не учитывались). Здесь мы рассмотрим флуктуационную область вблизи температуры T_g перехода парамагнетик–стекло. Рассмотрим, как и в предыдущей части нашей работы, модель мягкого спинового стекла (7)–(9) и учтем в ней ультраметрическую иерархию времен релаксации на микроскопическом уровне явным образом. Для этого необходимо ввести понятие долин в ультраметрическом пространстве состояний, которое математически выражается через реплики. Таким образом, нам придется соединить метод реплик с техникой Келдыша. Подчеркнем еще раз, что реплики нужны здесь не для “правильного” усреднения по беспорядку (в келдышевской технике нет этой проблемы, как указывалось выше), как в термодинамике, но для введения динамического ультраметрического пространства. Тогда модель можно переписать в следующем виде:

$$H_\alpha = - \sum_{ik} J_{\alpha ik} m_{\alpha i} m_{\alpha k} + \sum_i U(m_{\alpha i}), \quad (35)$$

$$U(m) = \frac{m^2}{2b} + \frac{um^4}{8}, \quad \langle J_{ik} \rangle = 0, \quad \langle J_{\alpha ik}(t) J_{\beta ik}(t') \rangle = I_0 \delta_{ik} \theta(|t - t'| - \tau_{\alpha\beta}),$$

где α – репличный индекс, показывающий, в какой долине локализована система, и $1/b \propto (T - T_g)/T_g$. Здесь мы ввели в модель динамические особенности неравновесной системы, налагая дополнительное условие на поле J [18]. Мы полагаем, что в некоторый начальный момент времени, когда состояния в двух различных долинах α и β не связаны между собой, усреднение по случайным реализациям поля J производится независимо для каждой долины, поэтому нет корреляции между J_α и J_β . Однако по истечении некоторого времени $\tau_{\alpha\beta}$, которое необходимо для того, чтобы долины пришли к равновесию, их состояния перестают быть независимыми, и усреднение по J становятся общим. Таким образом, коррелятор $\langle J_\alpha(t) J_\beta(t') \rangle = 0$, если время меньше некоторого характерного масштаба $\tau_{\alpha\beta}$, и $\langle J_\alpha(t) J_\beta(t') \rangle = I_0$ при $|t - t'| > \tau_{\alpha\beta}$. Характерный масштаб времени τ_{ab} определяется расстоянием $x_{\alpha\beta}$ между долинами α и β в ультраметрическом пространстве. Для простоты без ограничения общности можно выбрать эту зависимость в виде $\tau_{\alpha\beta} \sim e^{\sigma x_{\alpha\beta}}$ [2], где σ – некоторый параметр ультраметрического пространства.

В келдышевском представлении действие рассматриваемой модели имеет вид

$$Z = \int D\vec{m} DJe^{iS} = \int D\vec{m} DJe^{iS_m + iS_J + iS_{\text{int}}}, \quad (36)$$

где $D\vec{m} = \prod_{\alpha} d\vec{m}_{\alpha}$, в то время как J – случайное внешнее поле,

$$\begin{aligned} iS_m &= i \frac{1}{2} \int_t \vec{m}_{\alpha}^{\dagger}(t) G_{\alpha\beta}^{-1}(t-t') \vec{m}_{\beta}(t'), \\ iS_J &= i \frac{1}{2} \int_{t,t'} J_{\alpha}^{\dagger}(t) D_{\alpha\beta}^{-1}(t,t') J_{\beta}(t'), \end{aligned} \quad (37)$$

и

$$\begin{aligned} iS_{\text{int}} &= -i \int_t \sum_{\alpha} (H_{\alpha}[J, m^{(\text{cl})} + m^{(\text{q})}, t] - H_{\alpha}[J, m^{(\text{cl})} - m^{(\text{q})}, t]) = \\ &= -2i \int_t (2\rho J_{\alpha}(t) m_{\alpha}^{(\text{cl})} m_{\alpha}^{(\text{q})}) - iu \int_t m^{(\text{cl})} m^{(\text{q})} [(m^{(\text{cl})})^2 + (m^{(\text{q})})^2]. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь ρ – эффективный заряд, меняющийся в процессе перенормировки (без перенормировки $\rho \equiv 1$). В импульсном представлении корреляционные функции $G_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$ можно записать как

$$G_{\alpha\beta}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{i2\gamma T_{\alpha\beta}}{((\gamma/2)\omega)^2 + (k^2 + 1/b)^2} & \frac{\delta_{\alpha\beta}}{i(\gamma/2)\omega - k^2 - 1/b} \\ \frac{\delta_{\alpha\beta}}{-i(\gamma/2)\omega - k^2 - 1/b} & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$D_{\alpha\beta}(\omega) = I_0 \left[\pi i \delta(\omega) - i \frac{\sin(\omega \tau_{\alpha\beta})}{\omega} \right]. \quad (40)$$

Величина $T_{\alpha\beta}$ имеет смысл эффективной температуры, общей для долин α и β .

