Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, Новые и старые результаты в теории результатов, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 222–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:17:30

© 2010 г.

А. Ю. Морозов*, Ш. Р. Шакиров*[†]

НОВЫЕ И СТАРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ РЕЗУЛЬТАНТОВ

Результанты играют все более и более важную роль в современной теоретической физике: они появляются всякий раз, когда мы имеем дело с нелинейными (полиномиальными) уравнениями, с неквадратичными формами или с негауссовыми интегралами. Будучи предметом более чем трехсотлетнего исследования, результанты уже довольно хорошо изучены и для них известно много явных формул, интересных свойств и неожиданных соотношений. Представлен краткий обзор некоторых из этих результатов, от классических до полученных сравнительно недавно. Особое внимание уделяется явным формулам, которые могут принести практическую пользу в будущих физических исследованиях.

Ключевые слова: результант, дискриминант, негауссов интеграл, нелинейная алгебра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья посвящена результантам – естественному и далеко идущему обобщению понятия детерминанта системы обыкновенных линейных уравнений на общий случай нелинейных систем алгебраических уравнений

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

где $f_1, \dots, f_n$ являются однородными¹⁾ полиномами степеней $r_1, \dots, r_n$. Эта система из n полиномиальных уравнений от n переменных является переопределенной: в общем случае она не имеет ненулевых решений $(x_1, \dots, x_n)$. Ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда коэффициенты системы удовлетворяют одному алгебраическому условию $R\{f_1, \dots, f_n\} = 0$, где R является неприводимой полиномиальной функцией от коэффициентов системы и называется *результантом*. Ясно,

¹⁾Мы предполагаем однородность полиномиальных уравнений, чтобы упростить изложение. В действительности требование однородности несущественно, и вся излагаемая теория может быть сформулирована также и для неоднородных систем уравнений.

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: morozov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия.
E-mail: shakirov@itep.ru

что для линейных уравнений результат сводится к *детерминанту* – хорошо известному объекту линейной алгебры. Для нелинейных уравнений результат является естественным обобщением детерминанта и вследствие этого может рассматриваться как центральный объект *нелинейной алгебры* [1].

Исторически основы теории результатов были заложены в XIX в. такими известными математиками, как Кэли, Сильвестр и Безу [2]. В этот период изучался в основном случай $n = 2$ переменных, с некоторыми исключениями. Теория результатов для $n > 2$ и тесно связанная с ней теория дискриминантов и гипердетерминантов были по существу развиты в основополагающих трудах [3]. Стоит обратить внимание на то, что детерминант имеет огромное количество приложений в физике. Результат, как ожидается, должен иметь не меньшее количество приложений, хотя к настоящему моменту их найдено довольно мало. Причиной является отчасти то, что физика наших дней целиком и полностью построена на методах и идеях линейной алгебры. Эти методы не всегда позволяют адекватно подойти к решению существенно нелинейных задач таких, например, как непертурбативное вычисление негауссовых интегралов. Наша основная идея состоит в том, что результаты и связанные с ними алгебраические объекты помогут решить эту проблему и станут важной частью нелинейной физики будущего и всей теории струн в смысле работы [4].

Чтобы проиллюстрировать эту идею, рассмотрим вкратце применение результатов к точному вычислению негауссовых интегралов – проблеме, вызывающей неизменный интерес в квантовой теории поля и других областях современной физики. Общепринято считать, что квантовая физика может быть сформулирована на языке функциональных интегралов. Трудно поставить под сомнение важность и плодотворность этого подхода: с первых работ Вигнера, Дирака и Фейнмана функциональные интегралы были источником новых прозрений и загадок. Возникшие в квантовой механике, они быстро распространились на квантовую теорию поля и в конечном итоге превратились в широко используемый инструмент современной теоретической физики. С точки зрения функционального интегрирования любая квантовая теория поля имеет дело с интегралами вида $\langle f(x) \rangle = \int f(x) e^{-S(x)} dx$, которые называются корреляторами. Переменная интегрирования x принадлежит линейному пространству (часто бесконечномерному), а выбор конкретной формы действия $S(x)$ определяет выбор конкретной теории или модели. В простейших моделях $S(x)$ является просто квадратичной формой, которая может быть в каком-либо базисе записана как $S(x) = \sum_{i,j} S_{ij} x_i x_j$, и в этом случае интеграл называется гауссовым. В определенном смысле гауссовы интегралы составляют основу всей квантовой теории: они описывают свободные (невзаимодействующие) поля и частицы. Такие системы довольно просты, и в соответствии с этим довольно просты гауссовы интегралы. Например, легко вычислить двумерный гауссов интеграл:

$$\int dx \int dy e^{-(ax^2 + bxy + cy^2)} dy = \frac{\text{const}}{\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

где в выражении $b^2 - 4ac$ легко узнать *дискриминант* квадратичной формы $ax^2 + bxy + cy^2$. Другие гауссовы интегралы, с большим числом переменных интегрирования, с неоднородным действием или с нетривиальной вставкой $f(\phi)$, являются

по существу столь же простыми и подобным образом сводятся к детерминантам – центральным объектам линейной алгебры, описывающим совместность систем линейных уравнений. Замечательно, что можно обобщить это соответствие на случай неквадратичных форм и негауссовых интегралов. Исследование простейших интегралов с кубическим действием $S(x) = \sum_{i,j,k} S_{ijk} x_i x_j x_k$ показывает их непосредственную связь с результатами: к примеру, простейший двумерный негауссов интеграл имеет вид

$$\int dx \int e^{-(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3)} dy = \frac{\text{const}}{\sqrt[9]{27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d}},$$

где в выражении под знаком радикала легко узнать *дискриминант* кубической формы $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, который по определению равен результату системы из двух ее частных производных:

$$R\{3ax^2 + 2bxy + cy^2, bx^2 + 2cxy + 3dy^2\} = 27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d.$$

Итак, результаты естественным образом возникают при изучении простейших маломерных негауссовых интегралов. Эта важная связь между функциональными интегралами и нелинейной алгеброй может быть прослежена гораздо дальше: раздел 5 настоящей статьи представляет собой краткое изложение этого интересного направления исследований (см. также работу [5]).

