Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, В. В. Соколов, Интегрируемые $(2 + 1)$ -мерные системы гидродинамического типа, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 179–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:04:51

© 2010 г.

А. В. Одесский^{*†}, В. В. Соколов^{*}

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ $(2 + 1)$ -МЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Описаны результаты, полученные к настоящему времени в задаче классификации интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных систем гидродинамического типа. Наиболее фундаментальным объектом здесь являются системы Гиббонса–Царева (ГЦ-системы). С каждой такой системой связан целый класс интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных моделей. Приводятся известные ГЦ-системы, связанные с алгебраическими кривыми рода $g = 0$ и $g = 1$, а также новая ГЦ-система, соответствующая алгебраическим кривым рода $g = 2$. Построен широкий класс интегрируемых моделей, порожденных простейшей ГЦ-системой, которая в силу своей “тривиальности” выпала из рассмотрения в предыдущих работах.

Ключевые слова: бездисперсионные интегрируемые системы, гидродинамические редукции, системы Гиббонса–Царева.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	180
2. Метод гидродинамических редукций.....	184
3. ГЦ-системы.....	188
3.1. Примеры ГЦ-систем.....	188
3.2. Расширения ГЦ-систем.....	190
4. От ГЦ-систем к интегрируемым моделям.....	192
4.1. Семейства $(1 + 1)$ -мерных систем гидродинамического типа, ассоциированные с ГЦ-системой.....	192
4.2. Интегрируемые трехмерные системы, порожденные парой совместных семейств.....	195
5. Интегрируемые слабонелинейные $(2 + 1)$ -мерные системы.....	196
5.1. Случай общего положения.....	199
5.2. Вырождения.....	201

Статья написана по заказу Редколлегии

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: sokolov@itp.ac.ru

[†]Brock University, St. Catharines, Ontario, Canada. E-mail: aodesski@brocku.ca

6. Дискуссия: о классификации интегрируемых $(2+1)$ -мерных систем гидродинамического типа	202
Приложение А. Законы сохранения гидродинамического типа и интегрируемые квазилинейные уравнения второго порядка	205
Приложение Б. ГЦ-системы и псевдопотенциальное представление	207
Приложение В. О многомерных интегрируемых системах гидродинамического типа	210
Приложение Г. Классификация интегрируемых цепочек гидродинамического типа	213
Приложение Д. Список нерешенных задач	220

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемые системы играют важную роль как в физике, так и в математике. К сожалению, строгого универсального определения интегрируемости, пригодного для всех типов дифференциальных уравнений, не существует. Разные точки зрения на проблему интегрируемости описаны, например, в [1]–[4].

В настоящем обзоре рассматриваются системы вида

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^n c_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n+k$ и $k \geq 0$, а также уравнения, которые могут быть заменами приведены к такому виду. К последним относятся, например, квазилинейные уравнения

$$A_1 Z_{tt} + A_2 Z_{yt} + A_3 Z_{xt} + A_4 Z_{yy} + A_5 Z_{xy} + A_6 Z_{xx} = 0, \quad (2)$$

где $A_i = A_i(Z_x, Z_y, Z_t)$, и уравнения вида

$$F(Z_{tt}, Z_{yt}, Z_{xt}, Z_{yy}, Z_{xy}, Z_{xx}) = 0. \quad (3)$$

Здесь и далее мы используем обозначения $Z_x = \partial Z / \partial x$ и т.п. Для того чтобы включить в рассмотрение уравнения и системы типа (2), (3), нужно предположить, что число уравнений в системе (1) может превосходить число неизвестных, т.е. рассматривать случай $k > 0$.

Одно из фундаментальных свойств интегрируемых систем (1) состоит в наличии бездисперсионного представления нулевой кривизны [5], [6] (см. также [7]), или, что то же самое, *псевдопотенциального представления*. Это означает, что система (1) эквивалентна условиям совместности пары уравнений Гамильтона–Якоби вида

$$\Phi_y = A(\Phi_x, u_1, \dots, u_n), \quad \Phi_t = B(\Phi_x, u_1, \dots, u_n), \quad (4)$$

где $\Phi(x, y, t)$ – некоторая скалярная функция. В качестве примера рассмотрим систему

$$u_y = v_x, \quad v_y = u_t - u u_x. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что она допускает псевдопотенциальное представление

$$\Phi_y = \frac{\Phi_x^2}{2} + u, \quad \Phi_t = \frac{\Phi_x^3}{3} + u \Phi_x + v. \quad (6)$$

Исключая неизвестную v , систему (5) можно записать в виде уравнения

$$u_{yy} = (u_t - uu_x)_x,$$

которое известно как бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) или уравнение Хохлова–Заболотской.

Для некоторых интегрируемых моделей функции A и B в псевдопотенциальном представлении зависят от дополнительного спектрального параметра λ . Примером может служить бездисперсионное уравнение Хироты

$$a_1 Z_x Z_{yt} + a_2 Z_y Z_{xt} + a_3 Z_t Z_{xy} = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad (7)$$

обладающее псевдопотенциальным представлением

$$\Phi_y = -\frac{a_2 \lambda}{a_1 \lambda + a_3} \frac{Z_y}{Z_x} \Phi_x, \quad \Phi_t = \lambda \frac{Z_t}{Z_x} \Phi_x.$$

Как и в случае интегрируемых уравнений типа уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), зависимость от λ может быть полиномиальной, рациональной и т.д. Предполагая существование псевдопотенциального представления с предписанным характером зависимости от λ , можно строить примеры интегрируемых систем (1). При малых n можно также классифицировать системы, обладающие псевдопотенциальным представлением без спектрального параметра. Однако, поскольку существуют различные типы псевдопотенциального представления, его наличие трудно использовать в качестве универсального критерия интегрируемости для систем (1).

Часто интегрируемость системы (1) связывают также с ее представлением в виде условий коммутирования пары векторных полей [8]–[11], зависящих или не зависящих от спектрального параметра λ . В случае существования псевдопотенциального представления эти векторные поля являются гамильтоновыми. При этом, по-видимому, невозможно выбрать конструктивно описываемый класс векторных полей, покрывающий все известные примеры, и дать строгое универсальное определение интегрируемости, основанное на коммутировании векторных полей.

На наш взгляд, в настоящее время известно только одно свойство интегрируемых систем (1), которое может быть выбрано в качестве универсального, конструктивного критерия интегрируемости. Последнее означает, что оно не только может быть проверено для данной системы, но может также быть использовано для построения новых интегрируемых моделей и их полной классификации в малых размерностях.

Этот критерий интегрируемости состоит в наличии у системы (1) достаточного числа так называемых гидродинамических редукций. Понятие гидродинамической редукции возникло в работе [12], в которой были найдены редукции цепочки Бенни. Оказалось, что N -компонентные гидродинамические редукции описываются в терминах совместной переопределенной системы Гиббонса–Царева (ГЦ-системы)

$$\partial_i p_j = \frac{\partial_i u}{p_i - p_j}, \quad \partial_i \partial_j u = \frac{2 \partial_i u \partial_j u}{(p_i - p_j)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (8)$$

Здесь неизвестные функции $p_1, \dots, p_N, u$ зависят от некоторых переменных $r^1, \dots, r^N$ и $\partial_i = \partial / \partial r^i$. Та же система (8) возникает при описании гидродинамических редукций уравнения Хохлова–Заболотской.

В пионерских работах [13]–[15] было замечено, что наличие гидродинамических редукций может быть эффективно использовано для классификации интегрируемых систем (1). Ниже мы кратко перечислим основные классификационные результаты. Сам метод гидродинамических редукций описан в разделе 2.

В работе [14] рассматривалась задача классификации интегрируемых систем вида

$$v_t + av_x + pv_y + qw_y = 0, \quad w_t + bw_x + rv_y + sw_y = 0. \quad (9)$$

Была выписана система из 16 нелинейных уравнений в частных производных относительно неизвестных коэффициентов системы $a(v, w)$, $b(v, w)$, $p(v, w)$, $q(v, w)$, $r(v, w)$, $s(v, w)$, эквивалентная существованию гидродинамических редукций. Поскольку полученная система на коэффициенты находится в инволюции, с ее помощью можно изучать общие свойства интегрируемых систем (9). В частности, в работе [14] было доказано существование псевдопотенциального представления у всякой интегрируемой системы (9) и показано, что размерность пространства законов сохранения гидродинамического типа равна трем. Авторы нашли много частных решений системы для коэффициентов и, таким образом, построили новые примеры интегрируемых систем (9). Найти общее решение в явном виде авторам не удалось.

Легко проверить, что при $n = l = 2$ система (1) общего положения приводится к канонической форме (9) заменой координат вида

$$v = \psi_1(u_1, u_2), \quad w = \psi_2(u_1, u_2). \quad (10)$$

Однако фиксирование канонического вида (9) разрушает группу $GL(3)$, действующую на множестве интегрируемых систем (1) заменами независимых переменных

$$\bar{t} = k_{11}t + k_{12}x + k_{13}y, \quad \bar{y} = k_{21}t + k_{22}x + k_{23}y, \quad \bar{x} = k_{31}t + k_{32}x + k_{33}y. \quad (11)$$

Приводя действие этой группы к наиболее простому виду, Одесский [16] нашел другую каноническую форму, для которой система на коэффициенты решается явно в терминах обобщенных гипергеометрических функций.

Специальный подкласс интегрируемых уравнений (2), обладающих лагранжианом вида $\mathcal{L}(Z_t, Z_x, Z_y)$, рассматривался в работах [17], [18]. В работе [17] были получены необходимые и достаточные условия интегрируемости лагранжиана в виде переопределенной системы в частных производных для функции $\mathcal{L}$. При этом изучены общие свойства интегрируемых лагранжианов и построены новые примеры. Наиболее интересным является найденный в этой работе новый интегрируемый лагранжиан $\mathcal{L} = Z_t Z_x Z_y$. В статье [18] в терминах модулярных форм описаны интегрируемые лагранжианы общего положения.

В работе [19] рассматривалась общая задача классификации интегрируемых уравнений (2). Была выписана переопределенная система в инволюции на коэффициенты $A_i(Z_x, Z_y, Z_t)$, эквивалентная существованию гидродинамических редукций, исследованы общие свойства интегрируемых уравнений (2) и найдены новые примеры таких уравнений. Общее решение этой переопределенной системы было найдено в работе [20]. Оно зависит от пяти произвольных постоянных и после подходящей замены координат выражается через обобщенные гипергеометрические функции [21]

от трех переменных. Отметим, что множество интегрируемых уравнений (2) кроме пяти существенных параметров зависит еще от 15 параметров, порождаемых действием полной линейной группы преобразований переменных Z, x, t, y , относительно которой инвариантен класс уравнений (2).

Необходимые и достаточные условия интегрируемости для уравнений вида (3) были получены в работе [22]. Оказалось, что функция F не содержит существенных параметров. Кроме того, в работе [22] были найдены интересные классы частных решений системы для функции F . Общее решение в терминах обобщенных гипергеометрических функций было построено в [20].

В работах [23]–[25] рассматривалась задача классификации бесконечных интегрируемых дивергентных цепочек вида

$$u_{1t} = F_1(u_1, u_2)_x, \quad u_{2t} = F_2(u_1, u_2, u_3)_x, \quad \dots, \quad u_{it} = F_i(u_1, u_2, \dots, u_{i+1})_x, \quad \dots \quad (12)$$

В работе [23] под интегрируемостью понималось существование коммутирующего потока вида

$$u_{1y} = G_1(u_1, u_2, u_3)_x, \quad u_{2y} = G_2(u_1, u_2, u_3, u_4)_x, \quad \dots, \quad u_{iy} = G_i(u_1, u_2, \dots, u_{i+2})_x, \quad \dots \quad (13)$$

В работе [25] с помощью некоторого необходимого условия существования гидродинамических редукций (равенства нулю тензора Ханчеса) получена система уравнений на функции F_1, F_2 , выполнение которой необходимо для интегрируемости цепочки.

В описанных выше классификационных задачах интегрируемые модели “общего положения” кроме гидродинамических редукций обладают псевдопотенциальным представлением (4) без спектрального параметра. Все возникшие здесь псевдопотенциалы связаны с некоторыми рациональными кривыми. В работах Кричевера [26], [6] построен класс псевдопотенциалов со сколь угодно большим n , связанных с алгебраическими кривыми произвольного рода g . Можно проверить, что при $n = 2$ множество псевдопотенциалов Кричевера, соответствующих рациональной кривой, не покрывает все примеры, найденные при классификации систем (9).

В работе [27] в терминах гидродинамических редукций было дано определение интегрируемости псевдопотенциала и дано полное описание интегрируемых псевдопотенциалов при $n = 1$. Ответ формулируется в терминах гипергеометрических функций.

Большое число примеров, связанных с рациональной кривой, привело к задаче построения класса псевдопотенциалов с произвольным n , включающего в себя (может быть, как вырождения) все эти примеры. Такой класс псевдопотенциалов был построен в работах [16], [20]. Ответ записывается в терминах некоторого специального класса обобщенных гипергеометрических функций от n переменных и содержит $n + 2$ существенных параметра. В случае, когда все эти параметры являются целыми, ответ записывается в элементарных функциях. Задача явного описания вырождений этих потенциалов пока не решена. В работе [28] полученные результаты обобщены на случай эллиптической кривой. В ответе фигурируют обобщенные эллиптико-гипергеометрические функции [29]. По-видимому, возникший здесь класс эллиптико-гипергеометрических функций является новым.

В настоящем обзоре изложение основано на наиболее фундаментальном понятии метода гидродинамических редукций – ГЦ-системах. Хотя системы такого типа встречались раньше [30]–[34], строгое определение класса таких систем, их эквивалентности и т.д. (см. раздел 3) в литературе, по-видимому, отсутствует. Мы приводим известные ГЦ-системы, связанные с алгебраическими кривыми рода $g = 0$ и $g = 1$, а также новую ГЦ-систему, соответствующую алгебраическим кривым рода $g = 2$. С каждой ГЦ-системой связан целый класс интегрируемых $(2+1)$ -мерных моделей. В разделе 4 мы описываем в терминах теории ГЦ-систем результаты, полученные в работах [20], [28]. В разделе 5 мы строим новый широкий класс интегрируемых моделей, порожденных простейшей ГЦ-системой, которая в силу своей “тривиальности” выпала из рассмотрения в предыдущих работах. Эти системы обладают псевдопотенциальным представлением, рационально зависящим от спектрального параметра.

В разделе 6 мы делимся с читателем опытом, накопленным нами за несколько лет работы с интегрируемыми системами (1). Приложения А–Г посвящены соответственно законам сохранения, псевдопотенциалам, многомерным интегрируемым системам (1) и интегрируемым цепочкам. Приложение А существенно для понимания связи между интегрируемыми системами (1) и интегрируемыми моделями типа уравнений (2) и (3). В приложении Б, которое с нашей точки зрения является как теоретически, так и технически важным, описана связь между ГЦ-системами и псевдопотенциальным представлением без спектрального параметра. В приложении В содержатся примеры многомерных интегрируемых систем гидродинамического типа и кратко обсуждается обобщение понятия ГЦ-системы на многомерный случай. Приложение Г посвящено задаче классификации произвольных (не обязательно дивергентных) цепочек гидродинамического типа сдвига 1. Кроме того, в приложении Г приводятся примеры интегрируемых многомерных цепочек. В приложении Д мы приводим список нерешенных задач.

2. МЕТОД ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕДУКЦИЙ

Хорошо известно, что интегрируемые двумерные уравнения вида

$$u_t = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) \quad (14)$$

типа уравнения КдФ обладают для любого N семействами точных решений, зависящих от произвольных постоянных $c_1, \dots, c_N$. Все эти конечнозонные и солитонные решения могут быть построены с помощью так называемых ОДУ-редукций. Пара совместных N -компонентных систем ОДУ

$$r_x^i = f^i(r^1, \dots, r^N), \quad r_t^i = g^i(r^1, \dots, r^N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (15)$$

называется N -компонентной ОДУ-редукцией для уравнения (14), если существует функция $U(r^1, \dots, r^N)$ такая, что $u = U(r^1(x, t), \dots, r^N(x, t))$ удовлетворяет (14) для любого решения $r^1(x, t), \dots, r^N(x, t)$ системы (15). Ясно, что решение u зависит от N произвольных параметров, которыми являются начальные значения для системы (15) в точке общего положения. Существование некоторых специальных

классов ОДУ-редукций с произвольным N может быть выбрано в качестве критерия интегрируемости для уравнения (14). Например, можно предположить, что уравнение (14) допускает последовательность дифференциальных связей вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = G_m \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}} \right),$$

где m произвольно. Ясно, что уравнение (14) и такая дифференциальная связь могут быть переписаны как пара совместных динамических систем по переменным x и t . Другой пример ОДУ-редукций дают уравнения Дубровина для нулей функции Бейкера–Ахиезера в теории уравнения КдФ. Однако в двумерном случае существуют гораздо более эффективные и конструктивные критерии интегрируемости. Например, таким критерием является существование высших локальных коммутирующих потоков (высших инфинитезимальных симметрий) или высших законов сохранения (см. [35] и ссылки там).