Легко видеть, что I -пропагатор

$$D_{\alpha\beta}(\omega) = D_{\alpha\beta}^{\text{s}}(\omega) + D_{\alpha\beta}^{\text{f}}(\omega) \quad (41)$$

состоит из двух частей – “быстрой” части

$$D_{\alpha\beta}^{\text{f}}(\omega) = -I_0 i \frac{2 \sin(\omega \tau_{\alpha\beta})}{\omega} \quad (42)$$

и “медленной” (стационарной)

$$D_{\alpha\beta}^{\text{s}}(\omega) = I_0 2\pi i \delta(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} I_0 i \frac{2 \sin(\omega \tau)}{\omega}. \quad (43)$$

В равновесном случае все долины объединены, поэтому $\tau_{\alpha\beta} = 0$, и в формуле (41) остается только стационарная часть. В этом случае перенормировка не нарушает ФДТ.

4.2. Процедура перенормировки. Перенормировка будет производиться в парамагнитной области $T > T_g$. Можно показать, что полученная теория является перенормируемой, и из структуры пропагатора (39) видно, что процедура перенормировки останавливается на масштабах частот $\gtrsim \omega_{\text{min}} = b/\gamma$. Для каждой пары реплик определена своя система уравнений ренормгруппы. Существенной особенностью рассматриваемой модели и одним из наших ключевых результатов является

а – пропагатор $\langle m^{(q)} m^{(cl)} \rangle$, б – пропагатор $\langle m^{(q)} m^{(q)} \rangle$, в – парная корреляционная функция полей J , г – графическое представление перенормировки вершины $m^{(cl)} m^{(cl)}$. Волнистыми линиями обозначены “медленные”, а прямыми – “быстрые” поля m .

введение эффективных температур $T_{\alpha\beta}$, характеризующих состояния, в которых долины α и β находятся в равновесии между собой. Выражение (39) в общем случае не удовлетворяет ФДТ. Только в случае, когда $\alpha = \beta$, т.е. система характеризуется одной температурой общего теплового резервуара, ФДТ будет выполняться. Если пренебречь недиагональной частью $T_{\alpha\beta}$, то действие окажется неперенормируемым.

Наибольший интерес представляет ренормировка келдышевской части функции Грина, которая делает ее недиагональной в репличном пространстве. В однопетлевом приближении ее ренормировка имеет графический вид, приведенный на рисунке. Присутствие θ -функции Хевисайда формально приводит к неавтономности уравнений ренормгруппы при $t \sim \tau_{\alpha\beta}$. Неавтономная ренормгруппа в последнее время довольно часто возникает в физических задачах (см., например, работы [18]–[21]). Отметим, что в двух предельных случаях $t \ll \tau_{\alpha\beta}$ и $t \gg \tau_{\alpha\beta}$ ренормгрупповые уравнения автономны. Физическое решение является сшивкой этих двух предельных случаев. Как правильно сделать эту сшивку, мы показываем ниже.

Ренормгрупповая система уравнений при $t \ll \tau_{\alpha\beta}$. На временных масштабах $t \ll \tau_{\alpha\beta}$, когда долины α и β являются статистически независимыми друг от друга, $\langle J_\alpha J_\beta \rangle = 0$, ренормгрупповая система уравнений рассматриваемой модели имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln(\gamma T_{\alpha\beta})}{d\xi} &= \frac{u^2 3}{4\pi}, \\
 \frac{d \ln(1/b)}{d\xi} &= 2 - \frac{3u}{4\pi}, \\
 \frac{d \ln(\varrho)}{d\xi} &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3u}{4\pi}, \\
 \frac{d \ln(u)}{d\xi} &= \varepsilon + \varrho^2 \frac{3}{4\pi} - u \frac{9}{4\pi},
 \end{aligned} \tag{44}$$