В настоящей статье мы описываем несколько центральных, на наш взгляд, моментов в теории результатов в более или менее явной форме, удобной для читателя, которому нужно провести практические вычисления. Это также делает нашу статью доступной неспециалистам. Большинство утверждений объясняются, а не доказываются. Некоторые доказательства могут быть найдены в работах [3].

2. ОСНОВНЫЕ ОБЪЕКТЫ

2.1. Однородный полином. Основными объектами изучения в нелинейной алгебре являются общие тензоры над конечномерными линейными пространствами [1]. Однако особенно важными с точки зрения приложений являются симметрические тензоры или, что то же самое, однородные полиномы степени r от n переменных. В настоящей статье мы будем рассматривать именно этот случай. Необходимо подчеркнуть, что данное ограничение ни в коем случае не является чрезмерным упрощением задачи: большинство существенных свойств нелинейной алгебры присутствуют уже на этом уровне. В дальнейшем мы будем пользоваться двумя представлениями однородных полиномов, которые могут быть полезны в различных обстоятельствах: тензорными

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n S_{i_1, \dots, i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}$$

и мономиальными

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{a_1 + \dots + a_n = r} s_{a_1, \dots, a_n} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n},$$

которые будем различать, обозначая коэффициенты полинома заглавными и строчными буквами соответственно. Однородный полином степени r от n переменных имеет C_{n+r-1}^r независимых коэффициентов.

2.2. Результант. Система (1) из n уравнений в полиномах однородных степеней $r_1, \dots, r_n$ от переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда коэффициенты этой системы удовлетворяют одному алгебраическому условию минимальной степени:

$$R_{r_1, \dots, r_n} \{f_1, \dots, f_n\} = 0.$$

Левая часть этого алгебраического условия называется результатом данной системы уравнений. Если $r_1 = \dots = r_n = r$, то результат часто обозначается как $R_{n|r}$. Мы также иногда будем обозначать результат просто как R . Результант является однородным полиномом по коэффициентам рассматриваемой системы степени

$$\deg R_{r_1, \dots, r_n} = r_1 \dots r_n \left(\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_n} \right).$$

Более того, он является однородным полиномом по коэффициентам каждого из уравнений f_i в отдельности и имеет степень $r_1 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_n$ по этим коэффициентам. Если все уравнения линейны, т.е. все $r_i = 1$, то результат равен детерминанту рассматриваемой системы: $R_{1, \dots, 1} \{f_1, \dots, f_n\} = f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Результант определен лишь в том случае, когда число однородных уравнений в точности совпадает с числом переменных; в противном случае для описания существования и/или вырожденности решений системы должны использоваться различные более сложные величины. Некоторые из этих величин известны как высшие результаты, или субрезультанты [6], некоторые – как компланарты [7].

2.3. Дискриминант. Имея один однородный полином $S(x_1, \dots, x_n)$ степени r от n переменных, можно построить систему из n полиномиальных уравнений

$$\frac{\partial S(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0,$$

которые все являются однородными и имеют степень $r-1$ по переменным $x_1, \dots, x_n$. Результант такой системы называется дискриминантом полиномиальной формы S и обозначается через $D_{n|r}(S)$. Дискриминант является однородным полиномом степени $\deg D_{n|r}(S) = n(r-1)^{n-1}$ по коэффициентам S , что следует непосредственно из формулы для произвольного результата. Если S – квадратичная форма, т.е. при $r = 2$, то дискриминант есть не что иное, как детерминант этой формы: $D_{n|2}(S) = \det S$.

2.4. Инвариант. Группа Ли линейных преобразований

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \det G \neq 0,$$

называется группой $GL(n)$. Ее подгруппа с G такими, что $\det G = 1$, называется группой $SL(n)$. В тензорных обозначениях эти группы действуют на основном векторном пространстве следующим образом: $x_i \mapsto G_{ij}x_j$. Это означает, что на коэффициенты однородного полинома $S(x_1, \dots, x_n)$ степени r от n переменных они действуют как $S_{i_1, \dots, i_r} \mapsto G_{i_1 j_1} \dots G_{i_r j_r} S_{j_1, \dots, j_r}$. Полиномы $I(S)$, которые остаются неизменными под действием таких $SL(n)$ -преобразований, называются $SL(n)$ -инвариантами формы S . В частности, дискриминант $D_{n|r}(S)$ является $SL(n)$ -инвариантом формы S . Однако существует значительно больше инвариантов, которые никаким очевидным образом не связаны с дискриминантом. Число функционально независимых инвариантов формы S равно разности $C_{n+r-1}^r - (n^2 - 1)$ числа независимых коэффициентов формы и размерности действующей на этих коэффициентах группы. Таким образом, инварианты заданной степени образуют конечномерное линейное пространство. Инварианты всех степеней в совокупности образуют кольцо.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАНТА

3.1. Формулы типа Сильвестра. Чтобы найти результат системы (1), можно рассмотреть другую систему

$$x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} f_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

полученную из данной умножением на всевозможные мономы фиксированной степени $q = s_1 + \dots + s_n$. Если рассматривать каждый из полиномов новой системы как линейную комбинацию мономов, то в базисе из этих мономов левая часть системы записывается через прямоугольную $(nC_{q+n-1}^q \times C_{r+q+n-1}^{r+q})$ -матрицу. Эта матрица называется (обобщенной) матрицей Сильвестра.