Если число независимых переменных $d > 2$, то высшие локальные симметрии и/или локальные законы сохранения для интегрируемых моделей не существуют (по поводу обобщения симметричного подхода на случай нелокальных симметрий см. [36]). В такой ситуации существование N -компонентных редукций может рассматриваться как один из наиболее перспективных подходов для поиска новых интегрируемых моделей. Отметим, что в качестве редукций вместо ОДУ-редукций должны рассматриваться некоторые совместные системы уравнений в частных производных размерности не выше $d - 1$.

В работе [13] такой подход был применен к системам вида (1). В качестве редукций были выбраны пары совместных полугамильтоновых (см. определение 1 ниже) систем гидродинамического типа

$$r_t^i = \lambda^i(r^1, \dots, r^N) r_x^i, \quad r_y^i = \mu^i(r^1, \dots, r^N) r_x^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Согласно определению редукции соответствующие решения системы (1) задаются некоторыми функциями $u^i(r^1, \dots, r^N)$, $i = 1, \dots, n$, переводящими любое решение системы (16) в решение (1). В гидродинамике такие решения описывают взаимодействие N плоских волн. Иногда их называют N -фазными решениями.

Ясно, что общее решение совместной переопределенной системы вида (16) содержит N произвольных функций одной переменной. Оказывается, что функции λ^i , μ^i в редукции (16) могут содержать как функциональные параметры дополнительные функции одной переменной и число таких функций не превышает N . В работе [13] существование гидродинамических редукций (16), локально параметризованных N функциями одной переменной, где N произвольно, было предложено в качестве критерия интегрируемости для систем вида (1). Соответствующие N -фазные решения зависят от $2N$ произвольных функций одной переменной.

Подход, основанный на гидродинамических редукциях, является универсальным. Это означает, что все известные к настоящему моменту интегрируемые системы (1) обладают гидродинамическими редукциями. Все понятия этого подхода могут быть строго определены (см. ниже). Как было продемонстрировано в [13], существование гидродинамических редукций может быть алгоритмически проверено и, более того, может быть эффективно использовано для классификации интегрируемых случаев.

Напомним определения и основные понятия метода гидродинамических редукций. Хотя по существу они совпадают с использованными в работе [13], имеются некоторые технические отличия, которые мотивированы желанием сделать определения более строгими.

Описание геометрической теории интегрируемых $(1+1)$ -мерных систем гидродинамического типа вида

$$r_t^i = \lambda^i(r^1, \dots, r^N) r_x^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

содержится в работе [37]. В работе [38] было показано, что такие системы могут быть проинтегрированы с помощью обобщенного метода годографа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система (17) называется *полугамильтоновой*, если выполнены соотношения

$$\partial_j \frac{\partial_i \lambda^m}{\lambda^i - \lambda^m} = \partial_i \frac{\partial_j \lambda^m}{\lambda^j - \lambda^m}, \quad i \neq j \neq m, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial r^i}. \quad (18)$$

Полугамильтоновы системы обладают бесконечным набором коммутирующих потоков и законов сохранения гидродинамического типа [38], [39]. Основным геометрическим объектом, связанным с полугамильтоновой системой (17), является диагональная метрика g_{kk} , $k = 1, \dots, N$, где

$$\frac{1}{2} \partial_i \ln g_{kk} = \frac{\partial_i \lambda^k}{\lambda^i - \lambda^k}, \quad i \neq k, \quad (19)$$

которая называется *метрикой, ассоциированной с (17)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гидродинамическая редукция системы (1) определяется парой совместных полугамильтоновых систем гидродинамического типа (16) и функциями $u_1(r^1, \dots, r^N), \dots, u_n(r^1, \dots, r^N)$ такими, что для любого решения системы (16) функции

$$u_1 = u_1(r^1, \dots, r^N), \quad \dots, \quad u_n = u_n(r^1, \dots, r^N) \quad (20)$$

удовлетворяют (1). Согласно [13]–[15] система (1) называется *интегрируемой*, если она обладает максимально возможным числом гидродинамических редукций. А именно, подставляя (20) в (1), исключая производные по t и y с помощью (16) и приравнявая коэффициенты при r_x^l к нулю, получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}) \lambda^l \partial_l u_j + \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{u}) \mu^l \partial_l u_j + \sum_{j=1}^n c_{ij}(\mathbf{u}) \partial_l u_j = 0, \quad (21)$$

$$i = 1, \dots, n+k, \quad l = 1, \dots, N.$$

Для каждого l имеем линейную переопределенную систему для n неизвестных $\partial_l u_1, \dots, \partial_l u_n$, коэффициенты которой не зависят от l . Поскольку эта система должна иметь ненулевое решение, то все ее $(n \times n)$ -миноры обязаны равняться нулю, что

приводит к системе алгебраических уравнений для λ^l, μ^l , не зависящей от l . Предполагается, что эта система эквивалентна одному алгебраическому уравнению

$$P(\lambda^l, \mu^l) = 0 \quad (22)$$

(иначе λ^l, μ^l фиксированны и мы имеем только конечное число гидродинамических редукций). Уравнение (22) определяет так называемую алгебраическую *дисперсионную кривую*. Пусть p – координата на этой кривой. Тогда (22) эквивалентно уравнениям

$$\lambda^l = F(p_l, u_1, \dots, u_n), \quad \mu^l = G(p_l, u_1, \dots, u_n)$$

для некоторых функций F, G . В работе [13] предполагалось, что для общего значения p_l линейная система (21) имеет только одно решение с точностью до пропорциональности. Решая эту систему, мы получаем

$$\partial_i u_m = g_m(p_i, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1, \quad m = 2, \dots, n, \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

для некоторых функций g_m . Перепишем (16) в виде

$$r_t^i = F(p_i, u_1, \dots, u_n) r_x^i, \quad r_y^i = G(p_i, u_1, \dots, u_n) r_x^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Легко видеть, что условия совместности для (24) имеют вид

$$\frac{\partial_i F(p_j)}{F(p_i) - F(p_j)} = \frac{\partial_i G(p_j)}{G(p_i) - G(p_j)} \quad (25)$$

(здесь мы опускаем аргументы $u_1, \dots, u_n$ в F, G). Из (25) мы можем выразить $\partial_i p_j$:

$$\partial_i p_j = f(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (26)$$

Наконец, условия совместности $\partial_i \partial_j u_m = \partial_j \partial_i u_m$ приводят к уравнению

$$\partial_i \partial_j u_1 = h(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1 \partial_j u_1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Собирая вместе уравнения (23), (26), (27), мы приходим к системе вида

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= f(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1, & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \\ \partial_i u_m &= g_m(p_i, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1, & m = 2, \dots, n, \quad i = 1, \dots, N, \\ \partial_i \partial_j u_1 &= h(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1 \partial_j u_1, & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $p_1, \dots, p_N, u_1, \dots, u_n$ – функции от $r^1, \dots, r^N$, $N \geq 3$ и $\partial_i = \partial / \partial r^i$. Поскольку мы предполагаем, что система (1) имеет максимально возможное число редукций, система (28) должна находиться в инволюции (т.е. быть полностью совместной).

Это означает, что условия совместности $\partial_k \partial_j p_j = \partial_j \partial_k p_j$ и $\partial_k \partial_i \partial_j u_1 = \partial_i \partial_k \partial_j u_1$

выполнены в силу системы (28). В этом случае решения системы (28) зависят от $2N$ функций одной переменной. В качестве этих функций можно выбрать граничные условия для задачи Гурса $u_1(0, \dots, 0, r^i, 0, \dots, 0)$ и $p_i(0, \dots, 0, r^i, 0, \dots, 0)$, где $i = 1, \dots, N$.

3. ГЦ-СИСТЕМЫ

В предыдущем разделе мы показали, что с каждой системой (1), обладающей максимальным запасом гидродинамических редукций, связана система вида (28).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Совместная система вида (28) называется *n-полевой ГЦ-системой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Две ГЦ-системы называются *эквивалентными*, если они связаны преобразованием вида

$$p_i \rightarrow \lambda(p_i, u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, N, \quad (29)$$

$$u_m \rightarrow \mu_m(u_1, \dots, u_n), \quad m = 1, \dots, n. \quad (30)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Преобразование (29), (30) называется *автоморфизмом ГЦ-системы*, если оно переводит систему в себя.

Легко видеть, что совместность системы (28) эквивалентна тому, что функции f , g_k , h удовлетворяют некоторой системе функциональных уравнений, не зависящей от N . Например, для однополевой ГЦ-системы

$$\partial_i p_j = f(p_i, p_j, u) \partial_i u, \quad \partial_i \partial_j u = h(p_i, p_j, u) \partial_i u \partial_j u, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (31)$$

эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & f_u(p_2, p_3, u) - f_u(p_1, p_3, u) + f_{p_2}(p_2, p_3, u)f(p_1, p_2, u) - f_{p_1}(p_1, p_3, u)f(p_2, p_1, u) + \\ & + f_{p_3}(p_2, p_3, u)f(p_1, p_3, u) - f_{p_3}(p_1, p_3, u)f(p_2, p_3, u) + \\ & + f(p_2, p_3, u)h(p_1, p_2, u) - f(p_1, p_3, u)h(p_1, p_2, u) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & h_u(p_2, p_3, u) - h_u(p_1, p_3, u) + h_{p_2}(p_2, p_3, u)f(p_1, p_2, u) - h_{p_1}(p_1, p_3, u)f(p_2, p_1, u) + \\ & + h_{p_3}(p_2, p_3, u)f(p_1, p_3, u) - h_{p_3}(p_1, p_3, u)f(p_2, p_3, u) + \\ & + h(p_2, p_3, u)h(p_1, p_2, u) - h(p_1, p_3, u)h(p_1, p_2, u) = 0. \end{aligned}$$

3.1. Примеры ГЦ-систем.

ПРИМЕР 1. Пусть a_0 , a_1 , a_2 – произвольные постоянные. Тогда уравнения

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{a_2 p_j^2 + a_1 p_j + a_0}{p_i - p_j} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \frac{2a_2 p_i p_j + a_1(p_i + p_j) + 2a_0}{(p_i - p_j)^2} \partial_i u \partial_j u, \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j,$$

задают однополевую ГЦ-систему. Оригинальная ГЦ-система (см. раздел 1) соответствует случаю $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 1$. В случае общего положения линейным

преобразованием переменных p_i систему можно привести к виду

$$\begin{aligned}\partial_i p_j &= \frac{p_j(p_j - 1)}{p_i - p_j} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \frac{2p_i p_j - p_i - p_j}{(p_i - p_j)^2} \partial_i u \partial_j u,\end{aligned}\quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (33)$$

ПРИМЕР 2. Пусть $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Тогда система уравнений

$$\begin{aligned}\partial_i p_j &= \frac{P(p_j)(p_i - u)}{P(u)(p_i - p_j)} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \frac{K_2(p_i, p_j)u^2 + K_1(p_i, p_j)u + K_0(p_i, p_j)}{P(u)(p_i - p_j)^2} \partial_i u \partial_j u,\end{aligned}\quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}K_2(p_i, p_j) &= 2a_3(p_i - p_j)^2, \\ K_1(p_i, p_j) &= -a_3(p_i^2 p_j + p_i p_j^2) + a_2(p_i^2 + p_j^2 - 4p_i p_j) - a_1(p_i + p_j) - 2a_0, \\ K_0(p_i, p_j) &= 2a_3 p_i^2 p_j^2 + a_2(p_i^2 p_j + p_i p_j^2) + a_1(p_i^2 + p_j^2) + a_0(p_i + p_j),\end{aligned}$$

является однополевой ГЦ-системой. Используя преобразования вида

$$u \rightarrow \frac{au + b}{cu + d}, \quad p_i \rightarrow \frac{ap_i + b}{cp_i + d},$$

многочлен P можно привести к одной из трех канонических форм: $P(x) = x(x - 1)$, $P(x) = x$ или $P(x) = 1$. Отметим, что в случае общего положения $P(x) = x(x - 1)$ система обладает группой автоморфизмов S_4 , переставляющей точки $0, 1, \infty, u$ и заданной образующими

$$\sigma_1: u \rightarrow 1 - u, \quad p_i \rightarrow 1 - p_i, \quad \sigma_2: u \rightarrow \frac{u}{u - 1}, \quad p_i \rightarrow \frac{p_i}{p_i - 1}$$

и

$$\sigma_3: u \rightarrow 1 - u, \quad p_i \rightarrow \frac{(1 - u)p_i}{p_i - u}.$$

ПРИМЕР 3. Положим

$$\theta(z, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (-1)^\alpha e^{2\pi i(\alpha z + \alpha(\alpha-1)\tau/2)}, \quad \rho(z, \tau) = \frac{\theta_z(z, \tau)}{\theta(z, \tau)}.$$

Тогда система

$$\partial_\alpha p_\beta = \frac{1}{2\pi i} (\rho(p_\alpha - p_\beta) - \rho(p_\alpha)) \partial_\alpha \tau, \quad \partial_\alpha \partial_\beta \tau = -\frac{1}{\pi i} \rho'(p_\alpha - p_\beta) \partial_\alpha \tau \partial_\beta \tau, \quad (35)$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, N$, $\alpha \neq \beta$, является однополевой ГЦ-системой. В качестве поля u здесь выступает модулярный параметр τ . Отметим, что эта же система, дополненная некоторыми уравнениями с $\alpha = \beta$, возникала в работе [32] в связи с совсем другой задачей.

ПРИМЕР 4. Пусть u, v, w – координаты на пространстве модулей кривых

$$y^2 = x(x-1)(x-u)(x-v)(x-w) \quad (36)$$

рода $g = 2$. Тогда формулы

$$\begin{aligned} \partial_i v &= \frac{v(v-1)(p_i-u)}{u(u-1)(p_i-v)} \partial_i u, \\ \partial_i w &= \frac{w(w-1)(p_i-u)}{u(u-1)(p_i-w)} \partial_i u, \\ \partial_i p_j &= \frac{p_j(p_j-1)(p_i-u)(p_i-v)(p_i-w) + y(p_i)y(p_j)}{u(u-1)(p_i-v)(p_i-w)(p_i-p_j)} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \left(\frac{u(p_i+p_j) + (u-1)(p_i^2+p_j^2) + (p_i+p_j-4u)p_i p_j}{u(u-1)(p_i-p_j)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2vw - (p_i+p_j)(v+w) + 2p_i p_j) y(p_i)y(p_j)}{u(u-1)(p_i-v)(p_i-w)(p_j-v)(p_j-w)(p_i-p_j)^2} \right) \partial_i u \partial_j u \end{aligned}$$

задают трехполевую ГЦ-систему.

Системы из примеров 3 и 4 связаны с пространством модулей кривых рода $g = 1$ и $g = 2$ соответственно. Если параметризовать эллиптические кривые не с помощью модулярного параметра, а посредством формулы $y^2 = x(x-1)(x-u)$, можно переписать систему из примера 3 в виде, похожем на систему из примера 4.

Для ГЦ-систем, рассмотренных в примерах 1–4, функции f, h имеют полюсы при $p_i = p_j$. Однако существуют ГЦ-системы, голоморфные при $p_i = p_j$.

ПРИМЕР 5. Формулы

$$\partial_i p_j = 0, \quad \partial_i u_m = g_m(p_i) \partial_i u_1, \quad \partial_i \partial_j u_1 = 0 \quad (37)$$

задают n -полевую ГЦ-систему для любого n и любых функций $g_m(x)$.

3.2. Расширения ГЦ-систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Расширением ГЦ-системы (28) с помощью полевых функций $u_{n+1}, \dots, u_{n+m}$ называется дополнительная система вида*

$$\partial_i u_k = g_k(p_i, u_1, \dots, u_{n+m}) \partial_i u_1, \quad k = n+1, \dots, n+m, \quad i = 1, \dots, N, \quad (38)$$

такая, что уравнения из (28) и (38) совместны.