где $\xi = \ln(1/\lambda)$, $\varepsilon = 4 - d$ и λ – параметр обрезания по импульсам. Можно также считать, исходя из формулы (39), что $\lambda^2 \sim \Omega/\omega_{\min}$, где $\Omega \gg 1/\tau_{\alpha\beta}$ – верхняя частота. Выразим ξ через частоты: $\xi = 2 \ln(\Omega \tau_{\alpha\beta})$. Тогда данная система уравнений

справедлива в области $\xi \gtrsim 1$. Неавтономность общих уравнений не влияет на условие существования неподвижной точки ренормгруппы и, кроме того, это условие не зависит от предельного случая и может быть представлено в виде системы

$$\frac{d \ln(\varrho)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d \ln(u)}{d\xi} = 0,$$

из которой можно видеть, что $\varrho^* = 4\pi\varepsilon/9$, $u^* = \sqrt{4\pi\varepsilon/3}$. Поскольку вблизи перехода парамагнетик–стекло можно положить $1/b \sim (T - T_g)/T_g$, то

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \propto \left(\frac{T - T_g}{T_g}\right)^{1/2} = e^\xi.$$

В результате характерное время релаксации долин α и β ($\alpha \neq \beta$) имеет вид

$$\bar{\tau} \propto \gamma T_{\alpha\beta} \sim e^{\xi u^2 3/(4\pi)}. \quad (45)$$

Здесь мы воспользовались тем, что, аналогично случаю броуновского движения [22], эффективная “вязкость” пропорциональна $\gamma T_{\alpha\beta}$ и, в свою очередь, также пропорциональна времени релаксации (см., например, работу [1]). Обратим внимание, что перенормировка $T_{\alpha\beta}(\bar{\tau})$ оказывается не зависящей от репличных индексов в рассматриваемой области времен $t \ll \tau_{\alpha\beta}$, так как реплики в этом случае независимы. Ниже рассматривается противоположный случай $t \gg \tau_{\alpha\beta}$, где перенормировка $T_{\alpha\beta}$ существенно зависит от (репличных) индексов долин.

Ренормгрупповая система уравнений при $t \gg \tau_{\alpha\beta}$. Рассмотрим (произвольные) долины α и β . На временных масштабах $t \gg \tau_{\alpha\beta}$, соответствующих случаю, когда долины α и β приходят в равновесие между собой,

$$\langle J_\alpha J_\beta \rangle = I_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (46)$$

В этом случае ренормгрупповое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(\gamma T_{\alpha\beta})}{d\xi} &= I_0 \frac{\varrho^2}{2\pi} + \frac{u^2 3}{4\pi}, & \frac{d \ln(1/b)}{d\xi} &= 2 - \frac{3u}{4\pi}, \\ \frac{d \ln(\varrho)}{d\xi} &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3u}{4\pi}, & \frac{d \ln(u)}{d\xi} &= \varepsilon + \varrho^2 \frac{3}{4\pi} - u \frac{9}{4\pi}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $\ln(\omega_{\min} \tau_{\alpha\beta}) \lesssim \xi \lesssim 1$. Используя условие существования неподвижной точки, приходим к

$$\bar{\tau} = \gamma T_{\alpha\beta} \sim \exp\left(\left[I_0 \frac{\varrho^2}{2\pi} + \frac{u^2 3}{4\pi}\right] \xi\right). \quad (48)$$

Сшивку решений. Для того чтобы сшить полученные решения (45) и (48), нужно исследовать перенормировку в области $t \sim \tau_{\alpha\beta}$ и получить функцию сшивки $S(\xi)$ аналогично тому, как это было сделано в работах [18]–[20]:

$$\frac{d \ln(\gamma T_{\alpha\beta})}{d\xi} = I_0 \frac{\varrho^2}{2\pi} S(\xi) + \frac{u^2 3}{4\pi}, \quad (49)$$

где $\xi \sim 1$. Функция сшивки, принимающая значение 1 в случае больших временных масштабов $\xi \rightarrow \infty$, и 0 в случае малых временных масштабов $\xi \rightarrow 0$, имеет вид

$$S(\xi) = 1 - \lambda^z = 1 - e^{-z\xi}, \quad (50)$$

где $z \approx 2$ – динамический индекс [10], [11]. В результате

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &\sim \exp\left(\left(\frac{\varrho^2}{2\pi} + \frac{u^2 3}{4\pi}\right)\xi\right) \exp\left(\frac{\varrho^2}{2\pi^2 z} e^{-z\xi}\right) \sim \\ &\sim \left(\frac{T - T_g}{T_g}\right)^{(\varepsilon/6 + \pi\varepsilon^2/2)} \exp\left(\frac{\varepsilon}{3z\pi} \left(\frac{T_g}{T - T_g}\right)^{z/2}\right), \end{aligned} \quad (51)$$