3.1.1. Результат как детерминант матрицы Сильвестра. В некоторых случаях можно так подобрать степень q монома-множителя, что матрица Сильвестра становится квадратной, $nC_{q+n-1}^q = C_{r+q+n-1}^{r+q}$, тогда результат в точности равен детерминанту матрицы Сильвестра. Легко видеть, что это возможно как минимум в двух случаях: во-первых, при любом n и $r = 1$, во-вторых, при любом r и $n = 2$. В первом случае достаточно выбрать $q = 0$, т. е. рассматривать саму систему без дополнительного домножения на моном. При этом матрица Сильвестра совпадает с матрицей самой линейной системы. Второй случай является менее тривиальным: мы имеем дело с двумя однородными нелинейными уравнениями от двух переменных. Чтобы матрица Сильвестра стала квадратной, необходимо выбрать $q = r - 1$. К примеру, в случае $n = 2$, $r = 2$ система уравнений имеет вид

$$f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0, \quad g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Умножая уравнения этой системы на все мономы степени $q = 1$, т. е. на x_1 и x_2 , мы получаем

$$\begin{aligned} f_{11}x_1^3 + f_{12}x_1^2x_2 + f_{22}x_1x_2^2 + 0x_2^3 &= 0, & 0x_1^3 + f_{11}x_1^2x_2 + f_{12}x_1x_2^2 + f_{22}x_2^3 &= 0, \\ g_{11}x_1^3 + g_{12}x_1^2x_2 + g_{22}x_1x_2^2 + 0x_2^3 &= 0, & 0x_1^3 + g_{11}x_1^2x_2 + g_{12}x_1x_2^2 + g_{22}x_2^3 &= 0. \end{aligned}$$

Эти четыре полинома являются линейными комбинациями четырех мономов и, следовательно, могут быть представлены квадратной (4×4) -матрицей Сильвестра, при этом

$$R_{2|2}\{f, g\} = \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} & 0 \\ 0 & f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Подобные формулы, выражающие результат как детерминант вспомогательной матрицы, обычно называются детерминантными.

В следующем по сложности случае $n = 2, r = 3$ система уравнений имеет вид

$$f_{111}x_1^3 + f_{112}x_1^2x_2 + f_{122}x_1x_2^2 + f_{222}x_2^3 = 0, \quad g_{111}x_1^3 + g_{112}x_1^2x_2 + g_{122}x_1x_2^2 + g_{222}x_2^3 = 0.$$

Домножая уравнения этой системы на все мономы степени $q = 2$, т. е. на x_1^2 , x_1x_2 и x_2^2 , мы получаем

$$\begin{aligned} f_{111}x_1^5 + f_{112}x_1^4x_2 + f_{122}x_1^3x_2^2 + f_{222}x_1^2x_2^3 + 0x_1x_2^4 + 0x_2^5 &= 0, \\ 0x_1^5 + f_{111}x_1^4x_2 + f_{112}x_1^3x_2^2 + f_{122}x_1^2x_2^3 + f_{222}x_1x_2^4 + 0x_2^5 &= 0, \\ 0x_1^5 + 0x_1^4x_2 + f_{111}x_1^3x_2^2 + f_{112}x_1^2x_2^3 + f_{122}x_1x_2^4 + f_{222}x_2^5 &= 0, \\ g_{111}x_1^5 + g_{112}x_1^4x_2 + g_{122}x_1^3x_2^2 + g_{222}x_1^2x_2^3 + 0x_1x_2^4 + 0x_2^5 &= 0, \\ 0x_1^5 + g_{111}x_1^4x_2 + g_{112}x_1^3x_2^2 + g_{122}x_1^2x_2^3 + g_{222}x_1x_2^4 + 0x_2^5 &= 0, \\ 0x_1^5 + 0x_1^4x_2 + g_{111}x_1^3x_2^2 + g_{112}x_1^2x_2^3 + g_{122}x_1x_2^4 + g_{222}x_2^5 &= 0. \end{aligned}$$

Эти шесть полиномов являются линейными комбинациями шести мономов и поэтому представляются квадратной (6×6) -матрицей Сильвестра, при этом

$$R_{2|3}\{f, g\} = \det \begin{pmatrix} f_{111} & f_{112} & f_{122} & f_{222} & 0 & 0 \\ 0 & f_{111} & f_{112} & f_{122} & f_{222} & 0 \\ 0 & 0 & f_{111} & f_{112} & f_{122} & f_{222} \\ g_{111} & g_{112} & g_{122} & g_{222} & 0 & 0 \\ 0 & g_{111} & g_{112} & g_{122} & g_{222} & 0 \\ 0 & 0 & g_{111} & g_{112} & g_{122} & g_{222} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что во всех рассмотренных примерах матрица имеет характерную лестничную форму. Красота и простота детерминантной формулы сделали ее и соответствующий результат $R_{2|r}$ широко известными. В наши дни метод Сильвестра является основным инструментом для вычисления двумерных результатов и единственной частью теории результатов, которая включена в студенческие учебники и такие компьютерные программы широкого пользования, как **Mathematica** и **Maple**. Однако обобщение этой формулы на случай $n > 2$ далеко не прямолинейно, поскольку для $n > 2$ и $r \geq 2$ матрица Сильвестра, вообще говоря, не может быть сделана квадратной. Оказывается, несмотря на то что в старших размерностях матрица Сильвестра прямоугольная, она тем не менее тесно связана с результатом. А именно, старшие миноры этой прямоугольной матрицы всегда делятся на результат, если только их размер больше чем степень результата (другими словами, для достаточно больших q). Различные обобщения метода Сильвестра явно

описывают частное при таком делении, тем самым выражая результат как отношение двух полиномиальных величин. Это обстоятельство, несомненно, является недостатком таких формул, по крайней мере с вычислительной точки зрения.

Метод Сильвестра имеет как минимум два различных обобщения на старшие размерности $n > 2$: гомологическое, которое приводит к так называемым комплексам Кошуля, и более комбинаторное, которое приводит к так называемым матрицам Маколея.