ПРИМЕР 1а (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 1). Система (33) допускает следующие однополевые расширения:

$$\partial_i v = \frac{v(v-1)}{p_i - v} \partial_i u, \quad (39)$$

$$\partial_i v = \left(\frac{1}{p_i^2} + \frac{v}{p_i} \right) \partial_i u, \quad (40)$$

$$\partial_i v = \left(\frac{1}{(p_i - 1)^2} - \frac{v}{p_i - 1} \right) \partial_i u, \quad (41)$$

$$\partial_i v = \left(\frac{c_1}{p_i - 1} + \frac{c_2}{p_i} + (c_3 e^u - c_4 e^{2u}) p_i + c_4 e^{2u} p_i^2 \right) \partial_i u, \quad (42)$$

где c_i – произвольные постоянные.

Задача описания всех расширений для данной ГЦ-системы является сложной. Однако расширения типа (39) существуют всегда и строятся единообразно. А именно, оказывается, что если добавить к системе (28) уравнение

$$\partial_i u_{n+1} = f(p_i, u_{n+1}, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1$$

(функция f та же самая, что и в (28)!), то полученная $(n + 1)$ -полевая система останется совместной. Будем называть эту процедуру *регулярным расширением*. Например, в случае примера 1 регулярное расширение приводит к дополнительному уравнению

$$\partial_i v = \frac{a_2 v^2 + a_1 v + a_0}{p_i - v} \partial_i u.$$

Заметим, что если в качестве новой полевой переменной выбрать v , то первая из формул примера 1 перепишется как

$$\partial_i p_j = \frac{(a_2 p_j^2 + a_1 p_j + a_0)(p_i - v)}{(a_2 v^2 + a_1 v + a_0)(p_i - p_j)} \partial_i v, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j.$$

Мы видим, что канонические формы ГЦ-системы из примера 2 получаются описанным выше приемом из соответствующей ГЦ-системы примера 1.

Ясно, что процедуру регулярного расширения можно последовательно применять несколько раз. Например, для ГЦ-системы (8) n -кратное регулярное расширение имеет вид

$$\partial_i p_j = \frac{1}{p_i - p_j} \partial_i w, \quad \partial_i \partial_j w = \frac{2}{(p_i - p_j)^2} \partial_i w \partial_j w, \quad \partial_i u_k = \frac{\partial_i w}{p_i - u_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для последней системы можно построить вырождения, соответствующие слиянию некоторых из полей. В частности, слияние всех полей $u_i \rightarrow w$, $i = 1, \dots, n$, приводит к ГЦ-системе

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{1}{p_i - p_j} \partial_i w_1, & \partial_i \partial_j w_1 &= \frac{2}{(p_i - p_j)^2} \partial_i w_1 \partial_j w_1, \\ \partial_i w_j &= \left(p_i^{j-1} - \sum_{k=1}^{j-2} k u_k p_i^{j-k-2} \right) \partial_i w_1. \end{aligned}$$

При $n = 1$ это расширение в точности совпадает с ГЦ-системой для бездисперсионного уравнения КП (5) (см. ниже пример 6).

Отметим, что ГЦ-система из примера 4 не получается с помощью регулярного расширения из системы с меньшим числом полей.

4. ОТ ГЦ-СИСТЕМ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ МОДЕЛЯМ

Следующим шагом на пути от ГЦ-систем к интегрируемым системам (1) является построение совместных семейств систем вида (24).

4.1. Семейства $(1+1)$ -мерных систем гидродинамического типа, ассоциированные с ГЦ-системой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Семейством $(1+1)$ -систем, ассоциированным с системой (28), назовем семейство полугамильтоновых систем гидродинамического типа

$$r_t^i = F(p_i, u_1, \dots, u_n) r_x^i, \quad (43)$$

параметризованное решениями $p_i(r^1, \dots, r^N)$, $i = 1, \dots, N$, $u_j(r^1, \dots, r^N)$, $j = 1, \dots, n$, ГЦ-системы (28).

Совместность двух $(1+1)$ -семейств (24) эквивалентна тому, что функции F, G удовлетворяют функциональному уравнению (25). У этого уравнения имеются тривиальные решения $F, G = c_1 F + c_2$, где F – произвольная функция, c_i – произвольные постоянные.

Не для всякой ГЦ-системы у уравнения (25) существуют нетривиальные решения F, G , существенно зависящие от полевых функций u_i . Например, в случае примера 5 такие решения существуют только при специальном выборе функций g_m .

Рассмотрим однополевые ГЦ-системы (31). В этом случае согласно (25) должны существовать функции двух переменных $F(x, u)$, $G(x, u)$ такие, что

$$\frac{f(x, y, u) \frac{\partial F}{\partial y}(y, u) + \frac{\partial F}{\partial u}(y, u)}{F(x, u) - F(y, u)} = \frac{f(x, y, u) \frac{\partial G}{\partial y}(y, u) + \frac{\partial G}{\partial u}(y, u)}{G(x, u) - G(y, u)}. \quad (44)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякая однополевая ГЦ-система, допускающая нетривиальное решение $F(x, u)$, $G(x, u)$ уравнения (44), эквивалентна системе из примера 1 или из примера 2.

Изложенные ниже результаты относительно построения решений функционального уравнения (44) для n -полевых ГЦ-систем с произвольным n получены в работах [20], [28].

ПРИМЕР 16 (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 1). В результате n -кратного применения процедуры регулярного расширения к ГЦ-системе (33) для квадратичного многочлена общего положения получим ГЦ-систему

$$\partial_i p_j = \frac{p_j(p_j - 1)}{p_i - p_j} \partial_i w, \quad \partial_i \partial_j w = \frac{2p_i p_j - p_i - p_j}{(p_i - p_j)^2} \partial_i w \partial_j w, \quad (45)$$

$$i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j,$$

$$\partial_i u_j = \frac{u_j(u_j - 1) \partial_i w}{p_i - u_j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n. \quad (46)$$

Рассмотрим следующую совместную переопределенную систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{s_j}{u_j - u_k} \frac{\partial h}{\partial u_k} + \frac{s_k}{u_k - u_j} \frac{\partial h}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq k, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_j} = & - \left(1 + \sum_{k=1}^{n+2} s_k \right) \frac{s_j}{u_j(u_j - 1)} h + \frac{s_j}{u_j(u_j - 1)} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{u_k(u_k - 1)}{u_k - u_j} \frac{\partial h}{\partial u_k} + \\ & + \left(\sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{s_k}{u_j - u_k} + \frac{s_j + s_{n+1}}{u_j} + \frac{s_j + s_{n+2}}{u_j - 1} \right) \frac{\partial h}{\partial u_j}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $s_1, \dots, s_{n+2} \in \mathbb{C}$ – произвольные параметры. Решения этой системы принадлежат к классу обобщенных гипергеометрических функций [21]. Легко показать, что векторное пространство $\mathcal{H}$ всех решений этой системы $(n + 1)$ -мерно. Для любого $h \in \mathcal{H}$ положим

$$S(h, p) = \sum_{i=1}^n u_i(u_i - 1)(p - u_1) \dots \hat{i} \dots (p - u_n) h_{u_i} + \left(1 + \sum_{i=1}^{n+2} s_i \right) (p - u_1) \dots (p - u_n) h, \quad (49)$$

где знак “ $\wedge$ ” над i означает отсутствие в произведении соответствующего сомножителя. Очевидно, S – многочлен степени n по p .

Пусть h_1, h_2, h_3 – линейно независимые функции из $\mathcal{H}$. Тогда функции

$$F = \frac{S(h_1, p)}{S(h_3, p)}, \quad G = \frac{S(h_2, p)}{S(h_3, p)} \quad (50)$$

удовлетворяют функциональному уравнению (25).

Кроме того, имеются решения уравнения (25) вида (50), для которых степень S меньше, чем n . В этом случае многочлен S определяется более сложным образом. А именно, фиксируем k линейно независимых функций $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{H}$. Тогда для всякого $h \in \mathcal{H}$ многочлен $S(h, p)$ задается формулой

$$S(h, p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n-k+1} u_i(u_i - 1)(p - u_1) \dots \hat{i} \dots (p - u_{n-k+1}) \Delta_i(h), \quad (51)$$

где $h \in \mathcal{H}$ и

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ h_{1, u_{n-k+2}} & h_{2, u_{n-k+2}} & \dots & h_{k, u_{n-k+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1, u_n} & h_{2, u_n} & \dots & h_{k, u_n} \end{pmatrix}, \\ \Delta_i(h) &= \det \begin{pmatrix} h & h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ h_{u_i} & h_{1, u_i} & h_{2, u_i} & \dots & h_{k, u_i} \\ h_{u_{n-k+2}} & h_{1, u_{n-k+2}} & h_{2, u_{n-k+2}} & \dots & h_{k, u_{n-k+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{u_n} & h_{1, u_n} & h_{2, u_n} & \dots & h_{k, u_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ясно, что $S(h, p)$ – многочлен по p степени $n - k$. Отметим, что линейные преобразования $h_i \rightarrow c_{i1}h_1 + \dots + c_{ik}h_k$, $h \rightarrow h + d_1h_1 + \dots + d_kh_k$ с постоянными коэффициентами c_{ij} , d_i не меняют $S(h, p)$.

Существуют решения функционального уравнения (25) для ГЦ-системы (45), (46), отличные от построенных выше. Например, при $n = 2$ существует решение

$$F = \frac{(p - u_1)(p - u_2)}{p(u_1 - u_2)}, \quad G = \frac{(p - u_1)(p - u_2)}{(p - 1)(u_1 - u_2)}.$$

По-видимому, эти решения связаны с особыми рациональными алгебраическими кривыми.

ПРИМЕР 3а (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 3). Регулярное n -полевое расширение ГЦ-системы (35) задается формулами

$$\partial_\alpha u_\beta = \frac{1}{2\pi i} (\rho(p_\alpha - u_\beta) - \rho(p_\alpha)) \partial_\alpha \tau, \quad \beta = 1, \dots, n. \quad (52)$$

Нетривиальное решение функционального уравнения (25) задается формулами (50), где

$$S(h, p) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\theta(u_\alpha)\theta(p - u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha + \eta)\theta(p - u_\alpha)} h_{u_\alpha} - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(p - \eta)}{\theta(\eta)\theta(p)} h.$$

Здесь $\eta = s_1u_1 + \dots + s_nu_n + r\tau + \eta_0$, где $s_1, \dots, s_n, r, \eta_0$ – произвольные постоянные, а $h(u_1, \dots, u_n, \tau)$ – решение следующей эллиптико-гипергеометрической системы:

$$\begin{aligned} h_{u_\alpha u_\beta} &= s_\beta (\rho(u_\beta - u_\alpha) + \rho(u_\alpha + \eta) - \rho(u_\beta) - \rho(\eta)) h_{u_\alpha} + \\ &\quad + s_\alpha (\rho(u_\alpha - u_\beta) + \rho(u_\beta + \eta) - \rho(u_\alpha) - \rho(\eta)) h_{u_\beta}, \\ h_{u_\alpha u_\alpha} &= s_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} (\rho(u_\alpha) + \rho(\eta) - \rho(u_\alpha - u_\beta) - \rho(u_\beta + \eta)) h_{u_\beta} + \\ &\quad + \left(\sum_{\beta \neq \alpha} s_\beta \rho(u_\alpha - u_\beta) + (s_\alpha + 1) \rho(u_\alpha + \eta) + s_\alpha \rho(-\eta) + \right. \\ &\quad \left. + (s_0 - s_\alpha - 1) \rho(u_\alpha) + 2\pi i r \right) h_{u_\alpha} - s_0 s_\alpha (\rho'(u_\alpha) - \rho'(\eta)) h, \\ h_\tau &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta} (\rho(u_\beta + \eta) - \rho(\eta)) h_{u_\beta} - \frac{s_0}{2\pi i} \rho'(\eta) h. \end{aligned}$$

Можно показать, что размерность пространства решений этой системы равна $n + 1$.

Эллиптические аналоги решений (50), (51) строятся следующим образом. Фиксируем k линейно независимых решений $h_1, \dots, h_k$ эллиптико-гипергеометрической системы. Тогда для любого решения h

$$S(h, p) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\theta(u_\alpha)\theta(p - u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha + \eta)\theta(p - u_\alpha)} \Delta_\alpha(h) - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(p - \eta)}{\theta(\eta)\theta(p)} \Delta_0(h) \right), \quad (53)$$

где

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_{1,u_{n-k+1}} & \cdots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{1,u_n} & \cdots & h_{k,u_n} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_\alpha(h) = \det \begin{pmatrix} h_{u_\alpha} & h_{1,u_\alpha} & \cdots & h_{k,u_\alpha} \\ h_{u_{n-k+1}} & h_{1,u_{n-k+1}} & \cdots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{u_n} & h_{1,u_n} & \cdots & h_{k,u_n} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0(h) = \det \begin{pmatrix} h & h_1 & \cdots & h_k \\ h_{u_{n-k+1}} & h_{1,u_{n-k+1}} & \cdots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{u_n} & h_{1,u_n} & \cdots & h_{k,u_n} \end{pmatrix}.$$

4.2. Интегрируемые трехмерные системы, порожденные парой совместных семейств. Если ГЦ-система (28) и пара совместных семейств (24) (т.е. решение F, G функционального уравнения (25)) заданы, то соответствующая система (1) строится с помощью простого вычисления.

ЛЕММА. Рассмотрим линейное пространство V функций от переменной p , порожденное $3n$ функциями

$$\{F(p, u_1, \dots, u_n)g_j(p, u_1, \dots, u_n), G(p, u_1, \dots, u_n)g_j(p, u_1, \dots, u_n), \\ g_j(p, u_1, \dots, u_n); \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь по определению $g_1 = 1$. Тогда система вида (1), обладающая гидродинамическими редукциями (24), состоит из $n + k$ уравнений тогда и только тогда, когда размерность V равна $2n - k$. Коэффициенты системы (1) определяются из соотношений

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}(\mathbf{u}) F(p, u_1, \dots, u_n) + b_{ij}(\mathbf{u}) G(p, u_1, \dots, u_n) + c_{ij}(\mathbf{u}) g_j(p, u_1, \dots, u_n)) = 0, \\ i = 1, \dots, n + k. \quad (54)$$

СЛЕДСТВИЕ. Если функции F и G задаются формулами вида (50), где выражение $S(h, p)$ линейно по h , а h_1, h_2, h_3 – произвольные элементы некоторого векторного пространства, то линейное преобразование $\bar{h}_i = \sum_{j=1}^3 k_{ij} h_j$ соответствует преобразованию (11) в соответствующей системе (1).

ПРИМЕР 6. Рассмотрим расширение $\partial_i v = p_i \partial_i u$ ГЦ-системы (8). Соответствующее функциональное уравнение (44) имеет решение $F = p^2 + u$, $G = p$. Кроме того, мы имеем $g_1 = 1$, $g_2 = p$. Размерность пространства, порожденного набором функций $\{p^2 + u, p^3 + up, p, p^2, 1, p\}$, равна $\alpha = 4$. Матрицы A, B, C , состоящие из неизвестных коэффициентов системы (1), определены с точностью до одновременного умножения слева на произвольную матрицу. Легко проверить, что таким преобразованием любое решение системы из восьми уравнений, которой эквивалентны

соотношения (54), приводится к $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = -1$, $b_{21} = 1$, $c_{11} = -u$, $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{22} = -1$. Последнее решение соответствует системе (5).