где $\varepsilon = 4 - d$ для d -мерной системы. Полученная зависимость времени релаксации от температуры представляет собой частный случай соотношения Фогеля–Фульчера, которое в нашем случае было получено из микроскопических соображений с помощью келдышевской техники.

5. ВЫВОДЫ

Метод динамического производящего функционала (частный случай келдышевской техники) эквивалентен методу суперсимметрии и более предпочтителен для практического применения благодаря отсутствию нефизических грасмановых полей и, как следствие, большей прозрачности. С помощью данного метода описана кинетика модели типа мягкого спинового стекла Эдвардса–Андерсона. Показано, что для (микроскопического) учета ультраметрии времен релаксации необходимо ввести реплики в динамику, в нашем случае – в келдышевскую технику. Существенной особенностью рассматриваемой теории и одним из ключевых результатов является появление в процессе перенормировки эффективных температур $T_{\alpha\beta}$, характеризующих состояния, в которых долины (реплики) α и β находятся в равновесии между собой. Только в случае, когда $\alpha = \beta$, ФДТ будет выполняться.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем асимптотику следующих интегральных преобразований от функций $\Delta(z)$ и $q(z)$, про которые известно, что они аналитические вблизи $z = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \frac{1}{t} \Delta'(\ln(t)) \cos(\omega t) &= \\ &= \int_0^\infty dt \cos(\omega t) \frac{1}{t} \left[a_1 + a_2 \ln(t) + \frac{1}{2!} a_3 \ln^2(t) + \frac{1}{3!} a_4 \ln^3(t) - \dots \right] \approx \\ &\approx -a_1 \ln |\omega| + \frac{1}{2!} a_2 \ln^2 |\omega| - \frac{1}{3!} a_3 \ln^3 |\omega| + \frac{1}{4!} a_4 \ln^4 |\omega| - \dots = \Delta(-\ln |\omega|), \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

где предполагалось, что $|\ln \omega| \gg 1$. Аналогично

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dt \frac{1}{t} \Delta'(\ln(t)) \sin(\omega t) &= \\
 &= \int_0^\infty dt \sin(\omega t) \frac{1}{t} \left[a_1 + a_2 \ln(t) + \frac{1}{2} a_3 \ln^2(t) + \frac{1}{6} a_4 \ln^3(t) + \frac{1}{24} a_5 \ln^4(t) + \dots \right] \approx \\
 &\approx \frac{\pi}{2} \left\{ -a_2 \ln |\omega| + a_3 \frac{1}{2!} \ln^2 |\omega| - \frac{1}{3!} a_4 \ln^3(|\omega|) + \frac{1}{4!} a_5 \ln^4(|\omega|) + \dots \right\} = \\
 &= \frac{\pi}{2} \Delta'(-\ln |\omega|)
 \end{aligned} \tag{П.2}$$

и

$$\begin{aligned}
 \int dt q(\ln(t)) e^{i\omega t} &= \\
 &= 2 \int_0^\infty dt \cos(\omega t) \left[a_0 + a_1 \ln(t) + \frac{1}{2!} a_2 \ln^2(t) + \frac{1}{3!} a_3 \ln^3(t) + \frac{1}{4!} a_4 \ln^4(t) + \dots \right] \approx \\
 &\approx \frac{\pi}{|\omega|} \left\{ -a_1 + a_2 \ln |\omega| - a_3 \frac{1}{2!} \ln^2(|\omega|) + a_4 \frac{1}{3!} \ln^3(|\omega|) + \dots \right\} = \\
 &= \frac{\pi}{|\omega|} \{q'(-\ln \omega) - q'(0)\}.
 \end{aligned} \tag{П.3}$$