3.1.2. Результат как детерминант комплекса Кошуля. Чтобы построить комплекс Кошуля, необходимо дополнить n коммутирующих переменных $x_1, \dots, x_n$ (для этих переменных $x_i x_j - x_j x_i = 0$) таким же количеством антикоммутирующих (грасманных) переменных $\theta_1, \dots, \theta_n$ (для этих переменных $\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0$) и рассмотреть полиномы, зависящие и от $x_1, \dots, x_n$, и от $\theta_1, \dots, \theta_n$. Обозначим через $\Omega(p, q)$ пространство таких полиномов степени p по x -переменным и степени q по θ -переменным. Степень q не может быть больше n в силу перестановочных соотношений для переменных θ . Несложно показать, что

$$\dim \Omega(p, q) = C_{p+n-1}^p C_n^q. \quad (2)$$

Центральным элементом конструкции является дифференциал Кошуля, построенный из системы f . Он представляет собой линейный оператор, который действует на пространствах $\Omega(p, q)$ по правилу

$$\hat{d} = f_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta_n} \quad (3)$$

и автоматически является нильпотентным:

$$\hat{d}\hat{d} = f_j(x)f_k(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_k} = f_j(x)f_k(x) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_k} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = 0.$$

Дифференциал Кошуля переводит $\Omega(p, q)$ в $\Omega(p+r, q-1)$ и порождает таким образом цепочку связанных друг с другом линейных пространств

$$\Omega(p, q) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(p+r, q-1) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(p+2r, q-2) \xrightarrow{\hat{d}} \dots \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(R, 0),$$

которая называется комплексом Кошуля. Заметим, что для одного и того же оператора $\hat{d}$ можно построить множество различных комплексов Кошуля, которое зависит от единственного целочисленного параметра R – степени крайнего правого пространства по x -переменным. Используя формулу (2) для размерностей, несложно выписать все эти комплексы. К примеру, башня комплексов Кошуля для случая $n = 3, r = 2$ имеет вид, приведенный в следующей таблице.

R	Пространства	Размерности	Эйлерова характеристика
0	$\Omega(0, 0)$	1	1
1	$\Omega(1, 0)$	3	3
2	$\Omega(0, 1) \rightarrow \Omega(2, 0)$	$3 \rightarrow 6$	3
3	$\Omega(1, 1) \rightarrow \Omega(3, 0)$	$9 \rightarrow 10$	1
4	$\Omega(0, 2) \rightarrow \Omega(2, 1) \rightarrow \Omega(4, 0)$	$3 \rightarrow 18 \rightarrow 15$	0
5	$\Omega(1, 2) \rightarrow \Omega(3, 1) \rightarrow \Omega(5, 0)$	$9 \rightarrow 30 \rightarrow 21$	0
6	$\Omega(0, 3) \rightarrow \Omega(2, 2) \rightarrow \Omega(4, 1) \rightarrow \Omega(6, 0)$	$1 \rightarrow 18 \rightarrow 45 \rightarrow 28$	0
7	$\Omega(1, 3) \rightarrow \Omega(3, 2) \rightarrow \Omega(5, 1) \rightarrow \Omega(7, 0)$	$3 \rightarrow 30 \rightarrow 63 \rightarrow 36$	0

Здесь эйлерова характеристика по определению равна сумме размерностей с чередующимися знаками. Крайний правый дифференциал $\hat{d}: \Omega(R-r, 1) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(R, 0)$ действует на соответствующих линейных пространствах по правилу

$$(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \cdot \theta_j \mapsto (x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \cdot f_j(x_1, \dots, x_n)$$

и представляется $(nC_{R-r+n-1}^{R-r} \times C_{R+n-1}^R)$ -матрицей. Легко видеть, что эта матрица в точности совпадает с матрицей Сильвестра, которая рассматривалась выше. Таким образом, комплекс Кошуля в известном смысле добавляет к матрице Сильвестра другие матрицы, которые несут дополнительную информацию. Обозначим через d_i матрицу дифференциала Кошуля между i -м и $(i+1)$ -м пространствами комплекса. Тогда результат системы f можно найти как определенную функцию от этих матриц:

$$R_{n|r}\{f_1, \dots, f_n\} = \text{DET}(d_1, \dots, d_{p-1}). \quad (4)$$

Эта функция называется *детерминантом комплекса* (не следует путать ее с детерминантом одной матрицы). Такая “детерминантная” терминология была введена Кэли, который впервые изучал $\text{DET}(d_1, \dots, d_{p-1})$, и не вполне типична для современной литературы, где $\text{DET}(d_1, \dots, d_{p-1})$ называется кручением (Радемайстера) [8] комплекса $d_1, \dots, d_{p-1}$. Поскольку эта величина является довольно естественным обобщением определителя с линейных пространств на комплексы, мы предпочитаем использовать исторически сложившееся название “детерминант комплекса”. Вычисление детерминантов комплексов подробно описано в работах [3], [9]. Для вычисления детерминанта комплекса $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{p-1}} L_p$ с нулевой эйлеровой характеристикой

$$\chi = \dim L_1 - \dim L_2 + \dim L_3 - \dots - (-1)^p \dim L_p = 0$$

необходимо выбрать базис в каждом линейном пространстве L_i и пронумеровать базисные векторы элементами множества $\{1, \dots, l_i\}$, $l_i = \dim L_i$. В результате этой операции комплекс будет представлен цепочкой прямоугольных $(l_i \times l_{i+1})$ -матриц d_i с l_i строками и l_{i+1} столбцами. Чтобы вычислить детерминант комплекса, нужно выбрать произвольные подмножества $\sigma_i \subset \{1, \dots, l_i\}$, состоящие из $|\sigma_i| = \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k+1} l_k$ элементов, т. е.

$$|\sigma_1| = 0, \quad |\sigma_2| = l_1, \quad |\sigma_3| = l_2 - l_1, \quad |\sigma_4| = l_3 - l_2 + l_1, \quad \dots,$$