Аналогичное вычисление, проделанное для (45), (46), (49), (50), приводит к следующей системе для $u_1, \dots, u_n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} (h_{q,u_j} h_{r,u_i} - h_{r,u_j} h_{q,u_i}) \frac{u_j(u_j - 1)u_{i,t_s} - u_i(u_i - 1)u_{j,t_s}}{u_j - u_i} + \\ & + \sigma(h_q h_{r,u_j} - h_r h_{q,u_j}) u_{j,t_s} + \\ & + \sum_{i \neq j} (h_{r,u_j} h_{s,u_i} - h_{s,u_j} h_{r,u_i}) \frac{u_j(u_j - 1)u_{i,t_q} - u_i(u_i - 1)u_{j,t_q}}{u_j - u_i} + \\ & + \sigma(h_r h_{s,u_j} - h_s h_{r,u_j}) u_{j,t_q} + \\ & + \sum_{i \neq j} (h_{s,u_j} h_{q,u_i} - h_{q,u_j} h_{s,u_i}) \frac{u_j(u_j - 1)u_{i,t_r} - u_i(u_i - 1)u_{j,t_r}}{u_j - u_i} + \\ & + \sigma(h_s h_{q,u_j} - h_q h_{s,u_j}) u_{j,t_r} = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

где $j = 1, \dots, n$, $\sigma = 1 + s_1 + \dots + s_{n+2}$. Здесь в обозначениях типа h_{q,u_j} и u_{i,t_q} индекс после запятой означает частную производную по соответствующему аргументу, $q = 0$, $r = 1$, $s = 2$ и $t_0 = x$, $t_1 = t$, $t_2 = y$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ – базис пространства решений гипергеометрической системы (47), (48). Сопоставим каждому h_i свое время t_i . Для каждой тройки попарно различных $0 \leq q, r, s \leq n$ формула (55) задает свою трехмерную систему с временами t_q, t_r, t_s . Согласно [20] все эти системы совместны между собой.

Явный вид систем, связанных со случаем $k > 0$, можно найти в работе [20]. Системы, порожденные эллиптической ГЦ-системой из примера 3, приведены в статье [28].

5. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ (2 + 1)-МЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Во всех приведенных выше примерах ГЦ-систем (28) функции f, h имеют полюс на диагонали $p_i = p_j$. Однако существуют ГЦ-системы, голоморфные при $p_i = p_j$. К таким, в частности, относятся системы из примера 5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовем интегрируемую систему (1) *слабонелинейной*, если соответствующая ГЦ-система голоморфна на диагонали $p_i = p_j$.

В терминах решения F, G функционального уравнения (25) условия голоморфности ГЦ-системы выглядят следующим образом. Записывая (25) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\partial_i p_j F'(p_j) + \sum_{\alpha} F(p_j)_{u_{\alpha}} \partial_i u_{\alpha} \right) (G(p_i) - G(p_j)) = \\ & = \left(\partial_i p_j G'(p_j) + \sum_{\alpha} G(p_j)_{u_{\alpha}} \partial_i u_{\alpha} \right) (F(p_i) - F(p_j)), \end{aligned}$$

где штрих означает производную по p_j , и находя отсюда $\partial_i p_j$, видим, что это выражение голоморфно на диагонали тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\alpha} (F(p_i)_{u_{\alpha}} G'(p_i) - G(p_i)_{u_{\alpha}} F'(p_i)) \partial_i u_{\alpha} = 0. \quad (56)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть система (1) слабонелинейная и $k = 0$ (т.е. число неизвестных в системе равно числу уравнений). Тогда матрица

$$\tilde{A} = (a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C)^{-1}(a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C)$$

является линейно вырожденной для любых постоянных a_{ij} .

Напомним, что матрица $P(u_1, \dots, u_n)$ называется линейно вырожденной, если производная вдоль каждого собственного вектора от соответствующего собственного значения равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя замену (29), приведем $G(p)$ к виду $G = p$. Тогда (56) запишется в виде

$$\sum_{\alpha} F(p_i)_{u_{\alpha}} \partial_i u_{\alpha} = 0. \quad (57)$$

В результате произвольной замены независимых переменных (11) система (1) принимает вид $\mathbf{u}_t = \tilde{A}\mathbf{u}_x + \tilde{B}\mathbf{u}_y$, где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C)^{-1}(a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C), \\ \tilde{B} &= (a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C)^{-1}(a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C). \end{aligned}$$

Формула (21) для этой системы при $\mu^l = p_l$, $\lambda^l = F(p_l)$ дает

$$(\tilde{A} + p_i \tilde{B} - F(p_i) \text{Id})(\partial_i u_1, \dots, \partial_i u_n)^T = 0.$$

Для последней системы формула (57) означает, что производная собственного значения $F(p_i)$ вдоль собственного вектора $(\partial_i u_1, \dots, \partial_i u_n)$ равна нулю. Поэтому матрица $\tilde{A} + p_i \tilde{B}$ линейно вырожденна для любого значения параметра p_i .

Полученный результат означает, что если число уравнений в системе (1) равно числу неизвестных функций, то всякая двумерная система, описывающая решения типа бегущей волны $\mathbf{u} = \mathbf{u}(c_1x + c_2y + c_3t, c_4x + c_5y + c_6t)$ для слабонелинейной системы (1), является слабонелинейной в смысле работы [40].

ПРИМЕР 7. Рассмотрим следующую двухкомпонентную систему (см. [13]):

$$\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ w_y \end{pmatrix} = 0, \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} a &= w, & b &= v, & r &= \frac{P(w)}{w-v}, & q &= \frac{P(v)}{v-w}, \\ s &= \frac{P(v)}{w-v} + \frac{1}{3} P'(v), & p &= \frac{P(w)}{v-w} + \frac{1}{3} P'(w). \end{aligned}$$

Здесь P – произвольный многочлен третьей степени. Соответствующая ГЦ-система

$$\begin{aligned}\partial_i p_j &= \frac{P(w)}{(w-v)P(v)} p_j^2 p_i + \left(\frac{1}{w-v} + \frac{P'(v)}{P(v)} \right) p_j p_i - \\ &\quad - \left(\frac{1}{v-w} + \frac{P'(w)}{P(w)} \right) p_j - \frac{P(v)}{(v-w)P(w)}, \\ \partial_i v &= p_i \partial_i w, \\ \partial_i \partial_j w &= \left(\frac{P(w)}{(v-w)P(v)} p_i p_j + \frac{1}{v-w} + \frac{P'(w)}{P(w)} \right) \partial_i w \partial_j w\end{aligned}$$

полиномиальна по p_i, p_j , и, следовательно, исходная $(2+1)$ -мерная система является слабонелинейной. Можно проверить, что эта ГЦ-система эквивалентна ГЦ-системе

$$\partial_i p_j = 0, \quad \partial_i u_2 = p_i \partial_i u_1, \quad \partial_i \partial_j u_1 = 0,$$

принадлежащей к классу из примера 5.

Как было указано в работе [13], система (9) обладает линейным псевдопотенциальным представлением со спектральным параметром. Оказывается, что это общее свойство систем (37) из примера 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $F(p, u_1, \dots, u_n), G(p, u_1, \dots, u_n)$ – решение функционального уравнения (25) для ГЦ-системы вида (37). Тогда соответствующая $(2+1)$ -мерная система допускает псевдопотенциальное представление

$$\psi_t = F(\lambda, u_1, \dots, u_n) \psi_x, \quad \psi_y = G(\lambda, u_1, \dots, u_n) \psi_x, \quad (59)$$

где λ – спектральный параметр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (25) с учетом равенства нулю $\partial_i p_j$ получаем

$$\frac{\sum_{\alpha} F(p_j)_{u_{\alpha}} \partial_i u_{\alpha}}{F(p_i) - F(p_j)} = \frac{\sum_{\alpha} G(p_j)_{u_{\alpha}} \partial_i u_{\alpha}}{G(p_i) - G(p_j)}. \quad (60)$$

С другой стороны, условие совместности системы (59) имеет вид $F_y + FG_x = G_t + GF_x$, откуда

$$\sum_{\alpha} (F(\lambda)_{u_{\alpha}} u_{\alpha y} + F(\lambda) G(\lambda)_{u_{\alpha}} u_{\alpha x}) = \sum_{\alpha} (G(\lambda)_{u_{\alpha}} u_{\alpha t} + G(\lambda) F(\lambda)_{u_{\alpha}} u_{\alpha x}).$$

Подставляя в это равенство выражения

$$u_{\alpha y} = \sum_i \partial_i u_{\alpha} r_y^i = \sum_i \partial_i u_{\alpha} G(p_i) r_x^i, \quad u_{\alpha t} = \sum_i \partial_i u_{\alpha} F(p_i) r_x^i$$

и заменяя λ на p_j , получим (60).

5.1. Случай общего положения. Используя наше наблюдение об эквивалентности ГЦ-системы (58) некоторой системе вида (37) с рациональными функциями g_m , мы обобщим пример 7 на случай произвольных n и k .

Рассмотрим $(n + 1)$ -полевую ГЦ-систему

$$\partial_i p_j = 0, \quad \partial_i u_m = \frac{\lambda_m - \lambda_0}{p_i - \lambda_m} \partial_i w, \quad \partial_i \partial_j w = 0, \quad (61)$$

где $u_1, \dots, u_n, w$ – полевые функции, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – параметры.

Обозначим через $\mathcal{H}_n$ линейное пространство функций переменных $u_1, \dots, u_n$, порожденное $1, e^{u_1}, \dots, e^{u_n}$. Для любой функции $g = a_0 + a_1 e^{u_1} + \dots + a_n e^{u_n} \in \mathcal{H}_n$ положим

$$S_n(g, p) = \frac{a_0}{p - \lambda_0} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i e^{u_i}}{p - \lambda_i}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ такого, что $0 < k < n - 1$, мы фиксируем функции $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{H}_n$, где $h_i = b_{i,0} + b_{i,1} e^{u_1} + \dots + b_{i,n} e^{u_n}$, и полагаем

$$S_{n,k}(g, p) = \det \begin{pmatrix} S_n(g, p) & S_n(h_1, p) & S_n(h_2, p) & \cdots & S_n(h_k, p) \\ g & h_1 & h_2 & \cdots & h_k \\ a_{n-k+2} & b_{1,n-k+2} & b_{2,n-k+2} & \cdots & b_{k,n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_{1,n} & b_{2,n} & \cdots & b_{k,n} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

По определению $S_{n,0}(g, p) = S_n(g, p)$.

ТЕОРЕМА. Пусть g_1, g_2, g_3 – линейно независимые функции из $\mathcal{H}_n$. Тогда для любого $0 \leq k < n - 1$ функции

$$F = \frac{S_{n,k}(g_1, p_i)}{S_{n,k}(g_3, p_i)}, \quad G = \frac{S_{n,k}(g_2, p_i)}{S_{n,k}(g_3, p_i)} \quad (63)$$

удовлетворяют функциональному уравнению (25).

Приведем явный вид соответствующих $(2 + 1)$ -мерных систем. Согласно приведенной в п. 4.2 лемме уравнение

$$\sum_{i=1}^n (A_i u_{i,t_1} + B_i u_{i,t_2} + C_i u_{i,x}) = 0$$

принадлежит системе тогда и только тогда, когда выражение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i - \lambda_0}{p - \lambda_i} (A_i S_{n,k}(g_1, p) + B_i S_{n,k}(g_2, p) + C_i S_{n,k}(g_3, p))$$

тождественно равно нулю.

Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Пусть $g_i = a_{i,0} + a_{i,1}e^{u_1} + \dots + a_{i,n}e^{u_n}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда соответствующая $(2+1)$ -мерная система имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n (a_{2,i}a_{3,j} - a_{2,j}a_{3,i})e^{u_j} \frac{u_{i,t_1} - u_{j,t_1}}{\lambda_i - \lambda_j} + (a_{2,i}a_{3,0} - a_{3,i}a_{2,0}) \frac{u_{i,t_1}}{\lambda_i - \lambda_0} + \\ & + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n (a_{3,i}a_{1,j} - a_{3,j}a_{1,i})e^{u_j} \frac{u_{i,t_2} - u_{j,t_2}}{\lambda_i - \lambda_j} + (a_{3,i}a_{1,0} - a_{1,i}a_{3,0}) \frac{u_{i,t_2}}{\lambda_i - \lambda_0} + \\ & + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n (a_{1,i}a_{2,j} - a_{1,j}a_{2,i})e^{u_j} \frac{u_{i,x} - u_{j,x}}{\lambda_i - \lambda_j} + (a_{1,i}a_{2,0} - a_{2,i}a_{1,0}) \frac{u_{i,x}}{\lambda_i - \lambda_0} = 0, \quad (64) \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$. В простейшем случае $n = 2$ с помощью линейных преобразований функций g_i (см. приведенное в п. 4.2 следствие) матрицу a_{ij} можно привести к диагональной форме $\text{diag}((\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}, (\lambda_0 - \lambda_2)^{-1}, (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1})$. В результате система (64) примет следующий простой вид:

$$u_y = e^v(v_x - u_x), \quad v_t = e^u(u_x - v_x).$$

Система из примера 7 сводится к этой системе некоторыми заменами вида (11), (10). Вводя потенциал

$$Z_t = e^u, \quad Z_y = -e^v,$$

можно записать систему в виде одного уравнения

$$\frac{Z_{ty}}{Z_t Z_y} = \frac{Z_{xy}}{Z_y} + \frac{Z_{xt}}{Z_t}.$$

Если $k > 0$, то соответствующая $(2+1)$ -мерная система содержит две группы уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n-k+1} (\Delta_i(g_2)\Delta_j(g_3) - \Delta_j(g_2)\Delta_i(g_3))e^{u_j} \frac{u_{i,t_1} - u_{j,t_1}}{\lambda_i - \lambda_j} + \\ & + (\Delta_i(g_2)\Delta_0(g_3) - \Delta_0(g_2)\Delta_i(g_3)) \frac{u_{i,t_1}}{\lambda_i - \lambda_0} + \\ & + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n-k+1} (\Delta_i(g_3)\Delta_j(g_1) - \Delta_j(g_3)\Delta_i(g_1))e^{u_j} \frac{u_{i,t_2} - u_{j,t_2}}{\lambda_i - \lambda_j} + \\ & + (\Delta_i(g_3)\Delta_0(g_1) - \Delta_0(g_3)\Delta_i(g_1)) \frac{u_{i,t_2}}{\lambda_i - \lambda_0} + \\ & + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n-k+1} (\Delta_i(g_1)\Delta_j(g_2) - \Delta_j(g_1)\Delta_i(g_2))e^{u_j} \frac{u_{i,x} - u_{j,x}}{\lambda_i - \lambda_j} + \\ & + \left(\Delta_i(g_1)\Delta_0(g_2) - \Delta_0(g_1)\Delta_i(g_2) \right) \frac{u_{i,x}}{\lambda_i - \lambda_0} = 0, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n-k$, и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-k+1} e^{u_j} \Delta_j(g_r) u_{j,t_s} &= \sum_{j=1}^{n-k+1} e^{u_j} \Delta_j(g_s) u_{j,t_r}, \\ \sum_{j=1}^{n-k+1} \Delta_j(g_r) e^{u_j} \frac{u_{i,t_s} - u_{j,t_s}}{\lambda_i - \lambda_j} + \Delta_0(g_r) \frac{u_{i,t_s}}{\lambda_i - \lambda_0} &= \\ &= \sum_{j=1}^{n-k+1} \Delta_j(g_s) e^{u_j} \frac{u_{i,t_r} - u_{j,t_r}}{\lambda_i - \lambda_j} + \Delta_0(g_s) \frac{u_{i,t_r}}{\lambda_i - \lambda_0}, \end{aligned}$$

где $i = n-k+2, \dots, n$. Здесь $r, s = 1, 2, 3$, $t_3 = x$ и

$$\Delta_j(g) = \det \begin{pmatrix} g & h_1 & h_2 & \cdots & h_k \\ a_j & b_{1,j} & b_{2,j} & \cdots & b_{k,j} \\ a_{n-k+2} & b_{1,n-k+2} & b_{2,n-k+2} & \cdots & b_{k,n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_{1,n} & b_{2,n} & \cdots & b_{k,n} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$g = a_0 + a_1 e^{u_1} + \cdots + a_n e^{u_n},$$

$$h_1 = b_{1,0} + b_{1,1} e^{u_1} + \cdots + b_{1,n} e^{u_n}, \quad \dots, \quad h_k = b_{k,0} + b_{k,1} e^{u_1} + \cdots + b_{k,n} e^{u_n}.$$

Первая группа состоит из $n-k$ уравнений, а вторая – из $3k$ уравнений. Существует ровно k линейных комбинаций уравнений из второй группы, в которых отсутствуют производные переменных u_i , $i = n-k+1, \dots, n$. Оказывается, что эти линейные комбинации линейно выражаются через уравнения из первой группы. Таким образом, $(2+1)$ -мерная система содержит $(n-k) + 3k - k = n+k$ линейно независимых уравнений.

Простейшим нетривиальным случаем является случай $n=3$, $k=1$. Как показано в приложении А, соответствующая $(2+1)$ -мерная система эквивалентна уравнению (7).

5.2. Вырождения. ГЦ-система (61) и формулы (63) соответствуют случаю попарно различных параметров $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Здесь мы рассмотрим некоторые вырождения конструкции из п. 5.1, соответствующие слиянию этих параметров.