Существует простой, но не очень строгий способ получения выражений (П.1) и (П.2), основанный на том, что у запаздывающих функций Грина особенности в частотном пространстве всегда расположены в нижней полуплоскости [23]. Таким образом, особенность типа $1/t$ нужно на самом деле интерпретировать как $1/(t - i0)$, и

$$\begin{aligned}
 \int dt \frac{1}{t} \Delta'(\ln(t)) \theta(t) e^{i\omega t} &\rightarrow \int_0^\infty dt \frac{1}{t - i0} \Delta'(\ln(t)) e^{i\omega t} \rightarrow \\
 &\rightarrow P \int_0^\infty dt \frac{\alpha}{t} \Delta'(\ln(t)) e^{i\omega t} + i \frac{\pi}{2} \Delta'(-\ln |\omega|) \rightarrow \\
 &\rightarrow P \int_0^{t(-\ln |\omega|)} dt \frac{1}{t} \Delta'(\ln(t)) + i \frac{\pi}{2} \Delta'(-\ln |\omega|) \rightarrow \\
 &\rightarrow \int_{\Delta(0)}^{\Delta(-\ln |\omega|)} d\Delta + i \frac{\pi}{2} \Delta'(-\ln |\omega|) \rightarrow \\
 &\rightarrow \Delta(-\ln |\omega|) + i \frac{\pi}{2} \Delta'(-\ln |\omega|).
 \end{aligned} \tag{П.4}$$

Аналогично можно получить остальные интегральные преобразования.

Благодарности. Авторы благодарят В. Н. Рыжова и Е. Е. Тарееву за интерес, проявленный к работе, и стимулирующие обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 07-02-00998, 07-02-00110) и программы РАН “Квантовая физика конденсированных сред”.

Список литературы

- [1] L. F. Cugliandolo, *Dynamics of glassy systems*, [arXiv: cond-mat/0210312](#).
- [2] С. Л. Гинзбург, *Необратимые явления в стеновых стеклах*, Современные проблемы физики, **79**, Наука, М., 1989.
- [3] D. R. Reichman, P. Charbonneau, *J. Stat. Mech.*, **05** (2005), 05013.
- [4] G. Parisi, N. Sourlas, *Phys. Rev. Lett.*, **43**:11 (1979), 744–745.
- [5] J. Kurchan, *J. Phys. I (France)*, **2**:7 (1992), 1333–1352.
- [6] Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ*, **47**:5 (1964), 1515–1527.
- [7] A. Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems”, *Nanophysics: Coherence and Transport*, Volume Session LXXXI Lecture Notes of the Les Houches Summer School 2004, eds. H. Bouchiat, Y. Gefen, S. Gueron, G. Montambaux, J. Dalibard, Elsevier, Amsterdam, 2005, 177–246.
- [8] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437; C. De Dominicis, “Techniques de renormalisation de la theorie des champs et dynamique des phenomenes critiques”, *Hydrodynamique Physique et Instabilites (Physical Hydrodynamics and Instabilities)*, J. Phys. Colloques, **37**, Suppl. C1, 1976, C1-247–C1-253.
- [9] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 435–479.
- [10] М. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [11] А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, М., 1982.
- [12] D. Sherrington, S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.*, **35**:26 (1975), 1792–1796; S. Kirkpatrick, D. Sherrington, *Phys. Rev. B*, **17**:11 (1978), 4384–4403.
- [13] M. Mehta, *Random Matrices*, Pure Appl. Math., **142**, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [14] Р. Л. Стратонович, *ДАН СССР*, **115** (1957), 1097–1100; J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.*, **3**:2 (1959), 77–78.
- [15] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика*, Наука, М., 1976.
- [16] G. Parisi, *J. Phys. A*, **13**:3 (1980), 1101–1112.
- [17] G. Parisi, “Course 6: Glasses, replicas and all that”, *Slow Relaxations and Nonequilibrium Dynamics in Condensed Matter*, Houches, **77**, eds. J.-L. Barrat et al., Springer, Berlin–Heidelberg, 2004, 33–63; [arXiv: cond-mat/0301157](#).
- [18] М. Г. Васин, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 328–336.
- [19] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin, M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. B*, **61**:18 (2000), 12361–12388.
- [20] I. S. Beloborodov, A. V. Lopatin, G. Schwiete, V. M. Vinokur, *Phys. Rev. B*, **70**:7 (2004), 073404.
- [21] I. S. Burmistrov, N. M. Chtchelkatchev, *Phys. Rev. B*, **77**:19 (2008), 195319.
- [22] S. Chandrasekhar, *Rev. Modern Phys.*, **15** (1943), 1–89.
- [23] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, М., 1962.

Поступила в редакцию 18.08.2009