и задать сопряженные подмножества $\tilde{\sigma}_i = \{1, \dots, l_i\} \setminus \sigma_i$, которые состоят из $|\tilde{\sigma}_i| = l_i - |\sigma_i| = |\sigma_{i+1}|$ элементов. Наконец, необходимо вычислить минор M_i матрицы d_i , который занимает строки с номерами из множества $\tilde{\sigma}_i$ и столбцы с номерами из множества σ_{i+1} . Тогда детерминант комплекса равен

$$\text{DET}(d_1, \dots, d_{p-1}) = \prod_{i=1}^{p-1} M_i^{(-1)^{p+i+1}} = \frac{M_{p-1} M_{p-3} \dots}{M_{p-2} M_{p-4} \dots}. \quad (5)$$

В действительности ответ не зависит от выбора подмножеств σ_i [8], и поэтому дает практический метод вычисления результатов полиномиальных систем. Для данной

системы уравнений непосредственным образом строятся дифференциал (3) и линейные пространства (2), по вышеописанной процедуре вычисляются матрицы этого дифференциала и используется формула (5) для нахождения результата как детерминанта комплекса. Ответ, получаемый таким способом, записан в излишне сложном виде в двух смыслах: во-первых, отношение миноров в правой части в действительности сводится к полиному (числитель всегда делится на знаменатель), но это сокращение нельзя увидеть в (5); во-вторых, правая часть фактически не зависит от выбора конкретного комплекса Кошуля (конкретного параметра R), но эта независимость также не видна в (5). Несмотря на эти недостатки, комплекс Кошуля дает явный алгоритм для вычисления результата, эффективный для небольших значений n и r .

Чтобы проиллюстрировать метод комплекса Кошуля, рассмотрим более детально случай $n = 3$, $r = 2$, т.е. систему трех квадратных уравнений от трех неизвестных. Обозначим их коэффициенты буквами a, b, c вместо обычных f, g, h :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2. \end{aligned}$$

По определению дифференциал Кошуля в данном случае равен

$$\hat{d} = f_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3}.$$

Выбор комплекса Кошуля, как было описано выше, зависит от параметра R , при этом простейший комплекс с нулевой эйлеровой характеристикой соответствует $R = 4$, а следующий по простоте соответствует $R = 5$. Опишем оба этих комплекса.

Случай $R = 4$ соответствует комплексу $\Omega(0, 2) \rightarrow \Omega(2, 1) \rightarrow \Omega(4, 0)$ с размерностями линейных пространств $3 \rightarrow 18 \rightarrow 15$. Выберем базис в пространстве $\Omega(0, 2)$ как

$$\{\theta_2\theta_3, \theta_1\theta_3, \theta_1\theta_2\};$$

в пространстве $\Omega(2, 1)$ – как

$$\begin{aligned} \{x_1^2\theta_3, x_1^2\theta_2, x_1^2\theta_1, x_1x_2\theta_3, x_1x_2\theta_2, x_1x_2\theta_1, x_1x_3\theta_3, x_1x_3\theta_2, \\ x_1x_3\theta_1, x_2^2\theta_3, x_2^2\theta_2, x_2^2\theta_1, x_2x_3\theta_3, x_2x_3\theta_2, x_2x_3\theta_1, x_3^2\theta_3, x_3^2\theta_2, x_3^2\theta_1\}; \end{aligned}$$

наконец, в пространстве $\Omega(4, 0)$ – как

$$\begin{aligned} \{x_1^4, x_1^3x_2, x_1^3x_3, x_1^2x_2^2, x_1^2x_2x_3, x_1^2x_3^2, x_1x_2^3, x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2, \\ x_1x_3^3, x_2^4, x_2^3x_3, x_2^2x_3^2, x_2x_3^3, x_3^4\}. \end{aligned}$$

Тогда дифференциал Кошуля представляется двумя матрицами – размера 3×18 и размера 18×15 . Выбирая три некоторых столбца в $\hat{d}_1$ и комплементарные пятнадцать строк в $\hat{d}_2$, мы получим желаемый результат как отношение (15×15) -минора второй матрицы к (3×3) -минору первой матрицы.

Аналогично, случай $R = 5$ соответствует комплексу $\Omega(1, 2) \rightarrow \Omega(3, 1) \rightarrow \Omega(5, 0)$ с размерностями $9 \rightarrow 30 \rightarrow 21$. Выберем базис в пространстве $\Omega(1, 2)$ как

$$\{x_1\theta_2\theta_3, x_1\theta_1\theta_3, x_1\theta_1\theta_2, x_2\theta_2\theta_3, x_2\theta_1\theta_3, x_2\theta_1\theta_2, x_3\theta_2\theta_3, x_3\theta_1\theta_3, x_3\theta_1\theta_2\};$$

базис в пространстве $\Omega(3, 1)$ – как

$$\begin{aligned} &\{x_1^3\theta_3, x_1^3\theta_2, x_1^3\theta_1, x_1^2x_2\theta_3, x_1^2x_2\theta_2, x_1^2x_2\theta_1, x_1^2x_3\theta_3, x_1^2x_3\theta_2, x_1^2x_3\theta_1, x_1x_2^2\theta_3, \\ &x_1x_2^2\theta_2, x_1x_2^2\theta_1, x_1x_2x_3\theta_3, x_1x_2x_3\theta_2, x_1x_2x_3\theta_1, x_1x_3^2\theta_3, x_1x_3^2\theta_2, x_1x_3^2\theta_1, x_2^3\theta_3, x_2^3\theta_2, \\ &x_2^3\theta_1, x_2^2x_3\theta_3, x_2^2x_3\theta_2, x_2^2x_3\theta_1, x_2x_3^2\theta_3, x_2x_3^2\theta_2, x_2x_3^2\theta_1, x_3^3\theta_3, x_3^3\theta_2, x_3^3\theta_1, \\ &x_1x_3\theta_1, x_2^2\theta_3, x_2^2\theta_2, x_2^2\theta_1, x_2x_3\theta_3, x_2x_3\theta_2, x_2x_3\theta_1, x_3^2\theta_3, x_3^2\theta_2, x_3^2\theta_1\}; \end{aligned}$$