Определим многочлены $P_i(u_1, u_2, \dots)$ как коэффициенты разложения Тейлора

$$e^{\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots} = 1 + P_1 \varepsilon + P_2 \varepsilon^2 + \cdots.$$

В частности,

$$P_1(u_1, u_2, \dots) = u_1, \quad P_2(u_1, u_2, \dots) = u_2 + \frac{1}{2} u_1^2, \quad P_3(u_1, u_2, \dots) = u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{6} u_1^3.$$

Обозначим через $Q_k(\varepsilon, u_1, u_2, \dots)$ частичные суммы $1 + \sum_{i=1}^k P_i \varepsilon^i$. По определению положим $P_0 = Q_0 = 1$.

Пусть $\lambda_0, \dots, \lambda_l$ – попарно различные корни кратностей $n_0 + 1, n_1, \dots, n_l$ соответственно. Ясно, что $n_0 + \dots + n_l = n$. Соответствующая $(n + 1)$ -полевая ГЦ-система с полевыми функциями $u_{0,1}, \dots, u_{0,n_0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,n_1}, \dots, u_{l,1}, \dots, u_{l,n_l}, w$ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= 0, & \partial_i u_{0,m} &= \frac{1}{(p_i - \lambda_0)^m} \partial_i w, \\ \partial_i u_{s,m} &= \left(\frac{\lambda_s - \lambda_0}{(p_i - \lambda_s)^m} + \frac{1}{(p_i - \lambda_s)^{m-1}} \right) \partial_i w, & \partial_i \partial_j w &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Решения F, G функционального уравнения (25) в случае ГЦ-системы (65) задаются формулами из приведенной выше теоремы, где функции $S_{n,k}$ определяются следующим образом. Обозначим через $\mathcal{H}$ векторное пространство, порожденное функциями $P_i(u_{0,1}, u_{0,2}, \dots)$, $i = 0, \dots, n_0$, и $e^{u_{s,1}} P_{i-1}(u_{s,1}, u_{s,2}, \dots)$, $s = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, n_s$. Для любого элемента

$$g = \sum_{i=0}^{n_0} a_{0,i} P_i(u_{0,1}, u_{0,2}, \dots) + \sum_{s=1}^l \sum_{i=1}^{n_s} a_{s,i} e^{u_{s,1}} P_{i-1}(u_{s,1}, u_{s,2}, \dots)$$

из этого пространства положим

$$S_n(g, p) = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{a_{0,i} Q_i(p - \lambda_0, u_{0,1}, u_{0,2}, \dots)}{(p - \lambda_0)^{i+1}} + \sum_{s=1}^l \sum_{i=1}^{n_s} \frac{a_{s,i} e^{u_{s,1}} Q_{i-1}(p - \lambda_s, u_{s,1}, u_{s,2}, \dots)}{(p - \lambda_s)^i}.$$

По определению $S_{n,0}(g, p) = S_n(g, p)$.

В случае $k > 0$ фиксируем элементы

$$h_j = \sum_{i=0}^{n_0} b_{0,i} P_i(u_{0,1}, u_{0,2}, \dots) + \sum_{s=1}^l \sum_{i=1}^{n_s} b_{s,i} e^{u_{s,1}} P_{i-1}(u_{s,1}, u_{s,2}, \dots), \quad j = 1, \dots, k,$$

из $\mathcal{H}$. Тогда

$$S_{n,k}(g, p) = \det \begin{pmatrix} S_n(g, p) & S_n(h_1, p) & S_n(h_2, p) & \cdots & S_n(h_k, p) \\ g & h_1 & h_2 & \cdots & h_k \\ g_{\mathbf{v}_{n-k+2}} & h_{1, \mathbf{v}_{n-k+2}} & h_{2, \mathbf{v}_{n-k+2}} & \cdots & h_{k, \mathbf{v}_{n-k+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\mathbf{v}_n} & h_{1, \mathbf{v}_n} & h_{2, \mathbf{v}_n} & \cdots & h_{k, \mathbf{v}_n} \end{pmatrix}, \quad (66)$$

где $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (u_{0,1}, \dots, u_{0,n_0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,n_1}, \dots, u_{l,1}, \dots, u_{l,n_l})$.

Явный вид соответствующих $(2 + 1)$ -мерных систем легко восстанавливается с помощью общей конструкции из леммы (см. п. 4.2). Мы не приводим здесь ответ в целях экономии места.

6. ДИСКУССИЯ: О КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ $(2 + 1)$ -МЕРНЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Намеченный в разделах 3, 4 путь от ГЦ-систем к интегрируемым $(2 + 1)$ -мерным системам гидродинамического типа можно воспринимать как следующий проект классификации интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных систем.

ШАГ 1. Классифицировать (с точностью до эквивалентности (29), (30)) все ГЦ-системы (28).

ШАГ 2. Для каждой ГЦ-системы классифицировать все нетривиальные решения F, G функционального уравнения (25).

ШАГ 3. Для каждой ГЦ-системы и решения уравнения (25) построить соответствующие $(2 + 1)$ -мерные системы с помощью конструкции леммы.

В последующих замечаниях мы поделимся с читателем опытом, накопленным нами за несколько лет работы с интегрируемыми системами (1). Большая часть этих замечаний – наблюдения и гипотезы. Строго доказанных утверждений в настоящий момент мало. Большинство из недоказанных утверждений являются трудными. В частности, очень трудной является задача классификации n -полевых ГЦ-систем при произвольном n . Однако при малых n классификация, по-видимому, возможна. Мы намерены заняться этой задачей в дальнейшем.

Замечания по поводу шага 1.

1. Разных ГЦ-систем общего положения мало и они являются универсальными: для каждой ГЦ-системы имеется несколько зависящих от существенных параметров семейств $(2 + 1)$ -мерных систем, соответствующих ей. Известные ГЦ-системы связаны с алгебраическими кривыми. По-видимому, для любого рода $g = 0, 1, \dots$ существует единственная ГЦ-система с одним полем при $g = 0, 1$ и с $3g - 3$ полями для $g > 1$ (см. примеры 2–4) такая, что любая интегрируемая $(2 + 1)$ -мерная система общего положения соответствует этой ГЦ-системе или ее регулярному расширению. С точки зрения алгебраической геометрии регулярное расширение соответствует добавлению отмеченной точки на кривой.

2. Определение ГЦ-системы с помощью формул (28) допускает бескоординатную переформулировку. Пусть M – расслоение с одномерным слоем E и n -мерной базой F . Тогда каждая из p_i является координатой на E , а $u_1, \dots, u_n$ – координатами на F . Таким образом определяется понятие ГЦ-структуры на M . По-видимому, существует каноническая ГЦ-структура на естественном расслоении над пространством M_g модулей кривых рода g . В этом расслоении слой E – это кривая, соответствующая точке M_g .

3. Интегрируемые системы (1) определены с точностью до произвольных точечных преобразований $\mathbf{u} \rightarrow \Phi(\mathbf{u})$. Проблема эквивалентности для систем (1) далеко не тривиальна, и, в частности, нередко трудно найти систему координат, в которой данная $(2 + 1)$ -мерная система имеет простейший вид. Один из возможных подходов к этой задаче основан на следующем наблюдении: как правило, простейшие координаты для ГЦ-системы в то же самое время являются и простейшими координатами для соответствующей $(2 + 1)$ -мерной системы.

4. “Правильные” координаты для ГЦ-системы допускают алгебро-геометрическую интерпретацию. Например, каждая из переменных p_i, u из примера 2 может быть интерпретирована как координата на CP^1 , каждая из переменных p_i из примера 3 – как координата на эллиптической кривой, а τ – как модулярный параметр этой кривой (т.е. как координата на пространстве модулей кривых рода 1). Полевые

функции u , v , w из примера 4 – это координаты на пространстве модулей кривых рода 2. Мы ожидаем, что при $g > 2$ существует ГЦ-система с $3g - 3$ полевыми функциями, являющимися координатами на пространстве M_g модулей кривых рода g . Нахождение явных формул здесь затруднено отсутствием хороших координат на M_g . Алгебро-геометрическое описание этих ГЦ-систем может быть получено одновременно с описанием гидродинамических редукций $(2 + 1)$ -мерных систем из работы Кричевера [6]. Как только ГЦ-системы, связанные с кривыми рода $g > 2$, будут найдены, описание решений соответствующего функционального уравнения (25), видимо, приведет к построению $(2 + 1)$ -мерных систем, зависящих от существенных параметров. При этом должны появиться первые примеры обобщенных гипергеометрических функций, связанных с кривыми высокого рода. Для случаев $g = 0, 1$ эта программа была реализована в наших работах [20], [28]. Отметим, что $(2 + 1)$ -мерные системы из работы [6] существенных параметров не содержат и соответствуют простейшим целым значениям параметров в гипергеометрических системах.

5. Задача описания всех ГЦ-систем с данным числом полей включает в себя задачу описания вырождений системы общего положения. Вырождения типа слияния полевых функций u_i (на алгебро-геометрическом языке слияния отмеченных точек) могут быть описаны на языке диаграмм Юнга. В п. 3.2 мы рассмотрели вырождение ГЦ-системы из примера 2, при котором все точки сливаются в одну. ГЦ-система (61) соответствует вырождению типа $u_i \rightarrow \lambda_i + \varepsilon u_i$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Замечания по поводу шага 2.

6. Алгебраические кривые при классификации интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных систем возникают при шаге 2. Во всех известных примерах решения F, G функционального уравнения (25) являются алгебраически зависимыми как функции от p . Связывающее их полиномиальное соотношение называется дисперсионной кривой (см. (22)). Если для данной ГЦ-системы нас интересуют решения F, G , параметризующие кривую данного рода, то зависимость функций F, G от p можно считать известной. Например, в случае рациональной кривой F, G – рациональные функции от p . Различный выбор степеней F, G приводит к разным семействам $(2 + 1)$ -мерных систем. После подстановки соответствующего анзаца функциональное уравнение превращается в систему нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты анзаца.

7. Если предположить дополнительно, что система (1) обладает псевдопотенциальным представлением, то для нахождения решения F, G вместо (25) можно воспользоваться другим, более простым функциональным уравнением (76) (см. приложение Б).

8. Класс интегрируемых систем (1) замкнут относительно замен (11). Наличие этой группы приводит к формулам (50) для решений F, G функционального уравнения (25). В этих формулах выражение $S(h, p)$ линейно по h , а h_1, h_2, h_3 – произвольные элементы некоторого векторного пространства $\mathcal{H}$ размерности M . В случае общего положения $\mathcal{H}$ задается как пространство решений некоторой переопределенной линейной системы уравнений в частных производных гипергеометрического типа. Формулы (50) можно трактовать как линеаризующую подстановку для нелинейной

системы, упомянутой в п. 6. В случае вырождений $\mathcal{H}$ может состоять из элементарных функций. Например, в разделе 5 пространство $\mathcal{H}$ состоит из некоторых квазинчленов.

9. В случае кривых рода $g = 0, 1$ размерность $\mathcal{H}$ равна $n + 1$, где n – число отмеченных точек. Базису h_i , $i = 1, \dots, n + 1$, в $\mathcal{H}$ соответствует набор времен t_i , $i = 1, \dots, n + 1$. Для любой тройки времен t_i, t_j, t_k формула (50) приводит к трехмерной системе вида (1) с независимыми переменными t_i, t_j, t_k . Все системы, соответствующие разным тройкам времен, совместны друг с другом.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Законы сохранения гидродинамического типа и интегрируемые квазилинейные уравнения второго порядка

Законом сохранения гидродинамического типа для системы (1) называется соотношение вида

$$a(\mathbf{u})_t + b(\mathbf{u})_y + c(\mathbf{u})_x = 0,$$

где a, b, c – некоторые скалярные функции, выполненное на всех решениях $\mathbf{u}$ системы (55). Все известные интегрируемые системы (1) обладают богатым запасом законов сохранения. Более точно, рассмотрим системы (1) с $k = 0$. Доказано, что системы (55), соответствующие рациональной неособой кривой (пример 1), имеют $n + 1$ линейно независимых законов сохранения [20]. При этом явно найдены все частные производные функции a, b, c , по переменным u_i . По-видимому, в случае эллиптической кривой (пример 3) размерность пространства законов сохранения равна n . Проверено, что это так для вырождений эллиптических систем, приведенных в работе [7].

В случае экспоненциальных систем (64) с $k = 0$ законы сохранения находятся явно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Система (64) с $k = 0$ имеет следующие $n + 1$ закон сохранения:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{matrix} S_n^{\text{reg}}(g_2, \lambda_i) & S_n^{\text{reg}}(g_3, \lambda_i) \\ a_{2,i}e^{-u_i} & a_{3,i}e^{-u_i} \end{matrix} \right|_t + \left| \begin{matrix} S_n^{\text{reg}}(g_3, \lambda_i) & S_n^{\text{reg}}(g_1, \lambda_i) \\ a_{3,i}e^{-u_i} & a_{1,i}e^{-u_i} \end{matrix} \right|_y + \\ & + \left| \begin{matrix} S_n^{\text{reg}}(g_1, \lambda_i) & S_n^{\text{reg}}(g_2, \lambda_i) \\ a_{1,i}e^{-u_i} & a_{2,i}e^{-u_i} \end{matrix} \right|_x = 0, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n, u$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{matrix} S_n^{\text{reg}}(g_2, \lambda_0) & S_n^{\text{reg}}(g_3, \lambda_0) \\ a_{2,0} & a_{3,0} \end{matrix} \right|_t + \left| \begin{matrix} S_n^{\text{reg}}(g_3, \lambda_0) & S_n^{\text{reg}}(g_1, \lambda_0) \\ a_{3,0} & a_{1,0} \end{matrix} \right|_y + \\ & + \left| \begin{matrix} S_n^{\text{reg}}(g_1, \lambda_0) & S_n^{\text{reg}}(g_2, \lambda_0) \\ a_{1,0} & a_{2,0} \end{matrix} \right|_x = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$S_n^{\text{reg}}(g, \lambda_i) = \left(S_n(g, p) - \frac{a_i e^{u_i}}{p - \lambda_i} \right) \Big|_{p=\lambda_i}, \quad S_n^{\text{reg}}(g, \lambda_0) = \left(S_n(g, p) - \frac{a_0}{p - \lambda_0} \right) \Big|_{p=\lambda_0}.$$

В случае $k > 0$ у всех известных интегрируемых систем (1) существует k троек “коротких” законов сохранения вида

$$a_y = b_x, \quad a_t = c_x, \quad b_t = c_y.$$

Для каждой такой тройки можно ввести потенциал $Z_x = a$, $Z_y = b$, $Z_t = c$. При не слишком больших k (в рациональном случае при $n \geq 2k$, в эллиптическом – при $n \geq 2k - 1$) после введения потенциалов $Z_1, \dots, Z_k$ система (1) превращается в правильно определенную систему, состоящую из нескольких уравнений второго и нескольких уравнений первого порядка. В частности, при $n = 3k$ система (1) эквивалентна системе вида

$$A_1 \mathbf{Z}_{tt} + A_2 \mathbf{Z}_{yt} + A_3 \mathbf{Z}_{xt} + A_4 \mathbf{Z}_{yy} + A_5 \mathbf{Z}_{xy} + A_6 \mathbf{Z}_{xx} = 0, \quad (67)$$

где $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)^T$, A_i – некоторые $(k \times k)$ -матрицы, зависящие от $\mathbf{Z}_x$, $\mathbf{Z}_y$, $\mathbf{Z}_t$.

Короткие законы сохранения для систем из п. 4.1 с $k > 0$ задаются формулами

$$\left(\frac{\Delta(g_r, h_1, \dots, \hat{i}, \dots, h_k)}{\Delta(h_1, \dots, h_k)} \right)_{t_s} = \left(\frac{\Delta(g_s, h_1, \dots, \hat{i}, \dots, h_k)}{\Delta(h_1, \dots, h_k)} \right)_{t_r}, \quad (68)$$

где $i = 1, \dots, k$, $r, s = 1, 2, 3$, $t_1 = t$, $t_2 = y$, $t_3 = x$ и

$$\Delta(f_1, \dots, f_k) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_{1,u_n-k+2} & f_{2,u_n-k+2} & \cdots & f_{k,u_n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,u_n} & f_{2,u_n} & \cdots & f_{k,u_n} \end{pmatrix}.$$

По-видимому, помимо этих законов сохранения такие системы имеют еще $n + 1$ линейно независимый закон сохранения гидродинамического типа.