наконец, базис в пространстве $\Omega(5, 0)$ – как

$$\begin{aligned} &\{x_1^5, x_1^4x_2, x_1^4x_3, x_1^3x_2^2, x_1^3x_2x_3, x_1^3x_3^2, x_1^2x_2^3, x_1^2x_2^2x_3, x_1^2x_2x_3^2, x_1^2x_3^3, \\ &x_1x_2^4, x_1x_2^3x_3, x_1x_2^2x_3^2, x_1x_2x_3^3, x_1x_3^4, x_2^5, x_2^4x_3, x_2^3x_3^2, x_2^2x_3^3, x_2x_3^4, x_3^5\}. \end{aligned}$$

Тогда комплекс Кошуля представляется двумя матрицами – размера 9×30 и размера 30×21 . Выбирая некоторые девять столбцов в $\hat{d}_1$ и комплементарную двадцать одну строку в $\hat{d}_2$, мы получим желаемый результат как отношение (21×21) -минора второй матрицы к (9×9) -минору первой матрицы. Прямое вычисление миноров и деление одного на другой показывает, что эта процедура действительно дает правильный ответ для результата, совпадающий также с результатом вычисления для $R = 4$. Аналогично для всех $R \geq R_{\min}$, где в данном случае $R_{\min} = 4$, детерминант комплекса Кошуля равен результату системы.

3.1.3. Формула Маколея. Второе – скорее комбинаторное, чем гомологическое – обобщение формулы Сильвестра на старшие размерности было впервые исследовано Маколеем. Этот метод позволяет выразить результат как отношение ровно двух детерминантов (для комплексов Кошуля (5) и числитель, и знаменатель имеют вид произведения нескольких детерминантов). По этой причине формула Маколея является более экономной с вычислительной точки зрения, чем формула (5). В настоящей статье мы не рассматриваем эту формулу более детально, подробности можно найти в работе [10].

3.2. Формулы типа Безу. Рассмотрим систему (1), где

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{a_1 + \dots + a_n = r} f_{i|a_1 \dots a_n} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}.$$

Если рассматривать каждый из полиномов системы как линейную комбинацию мономов, то в базисе из этих мономов система описывается прямоугольной $(n \times C_{n+r-1}^r)$ -матрицей. Множество всех $(n \times n)$ -миноров этой матрицы, естественно, представляет собой тензор с n индексами: $M_{i_1 \dots i_n}$ есть $(n \times n)$ -минор прямоугольной матрицы f , расположенный в столбцах с номерами $i_1, \dots, i_n$. Результат $R\{f_1, \dots, f_n\}$ записывается как однородный полином по переменным $M_{i_1 \dots i_n}$ степени r^{n-1} . Такие выражения называются формулами типа Безу.

Простейший пример этих формул соответствует $n = 2$, $r = 1$, когда система уравнений имеет вид

$$f_1x_1 + f_2x_2 = 0, \quad g_1x_1 + g_2x_2 = 0$$

и ее единственный (2×2) -минор есть $M_{12} = f_1g_2 - f_2g_1$. В этом случае результат просто равен этому минору: $R_{2|1}\{f, g\} = M_{12}$.

В следующем по сложности случае $n = 2$, $r = 2$ система уравнений имеет вид

$$f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0, \quad g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

У нее есть три (2×2) -минора

$$M_{12} = f_{11}g_{12} - f_{12}g_{11}, \quad M_{13} = f_{11}g_{22} - f_{22}g_{11}, \quad M_{23} = f_{12}g_{22} - f_{22}g_{12},$$

а результат является полиномом второй степени по этим минорам, который, более того, имеет структуру детерминанта:

$$R_{2|2}\{f, g\} = M_{12}M_{23} - M_{13}^2 = \det \begin{pmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{13} & M_{23} \end{pmatrix}.$$

Для $n = 2$, $r = 3$ система уравнений

$$f_{111}x_1^3 + f_{112}x_1^2x_2 + f_{122}x_1x_2^2 + f_{222}x_2^3 = 0, \quad g_{111}x_1^3 + g_{112}x_1^2x_2 + g_{122}x_1x_2^2 + g_{222}x_2^3 = 0$$

имеет шесть (2×2) -миноров. В этом случае результат является полиномом третьей степени по минорам и снова имеет структуру детерминанта:

$$\begin{aligned} R_{2|3}\{f, g\} &= M_{12}M_{34}M_{14} + M_{12}M_{34}M_{23} - M_{12}M_{24}^2 - M_{13}^2M_{34} + 2M_{13}M_{14}M_{24} - \\ &- M_{14}^3 - M_{14}^2M_{23} = \det \begin{pmatrix} M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{13} & M_{23} + M_{14} & M_{23} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что шесть переменных M_{ij} не являются независимыми: они связаны равенством $M_{12}M_{34} - M_{13}M_{24} + M_{14}M_{23} = 0$, которое хорошо известно как соотношение Пюккера. По этой причине приведенное выше полиномиальное выражение для результата через миноры не является единственным: есть много подобных выражений, разности которых пропорциональны соотношению Пюккера. В общем случае (для произвольных n и r) число соотношений Пюккера может быть больше одного. Переменные $M_{i_1 \dots i_n}$ иногда называют координатами Пюккера. Формулы Безу, выражающие результат через координаты Пюккера, существуют и в старших размерностях: к примеру, в случае $n = 3$, $r = 2$ система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{13}x_1x_3 + f_{22}x_2^2 + f_{23}x_2x_3 + f_{33}x_3^2 = 0, \\ g(x_1, x_2, x_3) &= g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{22}x_2^2 + g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2 = 0, \\ h(x_1, x_2, x_3) &= h_{11}x_1^2 + h_{12}x_1x_2 + h_{13}x_1x_3 + h_{22}x_2^2 + h_{23}x_2x_3 + h_{33}x_3^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