В случае $n = 3$, $k = 1$ система из п. 4.1 зависит от четырех произвольных постоянных линейно независимых векторов (см. (51)). После введения потенциала с помощью коротких законов сохранения система превращается в уравнение вида (2), где коэффициенты A_i – некоторые многочлены степени не выше второй от переменных Z_x , Z_y , Z_t . С помощью группы $GL(4)$, действующей на множестве уравнений (2) линейными преобразованиями переменных Z , x , t , y , матрицу, составленную из упомянутых выше векторов, можно привести к единичной. При этом удобнее всего это сделать так, чтобы функция h равнялась единице.

После этого в случае общего положения $n_0 = 0$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ (см. (65)) уравнение совпадает с (7). Вырождение типа $n_0 = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ приводит к уравнению [41]:

$$Z_{xt} - Z_{yy} + Z_x Z_{xy} - Z_y Z_{xx} = 0;$$

вырождение $n_0 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ дает

$$Z_{yt} + Z_t Z_{xx} - Z_x Z_{xt} = 0;$$

вырождение $n_0 = 1$, $n_2 = 2$, $n_1 = n_3 = 0$ приводит к

$$Z_y Z_{xt} - Z_t Z_{xy} + Z_{yy} = 0;$$

вырождение $n_0 = n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 0$ дает

$$Z_y Z_{xt} - Z_t Z_{xy} + Z_{yt} = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ГЦ-системы и псевдопотенциальное представление

В разделе 4 описаны некоторые классы решений функционального уравнения (25) для рациональной и эллиптической ГЦ-систем. Эти решения были найдены в работах [20], [28] с помощью дополнительного предположения, что соответствующие $(2 + 1)$ -мерные системы (1) кроме гидродинамических редукций обладают псевдопотенциальным представлением, или, что то же самое, бездисперсионным представлением Лакса. Как будет показано ниже, это предположение приводит к более простому, чем (25), функциональному уравнению, которое на самом деле и решалось.

Бездисперсионным уравнением Лакса называется соотношение

$$L_t = \{L, A\}, \quad (69)$$

где $\{L, A\} = A_\lambda L_x - A_x L_\lambda$. Здесь неизвестная функция $L = L(\lambda, u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ и $A = A(\lambda, u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ зависят от спектрального параметра λ . Преобразование $L(x, t, \lambda) \rightarrow \lambda(x, t, L)$ приводит (69) к следующей консервативной форме:

$$\lambda_t = A(\lambda, u_1, \dots, u_n)_x, \quad (70)$$

где роль скрытого параметра теперь играет L . Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\Phi_t = A(\Phi_x, u_1, \dots, u_n), \quad (71)$$

где $\lambda = \Phi_x$.

Предположим, что система (1) обладает одновременно гидродинамическими редукциями (24) и псевдопотенциальным представлением (4). Вычисляя L_t , L_x на N -фазных решениях и используя (43), запишем (69) как

$$\sum_i F(p_i, u_1, \dots, u_n) \partial_i L r_x^i = \sum_i \left(\partial_i L A_\lambda(\lambda, u_1, \dots, u_n) - L_\lambda \sum_{k=1}^n A_{u_k}(\lambda, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_k \right) r_x^i.$$

Приравнявая коэффициенты при r_x^i , получаем

$$F(p_i, u_1, \dots, u_n) \partial_i L = A_\lambda(\lambda, u_1, \dots, u_n) \partial_i L - L_\lambda \sum_{k=1}^n A_{u_k}(\lambda, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_k.$$

Таким образом, функция L удовлетворяет системе вида

$$\partial_i L = t(p_i, \lambda, u_1, \dots, u_n) L_\lambda \partial_i u_1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (72)$$

совместной в силу соответствующей ГЦ-системы (28). Система (72) называется *уравнениями Левнера*.

Используя преобразования (29), функцию F можно калибровать произвольным образом. Например, можно считать, что $F = p_i$. Нам удобно выбрать

$$F(p_i, u_1, \dots, u_n) = A_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n).$$

После этого система (72) принимает вид

$$\partial_i L = \frac{\sum_{k=1}^n A_{u_k}(\lambda, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_k}{A_\lambda(\lambda, u_1, \dots, u_n) - A_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n)} L_\lambda, \quad i = 1, \dots, N. \quad (73)$$

Преобразование $L(x, t, \lambda) \rightarrow \lambda(x, t, L)$ приводит (73) к следующему виду:

$$\partial_i \lambda = \frac{\sum_{k=1}^n A_{u_k}(\lambda, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_k}{A_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n) - A_\lambda(\lambda, u_1, \dots, u_n)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (74)$$

Из соотношения (73) следует, что $L_\lambda = 0$ в точках $\lambda = p_i, i = 1, \dots, N$. Подставляя $\lambda = p_i$ в (69), получим

$$(L(p_i, r^1, \dots, r^N))_t = A_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n) (L(p_i, r^1, \dots, r^N))_x.$$

Как мы видим, функции $L(p_i, r^1, \dots, r^N)$ и r_i удовлетворяют системе (43) с одними и теми же функциями F_i . Отсюда следует, что $L(p_i, r^1, \dots, r^N) = \mu_i(r^i)$ для некоторых функций μ_i . Поэтому после замены инвариантов Римана $\mu_i(r^i) \rightarrow r^i$ можно считать, что

$$r^i = L(p_i, r^1, \dots, r^N).$$

После преобразования $L(x, t, \lambda) \rightarrow \lambda(x, t, L)$ это соотношение принимает вид

$$p_i = \lambda(x, t, r^i).$$

Подставляя $L = p_j$ в (74), мы получаем соотношение

$$\partial_i p_j = \frac{\sum_{k=1}^n A_{u_k}(p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_k}{A_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n) - A_{p_j}(p_j, u_1, \dots, u_n)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (75)$$

выражающее функцию $f(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n)$ в соответствующей ГЦ-системе (28) через потенциал A и функции $g_2, \dots, g_n$. При $n = 1$ эта формула содержится в [42].

Напомним, что в формуле (75) калибровка в ГЦ-системе фиксирована условием $F = A_{p_i}$. Как правило, эта калибровка оказывается неудобной. После произвольного преобразования (29) формула (75) принимает вид

$$\partial_i p_j = \frac{\sum_{k=1}^n (\Phi_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n) \phi_{u_k}(p_j, u_1, \dots, u_n) - \phi_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n) \Phi_{u_k}(p_j, u_1, \dots, u_n)) \partial_i u_k}{\phi_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n) \Phi_{p_j}(p_j, u_1, \dots, u_n) - \phi_{p_j}(p_j, u_1, \dots, u_n) \Phi_{p_i}(p_i, u_1, \dots, u_n)}, \quad (76)$$

где $i \neq j, i, j = 1, \dots, N$, а потенциал оказывается заданным параметрически:

$$A = \phi(p, u_1, \dots, u_n), \quad \lambda = \Phi(p, u_1, \dots, u_n).$$

Используя (28) и опуская для краткости аргументы $u_1, \dots, u_n$, перепишем формулу (76) в виде

$$f(p_i, p_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (\Phi_{p_i}(p_i) \phi_{u_k}(p_j) - \phi_{p_i}(p_i) \Phi_{u_k}(p_j)) g_k(p_i)}{\phi_{p_i}(p_i) \Phi_{p_j}(p_j) - \phi_{p_j}(p_j) \Phi_{p_i}(p_i)}, \quad (77)$$

где $g_1 = 1$. Для фиксированной ГЦ-системы (28) это соотношение представляет собой функциональное уравнение для функции ϕ , Φ , гораздо более простое, чем функциональное уравнение (25) для функций F, G . В частности, фиксируя p_j , из (77) можно найти зависимость дроби ϕ_{p_i}/Φ_{p_i} от переменной p_i . Всякое решение уравнения (77) задает *интегрируемый потенциал, соответствующий системе* (28).

ПРИМЕР 2а (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 2). Найдем однополевые интегрируемые потенциалы, соответствующие однополевой ГЦ-системе (34) с $P(x) = x(x - 1)$. Фиксируя p_j в (77), находим, что ϕ_{p_i}/Φ_{p_i} — это отношение многочленов первой степени по p_i . Положим

$$\Phi_{p_i} = (A_1(u)p_i + A_0(u)) Z(p_i, u), \quad \phi_{p_i} = (B_1(u)p_i + B_0(u)) Z(p_i, u).$$

Подставляя эти выражения в (77) и приравнявая коэффициенты при степенях p_j , находим, что (77) эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned} \Phi_u &= -(A_1(u)u + A_0(u)) \frac{p_i(p_i - 1)}{u(u - 1)} Z(p_i, u), \\ \phi_u &= -(B_1(u)u + B_0(u)) \frac{p_i(p_i - 1)}{u(u - 1)} Z(p_i, u). \end{aligned}$$

Из условий совместности этих двух систем (т.е. из равенства перекрестных производных функций ϕ, Φ) находим обе частные производные функции $Z(p_i, u)$. Далее находим условие равенства смешанных производных Z . Приравнявая в этом соотношении коэффициенты при различных степенях p_i , получаем нелинейную систему ОДУ для функций $A_i, B_i, i = 0, 1$. Решение этой системы может быть выражено через два произвольных решения y_1, y_2 стандартного гипергеометрического уравнения

$$u(u - 1)y(u)'' + [(\alpha + \beta + 1)u - \gamma]y(u)' + \alpha\beta y(u) = 0$$

следующим образом:

$$A_1 = -\alpha y_1, \quad A_0 = u(u - 1)y_1' + \alpha u y_1, \quad B_1 = -\alpha y_2, \quad B_0 = u(u - 1)y_2' + \alpha u y_2.$$

Функция Z восстанавливается по ее частным производным:

$$Z(p, u) = (p - 1)^{\alpha+\gamma} p^{-\beta-\gamma-1} (p - u)^{\beta-1}.$$

Наконец, получаем

$$\Phi(p, u) = \int_0^p [u(u - 1)y_1'(u) + \alpha(u - \xi)y_1(u)] (\xi - 1)^{\alpha+\gamma} \xi^{-\beta-\gamma-1} (\xi - u)^{\beta-1} d\xi. \quad (78)$$

Функция ϕ получается заменой y_1 на y_2 в этой формуле.

Найденный выше потенциал представляет собой случай общего положения из работы [27], где были описаны все интегрируемые однополевые потенциалы. Обобщение формулы (71) на случай n -полевой ГЦ-системы (45), (46) имеет вид

$$P_n(p, h) = \int_0^p S_n(h, \xi) (\xi - u_1)^{-s_1-1} \dots (\xi - u_n)^{-s_n-1} \xi^{-s_{n+1}-1} (\xi - 1)^{-s_{n+2}-1} d\xi,$$

где $h(u_1, \dots, u_n)$ – произвольное решение системы (47), (48), а многочлен S_n задан формулой (49). Эллиптический аналог этого потенциала задается формулой

$$P_n(p, h) = \int_0^p S_n(h, \xi) e^{2\pi i r(\tau - \xi)} \frac{\theta'(0)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(u_1)^{s_1} \dots \theta(u_n)^{s_n}}{\theta(\xi)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(\xi - u_1)^{s_1} \dots \theta(\xi - u_n)^{s_n}} d\xi,$$

в которой используются обозначения из примера 3. Интегрируемые потенциалы дефекта $k > 0$, соответствующие рациональной и эллиптической кривым, приведены в работах [20], [28].

Ясно, что для любого решения ϕ, Φ уравнения (77) пара $k_1\phi + k_2\Phi, k_3\phi + k_4\Phi$ является решением для любых постоянных k_i . В приведенном выше примере такое преобразование соответствует другому выбору решений y_1, y_2 гипергеометрического уравнения. Таким образом, функция ϕ всегда принадлежит некоторому двумерному пространству V . Если размерность этого пространства $d \geq 3$, то выбрав линейно независимые элементы $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in V$, находим функции

$$F = \frac{(\phi_1)_{p_i}}{(\phi_3)_{p_i}}, \quad G = \frac{(\phi_2)_{p_i}}{(\phi_3)_{p_i}},$$

удовлетворяющие функциональному уравнению (25). Именно таким образом были найдены решения уравнения (25), содержащиеся в работах [20], [28]. Для ГЦ-системы (61) уравнение (25) решалось напрямую.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

О многомерных интегрируемых системах гидродинамического типа

Многомерным обобщением систем (1) являются системы вида

$$\sum_{i=1}^d A_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \quad d > 3, \quad (79)$$

где A_i – матрицы размера $n \times n$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Мы не будем здесь обсуждать определение интегрируемости для таких систем, основанное на методе гидродинамических редукций (см. [15]). Однако, если мы знаем, что такое интегрируемая система (1), естественно требовать, чтобы всякая редукция вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \left(\sum_{i=1}^d k_{1,i} x_i, \sum_{i=1}^d k_{2,i} x_i, \sum_{i=1}^d k_{3,i} x_i \right) \quad (80)$$

в интегрируемой системе (79) приводила к некоторой трехмерной интегрируемой системе (1) для любых постоянных $k_{i,j}$. Отметим, что параметры $k_{i,j}$ входят в коэффициенты этой системы (1) линейным образом.

В работе [43] показано, что при $n = 2$ системы (79), обладающие этим свойством, являются редукциями системы

$$u_{x_1} + v_{x_2} + uv_{x_3} - vu_{x_3} = 0, \quad u_{x_4} + v_{x_5} + uv_{x_6} - vu_{x_6} = 0. \quad (81)$$

Система (81) обладает максимальным запасом гидродинамических редукций и может быть записана в виде условия коммутирования пары векторных полей. Она

впервые была получена в работе [15] следующим образом. В системе (58) имеются четыре параметра (а именно, коэффициенты p_0, p_1, p_2, p_3 многочлена P), входящие в коэффициенты системы линейно. Если записать (58) в виде

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x + \sum_{i=0}^3 p_i B_i(\mathbf{u})\mathbf{u}_y = 0$$

и перейти к шестимерной системе

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x + \sum_{i=0}^3 B_i(\mathbf{u})\mathbf{u}_{y_i} = 0,$$

то последняя оказывается эквивалентной (81).

На основе анализа системы (58) и других известных примеров многомерных интегрируемых бездисперсионных систем в работе [44] была высказана следующая гипотеза: *ГЦ-система для любой системы (1), полученной редукцией (80) из интегрируемой многомерной системы, эквивалентна системе (37).*

В разделе 5 мы построили широкий класс систем (1), для которых ГЦ-системы имеют вид (37). Простейшими из них являются системы (64). Ниже мы принимаем попытку построить соответствующие им многомерные интегрируемые системы.

Система (64) записана в координатах u_i , в которых соответствующая ГЦ-система имеет наиболее простой вид. Согласно предложению 3 у системы (64) имеется псевдопотенциальное представление, рационально зависящее от спектрального параметра. Выбирая в качестве новых полевых функций $v_i, i = 1, \dots, n$, нули знаменателя псевдопотенциального представления, систему можно привести к виду, аналогичному (58):

$$(v_i)_t - \frac{f_{v_i}}{g_{v_i}}(v_i)_x + \left(\sum_{k \neq i} \gamma_{ik} P(v_k) + \delta_i \right) (v_i)_y + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} P(v_i) (v_j)_y = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\beta_{ij}, \gamma_{ik}, \delta_i$ выражаются через два симметрических многочлена

$$f(\mathbf{v}) = f_0 + f_1(v_1 + \dots + v_n) + \dots + f_n v_1 \dots v_n,$$

$$g(\mathbf{v}) = g_0 + g_1(v_1 + \dots + v_n) + \dots + g_n v_1 \dots v_n,$$

линейных по каждой переменной, и многочлен $P(x) = x^{n+1} + p_n x^n + \dots + p_0$ следующим образом:

$$\beta_{ij} = \frac{f_{v_i v_j} g_{v_i} - g_{v_i v_j} f_{v_i}}{(v_i - v_1) \dots (v_i - v_n) g_{v_i}}, \quad \gamma_{ik} = \frac{f_{v_i} g_{v_k} - g_{v_i} f_{v_k}}{(v_i - v_1) \dots (v_i - v_n) g_{v_i} (v_i - v_k)},$$

$$\delta_i = \frac{g f_{v_i} - f g_{v_i}}{g_{v_i}}.$$

ГИПОТЕЗА 1. *Соответствующая $(n + 4)$ -мерная система*

$$(v_i)_t - \frac{f_{v_i}}{g_{v_i}}(v_i)_x + \sum_{\substack{m=0, \\ k \neq i}}^{n+1} \gamma_{ik} v_k^m (v_i)_{y_m} + \delta_i (v_i)_{y_{n+1}} + \sum_{\substack{m=0, \\ j \neq i}}^{n+1} \beta_{ij} v_i^m (v_j)_{y_m} = 0, \quad (82)$$

$i = 1, \dots, n$, является интегрируемой при любом n .