и у нее есть двадцать (3×3) -миноров. Мы вновь имеем ровно одно соотношение Плюккера

$$\begin{aligned} & M_{123}M_{456} - M_{124}M_{356} + M_{125}M_{346} - M_{126}M_{345} + M_{134}M_{256} - \\ & - M_{135}M_{246} + M_{136}M_{245} + M_{145}M_{236} - M_{146}M_{235} + M_{156}M_{234} = 0. \end{aligned}$$

С этой точки зрения случай $n = 3, r = 2$ аналогичен случаю $n = 2, r = 4$. Возможно, это совпадение является случайным, но оно не единственное: в разделе 5, посвященном интегральным дискриминантам, указано еще одно сходство между этими случаями. Результат является однородным полиномом четвертой степени по минорам, который не имеет структуры детерминанта матрицы (или, по крайней мере, такая матрица еще не найдена). Вместо этого данный полином является пфаффианом, $R_{3|2}\{f, g, h\} = \text{pfaff } A$, следующей антисимметричной (8×8) -матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{356} & M_{456} & M_{246} & M_{156} & M_{146} & M_{256} & M_{346} \\ -M_{356} & 0 & -M_{346} & M_{146} & M_{136} & M_{126} & M_{236} & M_{156} - M_{236} \\ -M_{456} & M_{346} & 0 & M_{245} & M_{146} & M_{145} & M_{246} & M_{345} \\ -M_{246} & -M_{146} & -M_{245} & 0 & M_{134} & M_{124} & M_{234} - M_{145} & -M_{234} \\ -M_{156} & -M_{136} & -M_{146} & -M_{134} & 0 & M_{123} & -M_{126} & M_{126} - M_{135} \\ -M_{146} & -M_{126} & -M_{145} & -M_{124} & -M_{123} & 0 & M_{134} - M_{125} & -M_{134} \\ -M_{256} & -M_{236} & -M_{246} & -M_{234} + M_{145} & M_{126} & -M_{134} + M_{125} & 0 & M_{146} - M_{235} \\ -M_{346} & -M_{156} + M_{236} & -M_{345} & M_{234} & -M_{126} + M_{135} & M_{134} & -M_{146} + M_{235} & 0 \end{pmatrix}$$

(обозначим ее через A). Пфаффианом матрицы A называется следующее выражение:

$$\text{pfaff } A = \epsilon_{i_1 \dots i_8} A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} A_{i_5 i_6} A_{i_7 i_8},$$

где $\epsilon_{i_1 \dots i_8}$ обозначает полностью антисимметричный тензор (проще говоря, операцию антисимметризации по индексам $i_1, \dots, i_8$). Кроме этого, пфаффиан равен квадратному корню из детерминанта, поскольку для антисимметричных матриц детерминант всегда представляется в виде полного квадрата. Соотношение $R_{3|2}\{f, g, h\} = \text{pfaff } A$ рассмотрено в статье [11], где переменные M_{ijk} интерпретируются как координаты на некотором грассмановом многообразии. Как ожидается, результат общего вида является полиномом степени r^{n-1} от переменных $M_{i_1 \dots i_n}$. Нахождение явной формулы для такого полинома является открытой задачей.

3.3. Формулы смешанного типа Сильвестра–Безу. Объединяя вышеописанные методы Сильвестра и Безу, можно существенно увеличить количество случаев, в которых результат выражается как некоторый полином (обычно детерминант), причем нет необходимости делить полиномы друг на друга, что характерно для формулы Кошуля. Простейший пример такого синтеза соответствует $n = 3, r = 2$, когда система уравнений имеет вид (6). Эта система может быть записана с помощью прямоугольной (3×6) -матрицы, и еще одна (3×6) -матрица нужна для того, чтобы дополнить ее до квадратной (6×6) -матрицы. Замечательно, что такую дополняющую матрицу можно элегантно построить в явном виде, используя якобиан

$$J(x_1, x_2, x_3) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad f_1 \equiv f, \quad f_2 \equiv g, \quad f_3 \equiv h,$$

который является однородным полиномом третьей степени по x_1, x_2, x_3 и в то же время полиномом третьей степени по коэффициентам функций f, g, h . Якобиан может быть выражен через координаты Плюккера M_{ijk} следующим образом:

$$\begin{aligned} J(x_1 x_2 x_3) = & M_{123} x_1^3 + (-2M_{134} + M_{125}) x_1^2 x_2 + (2M_{126} - M_{135}) x_1^2 x_3 + \\ & + (-M_{234} + 2M_{145}) x_1 x_2^2 + (-M_{235} + 4M_{146}) x_1 x_2 x_3 + (-M_{236} + 2M_{156}) x_1 x_3^2 + \\ & + M_{245} x_2^3 + (2M_{246} + M_{345}) x_2^2 x_3 + (M_{256} + 2M_{346}) x_2 x_3^2 + M_{356} x_3^3. \end{aligned}$$

Производные от J являются однородными квадратичными полиномами по x_1, x_2, x_3 , как и сами функции f, g, h :

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \partial J / \partial x_1 \\ \partial J / \partial x_2 \\ \partial J / \partial x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix},$$