Отметим, что при $n = 3$ систему (82) нетрудно привести к виду, аналогичному (81):

$$\begin{aligned} u_{x_1} - w_{x_2} + uw_{x_3} - wu_{x_3} &= 0, & v_{y_1} - w_{y_2} + vw_{y_3} - wv_{y_3} &= 0, \\ w_z &= v_{x_1} - u_{y_1} + vw_{x_3} - wv_{x_3} - uw_{y_3} + wu_{y_3}. \end{aligned}$$

Мы планируем привести систему (82) к более простому виду для произвольного n , доказать ее интегрируемость и изучить соответствующую ГЦ-систему в отдельной статье. Здесь отметим только, что определение ГЦ-системы как совместной системы вида (28) легко обобщается на случай $d > 3$. При этом если ГЦ-системы в трехмерном случае связаны с расслоениями с одномерным слоем (см. раздел 6), то в d -мерном случае слой имеет размерность $d - 2$. Некоторые ГЦ-системы для $d > 3$ содержатся в работе [15]. Приведем несколько новых примеров однополевых ГЦ-систем в случае $d = 4$.

Пусть $P(x) = z_2x^2 + z_1x + z_0$ и $Q(x)$ – два произвольных квадратичных многочлена, $J(x)$ – произвольный линейный многочлен и $S(x, y) = 2z_2xy + z_1(x + y) + 2z_0$.

ПРИМЕР 8. Формулы

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{(p_i - p_j)^2}{P(p_i)(q_i - q_j)} \partial_i u, & \partial_i q_j &= \frac{Q(p_i)}{P(p_i)} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \frac{(p_i - p_j)S(p_i, p_j)}{P(p_i)P(p_j)(q_i - q_j)} \partial_i u \partial_j u \end{aligned}$$

задают однополевую ГЦ-систему с двумерным слоем. Координатами в слое являются p_i, q_i , а координатой на базе служит u . С помощью дробно-линейной замены p многочлен P можно привести к одной из двух канонических форм: $P(x) = x$ или $P(x) = 1$. Случай $P(x) = 1$ в других координатах возникал в работе [15] при исследовании уравнения

$$Z_{tx} + Z_{xy} + Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = 0.$$

Возможно, что случай общего положения $P(x) = x$ связан с наиболее невырожденным интегрируемым уравнением такого сорта.

ПРИМЕР 9. Формулы

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{(p_i - p_j)J(p_i)J(p_j)}{P(p_i)(q_i - q_j)^2} \partial_i u, & \partial_i q_j &= \frac{J(p_i)^2}{P(p_i)(q_i - q_j)} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \frac{J(p_i)J(p_j)S(p_i, p_j)}{P(p_i)P(p_j)(q_i - q_j)^2} \partial_i u \partial_j u \end{aligned}$$

задают однополевую ГЦ-систему.

ПРИМЕР 10. Формулы

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{p_i p_j (2 - p_j)}{(q_i - q_j)^2} \partial_i u, & \partial_i q_j &= \frac{p_i}{q_i - q_j} \partial_i u, \\ \partial_i \partial_j u &= \frac{p_i p_j}{(q_i - q_j)^2} \partial_i u \partial_j u \end{aligned}$$

задают однополевую ГЦ-систему.

Нам неизвестно, связаны ли ГЦ-системы из примеров 9, 10 с какими-либо многомерными интегрируемыми бездисперсионными системами.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Классификация интегрируемых цепочек гидродинамического типа

Рассмотрим интегрируемые бесконечные квазилинейные цепочки вида

$$u_{\alpha,t} = \phi_{\alpha,1}u_{1,x} + \dots + \phi_{\alpha,\alpha+1}u_{\alpha+1,x}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad \phi_{\alpha,\alpha+1} \neq 0, \quad (83)$$

где $\phi_{\alpha,j} = \phi_{\alpha,j}(u_1, \dots, u_{\alpha+1})$. Две цепочки эквивалентны, если они связаны преобразованием вида

$$u_{\alpha} \rightarrow \Psi_{\alpha}(u_1, \dots, u_{\alpha}), \quad \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial u_{\alpha}} \neq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (84)$$

Под интегрируемостью мы понимаем наличие гидродинамических редукций (см. [13]–[15], [23]–[25]).

ПРИМЕР 11. Цепочка Бенни [45]–[47]

$$u_{1,t} = u_{2,x}, \quad u_{2,t} = u_1u_{1,x} + u_{3,x}, \quad \dots, \quad u_{\alpha t} = (\alpha - 1)u_{\alpha-1}u_{1,x} + u_{\alpha+1,x}, \quad \dots \quad (85)$$

является наиболее известным примером интегрируемых цепочек (83). Гидродинамические редукции для цепочки Бенни были изучены в работе [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Гидродинамической $(1+1)$ -мерной N -компонентной редукцией цепочки (83) называется полугамильтонова система (43) и функции $u_j(r^1, \dots, r^N)$, $j = 1, 2, \dots$, такие, что для любого решения (43) функции $u_j = u_j(r^1, \dots, r^N)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяют системе (83).

Используя преобразования (29), без ограничения общности будем считать, что

$$F(p, u_1, \dots, u_n) = p. \quad (86)$$

Выкладка, аналогичная проделанной в конце раздела 2, приводит к бесконечной треугольной ГЦ-системе, соответствующей данной интегрируемой цепочке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Совместная система вида

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= f(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1, \\ \partial_i u_k &= g_k(p_i, u_1, \dots, u_k) \partial_i u_1, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \partial_i \partial_j u_1 &= h(p_i, p_j, u_1, \dots, u_n) \partial_i u_1 \partial_j u_1, \end{aligned} \quad (87)$$

где $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$, называется *треугольной ГЦ-системой*. Здесь $p_1, \dots, p_N$, $u_1, u_2, \dots$ – функции от $r^1, \dots, r^N$ и $\partial_i = \partial/\partial r^i$.

Подставляя $u_i = u_i(r^1, \dots, r^N)$, $i = 1, 2, \dots$, в цепочку, вычисляя производные по t и x в силу (43) и приравнивая коэффициенты к нулю при r_x^s , получаем

$$\partial_s u_{\alpha} p_s = \phi_{\alpha,1} \partial_s u_1 + \dots + \phi_{\alpha,\alpha+1} \partial_s u_{\alpha+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

Используя (87) и заменяя p_s на p , находим

$$p = \phi_{1,1} + \phi_{1,2}g_2, \quad pg_2 = \phi_{2,1} + \phi_{2,2}g_2 + \phi_{2,3}g_3, \quad pg_3 = \phi_{3,1} + \phi_{3,2}g_2 + \phi_{3,3}g_3 + \phi_{3,4}g_4, \quad \dots$$

Решая эту систему относительно $g_2, g_3, \dots$, получаем

$$g_i(p) = \psi_{i,0} + \psi_{i,1}p + \dots + \psi_{i,i-1}p^{i-1},$$

где $\psi_{i,j}$ – некоторые функции от $u_1, \dots, u_i$. В частности,

$$g_2 = -\frac{p}{\phi_{1,2}} - \frac{\phi_{1,1}}{\phi_{1,2}}. \quad (88)$$

ПРИМЕР 11а (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 11). Треугольная ГЦ-система, соответствующая цепочке Бенни, имеет вид

$$\partial_i p_j = \frac{\partial_i u_1}{p_i - p_j}, \quad \partial_i \partial_j u_1 = \frac{2 \partial_i u_1 \partial_j u_1}{(p_i - p_j)^2}, \quad (89)$$

$$\partial_i u_m = \left(-(m-2)u_{m-2} - \dots - 2u_2 p_i^{m-2} - u_1 p_i^{m-3} + p_i^{m-1} \right) \partial_i u_1. \quad (90)$$

Уравнения (89) впервые были получены в работе [12].

Условия совместности $\partial_i \partial_j u_\alpha = \partial_j \partial_i u_\alpha$, $\alpha = 2, 3, 4$, дают систему линейных уравнений для $\partial_i p_j$, $\partial_j p_i$, $\partial_i \partial_j u_1$. Решая ее, мы получаем

$$\partial_i p_j = \frac{P(p_i, p_j)}{p_i - p_j} \partial_i u_1, \quad i \neq j, \quad (91)$$

$$\partial_i \partial_j u_1 = \frac{Q(p_i, p_j)}{(p_i - p_j)^2} \partial_i u_1 \partial_j u_1, \quad i \neq j, \quad (92)$$

где P, Q – некоторые многочлены, квадратичные по каждой из переменных p_i и p_j . Коэффициенты этих многочленов в принципе могут зависеть от u_1, u_2, u_3, u_4 . Однако из условий совместности $\partial_i \partial_j p_k = \partial_j \partial_i p_k$ нетрудно вывести, что P, Q зависят только от u_1, u_2 .

Запишем (91) в виде

$$\partial_i p_j = \left(\frac{R(p_j)}{p_i - p_j} + (z_4 p_j^2 + z_5 p_j + z_6) p_i + z_4 p_j^3 + z_3 p_j^2 + z_7 p_j + z_8 \right) \partial_i u_1, \quad (93)$$

где $R(x) = z_4 x^4 + z_3 x^3 + z_2 x^2 + z_1 x + z_0$. Из условий совместности для ГЦ-системы нетрудно получить, что

$$\partial_i \partial_j u_1 = \left(\frac{2z_4 p_i^2 p_j^2 + z_3 p_i p_j (p_i + p_j) + z_2 (p_i^2 + p_j^2) + z_1 (p_i + p_j) + 2z_0}{(p_i - p_j)^2} + z_9 \right) \partial_i u_1 \partial_j u_1. \quad (94)$$

Заменой (84) коэффициент z_9 можно сделать равным $z_6 - z_7$. Коэффициенты $z_i(x, y)$, $i = 1, \dots, 8$, удовлетворяют паре совместных динамических систем относительно y и x . Первая из них имеет вид

$$\begin{aligned} z_{0,y} &= 2z_0z_5 - z_1z_6, & z_{1,y} &= 4z_0z_4 + z_1z_5 - 2z_2z_6, \\ z_{2,y} &= 3z_1z_4 - 3z_3z_6, & z_{3,y} &= 2z_2z_4 - z_3z_5 - 4z_4z_6, \\ z_{4,y} &= z_3z_4 - 2z_4z_5, & z_{5,y} &= z_4z_7 - z_4z_6 - z_5^2, \\ z_{6,y} &= z_4z_8 - z_5z_6, & z_{7,y} &= 2z_1z_4 - 2z_3z_6 - z_5z_6 + z_4z_8, \\ z_{8,y} &= 2z_0z_4 - z_6^2 - z_6z_7 + z_5z_8. \end{aligned}$$

Вторая система выглядит несколько сложнее. Чтобы линейаризовать эти системы, приведем многочлен R к каноническому виду, пожертвовав при этом нормировкой (86).

Оказывается, что если коэффициенты преобразования

$$p_i = \frac{a\bar{p}_i + b}{\bar{p}_i - \psi}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (95)$$

удовлетворяют условиям

$$a_{u_2} = z_4(b + a\psi), \quad b_{u_2} = z_4b\psi + z_5b - z_6a, \quad \psi_{u_2} = z_4\psi^2 + z_5\psi + z_6,$$

то преобразование сохраняет форму уравнений (93), (94). При преобразованиях (95) многочлен R меняется следующим простым образом:

$$R(p_i) \rightarrow (p_i - \psi)^4 R\left(\frac{ap_i + b}{p_i - \psi}\right).$$

Предположим, что все корни R различны. Можно проверить, что допустимыми преобразованиями (95) три из четырех корней могут быть сделаны равными 0, 1 и ∞ . Из условий совместности для ГЦ-системы следует, что в этом случае четвертый корень $\lambda(u_1, u_2)$ не зависит от u_2 . С помощью преобразования вида $u_1 \rightarrow q(u_1)$ приходим к $\lambda = u_1$ или к $\lambda = \text{const}$. Из условий совместности для ГЦ-системы нетрудно извлечь, что в первом случае уравнения (93), (94) совпадают с формулами из примера 2, где $P(x) = x(x - 1)$, а вторая возможность не реализуется.

В случае кратных корней многочлен $R(x)$ может быть приведен к одной из следующих канонических форм: $R = 0$, $R = 1$, $R = x$, $R = x^2$, $R = x(x - 1)$. Во всех этих случаях уравнения (93), (94) совпадают с соответствующими уравнениями из примера 1.

Ниже мы рассмотрим случай общего положения $R(x) = x(x - 1)(x - u_1)$ и наиболее вырожденный случай $R(x) = 0$.

Поскольку при приведении R к канонической форме мы использовали преобразования (95), функции g_k в системе (87) из многочленов превратились в рациональные функции со знаменателем $(p - \psi)^{k-1}$. Для их построения нужно описать все возможные дробно-рациональные функции g_2 . В случае общего положения нетрудно проверить, что всякая такая функция g_2 может быть приведена преобразованием

вида $\bar{u}_2 = \sigma(u_1, u_2)$ к одной из следующих:

- 1) $g_2(p) = \frac{u_2(u_2 - 1)(p - u_1)}{u_1(u_1 - 1)(p - u_2)}$ (регулярное расширение);
- 2) $g_2(p) = \frac{1}{p - u_1}$;
- 3) $g_2(p) = \frac{u_1^{-\lambda}(u_1 - 1)^{\lambda-1}}{p - \lambda}$, $\lambda = 1, 0$;
- 4) $g_2(p) = \frac{u_1 - u_2}{u_1(u_1 - 1)}p + \frac{u_2 - 1}{u_1 - 1}$.

Регулярное расширение 1 инвариантно относительно дискретных автоморфизмов, описанных в примере 2. Остальные три случая эквивалентны, и можно ограничиться, например, случаем 4.

Рассмотрим случай общего положения 1. Следующим шагом классификации является нахождение дробно-рациональных ГЦ-семейств с коэффициентами, зависящими от u_1, u_2 . Такое семейство общего вида задается формулами (50), (51), где $n = 2, k = 1$. Однако у нас имеется дополнительное условие: нуль знаменателя должен совпадать с нулем знаменателя g_2 , т.е. должен равняться u_2 . Легко проверить, что это требование эквивалентно тому, что в системе (47), (48) $s_2 = 0, h_{1,u_2} = h_{2,u_2} = 0$. Последнее условие означает, что $h_1(u_1), h_2(u_1)$ – линейно независимые решения стандартного гипергеометрического уравнения

$$u(u-1)h(u)'' + [s_1 + s_3 - (s_3 + s_4 + 2s_1)u]h(u)' + s_1(s_1 + s_3 + s_4 + 1)h(u) = 0. \quad (96)$$

В качестве $h_3(u_1, u_2)$ без ограничения общности можно выбрать

$$h_3(u_1, u_2) = \int_0^{u_2} (t - u_1)^{s_1} t^{s_3} (t - 1)^{s_4} dt.$$

В итоге получаем

$$F(p, u_1, u_2) = \frac{f_1(u_1, u_2)p - f_2(u_1, u_2)}{p - u_2}, \quad (97)$$

где

$$f_1 = \frac{u_2(u_2 - 1)h_1h_{3,u_2} + u_1(u_1 - 1)(h_1h_{3,u_1} - h_3h_1')}{u_1(u_1 - 1)(h_1h_2' - h_2h_1')},$$

$$f_2 = \frac{u_1u_2(u_2 - 1)h_1h_{3,u_2} + u_2u_1(u_1 - 1)(h_1h_{3,u_1} - h_3h_1')}{u_1(u_1 - 1)(h_1h_2' - h_2h_1')}.$$

Отметим, что $h_1h_2' - h_2h_1' = \text{const} \cdot (u_1 - 1)^{s_1+s_4}u_1^{s_1+s_3}$.

Для специальных значений параметров гипергеометрическое уравнение может быть решено в элементарных функциях и F находится явно. Например, если $s_4 = -2 - s_1 - s_3$, то

$$F = \frac{(u_2 - u_1)^{s_1+1}u_2^{s_3+1}(u_2 - 1)^{-1-s_1-s_3}}{p - u_2};$$

при $s_4 = 0$ находим

$$F = \frac{(p-1)(u_2-u_1)^{s_1+1}u_2^{s_3+1}(u_1-1)^{-1-s_1}}{p-u_2}.$$

Далее необходимо найти функции $g_3, g_4, \dots$ в системе (87). Эти функции определяются с точностью до произвольного преобразования (84), где $\alpha = 3, 4, \dots$. Для того чтобы более или менее жестко их фиксировать, удобно предположить, что функции $g_3, g_4, \dots$ линейны по u_i , $i > 2$ (ср. с (90)). В частности, можно выбрать

$$\begin{aligned} g_3(p) &= -\frac{(u_1-u_2)(u_2-1)p}{u_1(u_1-1)(p-u_2)^2}, \\ g_i(p) &= \frac{(i-3)(u_1-u_2)(u_2-1)p u_i}{u_1(u_1-1)(p-u_2)^2} - \frac{(u_1-u_2)^{i-3}(u_2-1)^2 p(p-u_1)(p-1)^{i-4}}{u_1(u_1-1)^{i-2}(p-u_2)^{i-1}} - \\ &\quad - \sum_{s=1}^{i-4} \frac{(i-s-2)(u_1-u_2)^s(u_2-1)^2 p(p-u_1)(p-1)^{s-1} u_{i-s}}{u_1(u_1-1)^{s+1}(p-u_2)^{s+2}}, \quad i > 3. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\phi_{i,j}$ соответствующей цепочки (83) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} F(p) &= \phi_{1,1} + \phi_{1,2}g_2, & F(p)g_2 &= \phi_{2,1} + \phi_{2,2}g_2 + \phi_{2,3}g_3, \\ F(p)g_3 &= \phi_{3,1} + \phi_{3,2}g_2 + \phi_{3,3}g_3 + \phi_{3,4}g_4, & \dots, \end{aligned} \quad (98)$$

где F задано формулой (97). Эти соотношения эквивалентны бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений. Решая ее, получаем

$$\begin{aligned} \phi_{1,1} &= \frac{f_1 u_1 - f_2}{u_1 - u_2}, & \phi_{1,2} &= -\frac{u_1(u_1-1)(f_1 u_2 - f_2)}{u_2(u_2-1)(u_1-u_2)}, \\ \phi_{2,1} &= \frac{(u_2-1)(f_1 u_2 - f_2)}{(u_1-1)(u_1-u_2)}, & \phi_{2,2} &= \frac{f_2 u_1 - f_1 u_2^2}{u_2(u_1-u_2)}, \\ \phi_{2,3} &= f_1 u_2 - f_2, & \dots & \end{aligned} \quad (99)$$

Все функции $\phi_{i,j}$, $i > 2$, являются линейными комбинациями f_1 и f_2 с рациональными коэффициентами с одним и тем же знаменателем $(u_2-1)(u_1-u_2)$ и числителем, зависящим от $u_1, \dots, u_{i+1}$.

Рассмотрим теперь наиболее вырожденный случай $R(x) = 0$. В этом случае ГЦ-система голоморфна на диагонали. Согласно гипотезе 1 (см. приложение В) именно модели, связанные с такими ГЦ-системами, допускают многомерные обобщения.

Нетрудно проверить, что в случае $R(x) = 0$ треугольная ГЦ-система эквивалентна

$$\partial_i p_j = 0, \quad \partial_i \partial_j u_1 = 0, \quad \partial_i u_k = p_i^{k-1} u_1, \quad k = 2, 3, \dots$$

Автоморфизмы этой системы задаются преобразованиями

$$\begin{aligned} p_j &\rightarrow p_j, & u_i &\rightarrow \nu u_i + \gamma_i, \\ p_j &\rightarrow a p_j + b, & u_i &\rightarrow a^{i-1} u_i + (i-1)a^{i-2} b u_{i-2} + \dots + b^{i-1} u_1, \end{aligned} \quad (100)$$

где $j = 1, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots$. Соответствующее ГЦ-семейство имеет вид $F(p) = A(u_1, u_2)p + B(u_1, u_2)$. Коэффициенты $A(x, y)$, $B(x, y)$ находятся из условия полутампльтоновости, которое эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} AB_{yy} &= A_y B_y, & AB_{xy} &= A_y B_x, & AB_{xx} &= A_x B_x, \\ AA_{yy} &= A_y^2, & AA_{xy} &= A_x A_y, & AA_{xx} &= A_x^2 + A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \quad (101)$$

Эта система легко может быть решена в элементарных функциях. Для каждого ее решения формулы (98) определяют соответствующую интегрируемую цепочку (83).

Из (101) следует, что бывают две разновидности зависимости F от u_2 :

- 1) случай общего положения $F(p, u_1, u_2) = e^{\lambda u_2}(a(u_1)p + b(u_1))$,
- 2) $F(p, u_1, u_2) = a(u_1)p + \lambda u_2 + b(u_1)$.

Первый случай, в свою очередь, включает две возможности: $b' \neq 0$ и $b' = 0$. Случай $b' \neq 0$ дает

$$a = \sigma', \quad b = k_1 \sigma, \quad \sigma(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}, \quad \text{где} \quad c_1 c_2 (\lambda k_1 - \mu_1 \mu_2) = 0,$$

а при $b' = 0$ получаем

$$b = c_1, \quad a(x) = c_2 e^{\mu x} + c_3, \quad \text{где} \quad c_2 (c_1 \lambda - c_3 \mu) = 0.$$

Те же варианты случая 2 дают соответственно

$$a = \sigma', \quad b = k_1 \sigma, \quad \sigma(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\mu x}, \quad \text{где} \quad c_3 (\lambda - c_2 \mu) = 0,$$

и

$$b = c_1, \quad a(x) = c_2 e^{\mu x} + c_3, \quad \text{где} \quad c_2 (\lambda - c_3 \mu) = 0.$$

Легко видеть, что в случае общего положения преобразованием (100) функция F сводится к следующему виду:

$$F(p) = e^{u_2+u_1}(p-1) + e^{u_2-u_1}(p+1).$$

Соответствующая интегрируемая цепочка имеет вид

$$u_{k,t} = (e^{u_2+u_1} + e^{u_2-u_1})u_{k+1,x} + (e^{u_2-u_1} - e^{u_2+u_1})u_{k,x}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (102)$$

Как обычно, эта цепочка обладает бесконечной иерархией коммутирующих потоков. Например, следующий поток задается формулами

$$\begin{aligned} u_{k,\tau} &= (e^{u_2+u_1} + e^{u_2-u_1})u_{k+2,x} + (u_3 - u_1)(e^{u_2+u_1} + e^{u_2-u_1})u_{k+1,x} + \\ &+ (e^{u_2+u_1}(u_1 - u_3 - 1) + e^{u_2-u_1}(u_3 - u_1 - 1))u_{k,x}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В случае 2 при $c_3 = \lambda = 0$, $k_1 = 1$ мы получаем цепочку

$$u_{k,t} = u_{k+1,x} + u_1 u_{k,x}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (103)$$

Она эквивалентна цепочке универсальной иерархии [48]. Цепочка (103) является вырождением цепочки

$$u_{k,t} = u_{k+1,x} + u_2 u_{k,x}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (104)$$

Следуя [15], [41], нетрудно построить $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые обобщения описанных выше $(1 + 1)$ -мерных интегрируемых цепочек. А именно, некоторые семейства найденных функций F линейно зависят от двух параметров. Обозначим эти параметры через γ_1, γ_2 . Соответствующая интегрируемая цепочка

$$u_{k,t} = \gamma_1(\phi_{k,1}u_{1,x} + \dots + \phi_{k,k+1}u_{k+1,x}) + \gamma_2(\psi_{k,1}u_{1,x} + \dots + \psi_{k,k+1}u_{k+1,x})$$

также линейна по γ_1, γ_2 . Мы утверждаем, что $(2 + 1)$ -мерная цепочка

$$u_{k,t} = (\phi_{k,1}u_{1,x} + \dots + \phi_{k,k+1}u_{k+1,x}) + (\psi_{k,1}u_{1,y} + \dots + \psi_{k,k+1}u_{k+1,y}) \quad (105)$$

интегрируема с точки зрения метода гидродинамических редукций. В каждом конкретном случае редукции легко могут быть описаны. Например, в случае общего положения имеем

$$F(p) = \gamma_1 e^{u_2+u_1}(p-1) + \gamma_2 e^{u_2-u_1}(p+1).$$

Соответствующая $(2 + 1)$ -мерная цепочка (105) имеет вид

$$u_{k,t} = e^{u_2+u_1}(u_{k+1,x} - u_{k,x}) + e^{u_2-u_1}(u_{k+1,y} + u_{k,y}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Ее гидродинамические редукции задаются формулами

$$r_t^i = (e^{u_2+u_1}(p_i - 1) + e^{u_2-u_1}q_i(p_i + 1))r_x^i, \quad r_y^i = q_i r_x^i,$$

где

$$\begin{aligned} \partial_i u_k &= p_i^{k-1} u_1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \partial_i \partial_j u_1 = 0, \quad \partial_i p_j = 0, \\ \partial_i q_j &= \frac{(q_i - q_j)[(p_i + 1)(p_j - 1)e^{u_1} + q_j(p_i - 1)(p_j + 1)e^{-u_1}]}{(p_i - p_j)(e^{u_1} + q_i e^{-u_1})} \partial u_1. \end{aligned} \quad (106)$$

ГЦ-система (106) с двумерным слоем (см. приложение В) заслуживает отдельного изучения.

Рассмотрим теперь один из вырожденных случаев $F = \gamma_1 e^{u_1} p + \gamma_2 (p + u_2)$. Соответствующее $(2 + 1)$ -мерное интегрируемое обобщение цепочки (104) имеет следующий вид:

$$u_{k,t} = e^{u_1} u_{k+1,x} + u_{k+1,y} + u_2 u_{k,y}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Гидродинамические редукции описываются формулами

$$r_t^i = [e^{u_1} p_i + q_i(p_i + u_2)] r_x^i, \quad r_y^i = q_i r_x^i,$$

где

$$\begin{aligned} \partial_i u_k &= p_i^{k-1} u_1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \partial_i \partial_j u_1 = 0, \quad \partial_i p_j = 0, \\ \partial_i q_j &= \frac{(q_i - q_j)(p_i q_j + e^{u_1} p_j)}{(p_i - p_j)(q_i + e^{u_1})} \partial u_1. \end{aligned}$$

Отметим, что ГЦ-система для этой $(2 + 1)$ -мерной цепочки эквивалентна ГЦ-системе (106).

ГИПОТЕЗА 2. *Всякая интегрируемая цепочка (105) порождается двумерным линейным семейством решений системы (101) с помощью конструкции, описанной выше.*

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Список нерешенных задач

Здесь мы формулируем несколько нерешенных задач, которые с нашей точки зрения важны для лучшего понимания природы ГЦ-систем.

ЗАДАЧА 1. Найти все решения системы функциональных уравнений (32) с точностью до эквивалентности.

ЗАДАЧА 2. Описать все двухполевые расширения системы (33).

ЗАДАЧА 3. Описать (хотя бы при малых n) все решения уравнения (25) для ГЦ-системы (45), (46).

ЗАДАЧА 4. Построить решения уравнения (25) и псевдопотенциал в случае регулярного расширения ГЦ-системы из примера 4.

Благодарности. Мы признательны Е. В. Ферапонтову, привлечшему несколько лет назад наше внимание к интересным нерешенным задачам, возникшим в рамках метода гидродинамических редукций. Мы благодарны Ф. Ф. Воронову, Б. А. Дубровину, И. М. Кричеверу, О. И. Мохову, М. В. Павлову, В. П. Спиридонову, Б. Л. Фейгину, Е. В. Ферапонтову и А. Б. Шабату за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 08-01-00464, 09-01-92442) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3472.2008.2). В. В. Соколов благодарен университету Брока за гостеприимство.

Список литературы

- [1] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, М., 1989.
- [2] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [3] V. E. Zakharov (ed.), *What is Integrability?*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1991.
- [4] A. V. Mikhailov, *Integrability*, Lecture Notes in Phys., **767**, Springer, Berlin, 2009.
- [5] E. V. Zakharov, “Dispersionless limit of integrable systems in $2 + 1$ dimensions”, *Singular Limits of Dispersive Waves*, NATO ASI Ser. B Phys., **320**, eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre, Plenum Press, New York, 1994, 165–174.
- [6] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [7] А. В. Одесский, В. В. Соколов, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:3 (2008), 53–62.
- [8] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [9] M. V. Saveliev, A. M. Vershik, *Comm. Math. Phys.*, **126**:2 (1989), 367–378.
- [10] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Phys. Lett. A*, **359**:6 (2006), 613–619.
- [11] С. В. Манаков, П. М. Сантини, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 147–156.
- [12] J. Gibbons, S. P. Tsarev, *Phys. Lett. A*, **211**:1 (1996), 19–24.
- [13] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Comm. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206.
- [14] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *J. Phys. A*, **37**:8 (2004), 2949–2963.
- [15] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *J. Math. Phys.*, **45**:6 (2004), 2365–2377.
- [16] A. V. Odesskii, *Selecta Math.*, **13**:4 (2008), 727–742; [arXiv: 0704.3577](#).
- [17] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, S. P. Tsarev, *Comm. Math. Phys.*, **261**:1 (2006), 225–243.
- [18] E. V. Ferapontov, A. V. Odesskii, *Integrable Lagrangians and modular forms*, [arXiv: 0707.3433](#).

- [19] P. A. Burovskiy, E. V. Ferapontov, S. P. Tsarev, *Second order quasilinear PDEs and conformal structures in projective space*, [arXiv: 0802.2626](#).
- [20] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, *Integrable pseudopotentials related to generalized hypergeometric functions*, [arXiv: 0803.0086](#).
- [21] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Перас, *УМН*, **47**:4(286) (1992), 3–82.
- [22] E. V. Ferapontov, L. Hadjikos, K. R. Khusnutdinova, *Integrable equations of the dispersionless Hirota type and hypersurfaces in the Lagrangian Grassmannian*, [arXiv: 0705.1774](#).
- [23] М. В. Павлов, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 55–70.
- [24] M. V. Pavlov, *J. Phys. A*, **39**:34 (2006), 10803–10819.
- [25] E. V. Ferapontov, D. G. Marshall, *Math. Ann.*, **339**:1 (2007), 61–99.
- [26] I. M. Krichever, *Comm. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429.
- [27] А. В. Одесский, М. В. Павлов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 249–260; [arXiv: 0710.5655](#).
- [28] А. В. Одесский, В. В. Соколов, *ТМФ*, **261**:1 (2009), 21–36; [arXiv: 0810.3879](#).
- [29] В. П. Спиридонов, *УМН*, **69**:3(381) (2008), 3–72.
- [30] K. Löwner, *Math. Ann.*, **89**:1–2 (1923), 103–121.
- [31] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7**:5 (1995), 743–808.
- [32] V. Shramchenko, *J. Phys. A*, **36**:42 (2003), 10585–10605.
- [33] T. Takebe, L.-P. Leo, A. Zabrodin, *J. Phys. A*, **39** (2006), 11479–11501.
- [34] M. Mañas, E. Medina, L. Martínez Alonso, *J. Phys. A*, **39**:10 (2006), 2349–2381.
- [35] A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, “Symmetries of differential equations and the problem of integrability”, *Integrability*, Lecture Notes in Phys., **767**, Springer, Berlin, 2009, 19–88.
- [36] A. V. Mikhailov, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **31**:31 (1998), 6707–6715.
- [37] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98.
- [38] С. П. Царев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [39] С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537.
- [40] E. V. Ferapontov, *Phys. Lett. A*, **158**:3–4 (1991), 112–118.
- [41] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 4134–4156.
- [42] M. V. Pavlov, *Comm. Math. Phys.*, **272**:2 (2007), 469–505.
- [43] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, C. Klein, *On linear degeneracy of integrable quasilinear systems in higher dimensions*, [arXiv: 0909.5685](#).
- [44] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, *Systems of Gibbons–Tsarev type and integrable 3-dimensional models*, [arXiv: 0906.3509](#).
- [45] D. J. Benney, *Stud. Appl. Math.*, **52** (1973), 45–50.
- [46] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:3 (1977), 31–42.
- [47] V. E. Zakharov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 193–202.
- [48] Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 216–229.

Поступила в редакцию 9.12.2009