где матрица B имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{22} & f_{23} & f_{33} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{22} & g_{23} & g_{33} \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{22} & h_{23} & h_{33} \\ 3M_{123} & -4M_{134} + 2M_{125} & -2M_{135} + 4M_{126} & -M_{234} + 2M_{145} & -M_{235} + 4M_{146} & -M_{236} + 2M_{156} \\ -2M_{134} + M_{125} & 4M_{145} - 2M_{234} & -M_{235} + 4M_{146} & 3M_{245} & 2M_{345} + 4M_{246} & M_{256} + 2M_{346} \\ 2M_{126} - M_{135} & -M_{235} + 4M_{146} & -2M_{236} + 4M_{156} & M_{345} + 2M_{246} & 2M_{256} + 4M_{346} & 3M_{356} \end{pmatrix}$$

и наполовину состоит из коэффициентов функций (и поэтому похожа на формулы Сильвестра), наполовину – из переменных Плюккера (и поэтому напоминает формулы Безу). Оказывается, что детерминант этой матрицы равен результанту $R_{3|2}\{f, g, h\}$. В компактной записи эту формулу можно представить как

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = \det_{6 \times 6} \left\{ f, g, h, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \frac{\partial J}{\partial x_3} \right\},$$

где $\det\{\dots\}$ обозначает детерминант матрицы, получаемой при разложении полиномов в скобках по базису из мономов.

Существует и другая возможность составить квадратную матрицу из исходной системы. Для этого нужно рассмотреть в духе Сильвестра систему из девяти полиномов $x_i f_j$, которые являются однородными полиномами третьей степени, и дополнить эту систему якобианом. В этом случае получится матрица размера 10×10 , определитель которой снова равен детерминанту:

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = \det_{10 \times 10} \{x_1 f, x_1 g, x_1 h, x_2 f, x_2 g, x_2 h, x_3 f, x_3 g, x_3 h, J\}.$$

Итак, согласно методу Сильвестра–Безу для того чтобы сделать матрицу Сильвестра квадратной, необходимо добавить к ней несколько строк (несколько полиномов),

которые зависят от переменных Плюккера. Этот метод особенно эффективен для трех переменных. В случае $r > 2$ дополнительные полиномы строятся при помощи производящей функции

$$\mathcal{J}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{1}{r-1} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} p_k + \frac{1}{(r-1)(r-2)} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} p_k p_l + \dots \right). \quad (7)$$

Величина $\mathcal{J}$, подобная якобиану, может быть представлена в виде ряда по дополнительным переменным $p_1, \dots, p_n$:

$$\mathcal{J}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = J(x_1, \dots, x_n) + J_i(x_1, \dots, x_n) p_i + \frac{1}{2!} J_{ij}(x_1, \dots, x_n) p_i p_j + \dots$$

Заметим, что в этом ряде $J(x_1, \dots, x_n)$ есть не что иное, как обычный якобиан, а $J_i(x_1, \dots, x_n)$ – в точности его производные. В то же время величины $J_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ являются новыми и нетривиальными (в частности, они не являются вторыми производными от якобиана).

В следующем по сложности случае $n = 3$, $r = 3$ формулы Сильвестра–Безу принимают вид

$$R_{3|3}\{f_1, f_2, f_3\} = \det_{21 \times 21} \{x_i x_j f_k, J_l\} = \det_{15 \times 15} \{x_i f_j, J_{kl}\}.$$

Мы видим что, как и в случае $r = 2$, существуют две различные формулы.

В следующем случае $n = 3$, $r = 4$ имеем

$$R_{3|4}\{f_1, f_2, f_3\} = \det_{36 \times 36} \{x_i x_j x_k f_l, J_{pq}\} = \det_{28 \times 28} \{x_i x_j f_k, J_{lpq}\}.$$

Для $n = 3$ и произвольного r есть две формулы типа Сильвестра–Безу:

$$\begin{aligned} R_{3|r}\{f_1, f_2, f_3\} &= \det_{r(2r+1) \times r(2r+1)} \{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} f_j, J_{k_1 \dots k_{r-2}}\} = \\ &= \det_{r(2r-1) \times r(2r-1)} \{x_{i_1} \dots x_{i_{r-2}} f_j, J_{k_1 \dots k_{r-1}}\}. \end{aligned}$$

Что касается старших размерностей $n > 3$, явная формула такого типа известна лишь для $n = 4$, $r = 2$:

$$R_{4|2}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \det_{20 \times 20} \{x_i f_j, J_k\}. \quad (8)$$

Для старших n и r подобные формулы являются открытым направлением исследований [12].

3.4. Формулы типа Шура. Для результатов также можно написать существенно другие формулы, которые связаны с определенной аналитической структурой логарифма результата, описанной в работах [13]. Под аналитической структурой мы понимаем, что логарифм результата системы (1) зависит от полиномов

$f_1, \dots, f_n$ весьма специфическим образом, и эту зависимость существенно легче понять, чем зависимость от $f_1, \dots, f_n$ самого результата. Для более конкретного выражения этого факта используются два соотношения. Первое из них – это операторная формула

$$\ln R_{r_1, \dots, r_n}(I - f) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1}{(r_1 k)!} (\hat{f}_1)^k \right] \dots \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_n}{(r_n k)!} (\hat{f}_n)^k \right] \cdot \ln \det(I - A) \Big|_{A=0},$$

где A в данном случае представляет собой вспомогательную $(n \times n)$ -матрицу, а $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$ суть дифференциальные операторы,

$$\hat{f}_1 = f_1 \left(\frac{\partial}{\partial A_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_{1n}} \right), \quad \dots, \quad \hat{f}_n = f_n \left(\frac{\partial}{\partial A_{n1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_{nn}} \right),$$

связанные с полиномами $f_1, \dots, f_n$. Второе соотношение – это контурно-интегральная формула

$$\ln R\{f_1, \dots, f_n\} = \oint \dots \oint \ln f_1 d \ln f_2 \wedge \dots \wedge d \ln f_n + r_1 \ln R\{f_2, \dots, f_n\} \Big|_{x_1=0}, \quad (9)$$

где контурные интегралы являются $(n-1)$ -кратными и $f_i = f_i(1, z_1, \dots, z_{n-1})$. Предполагается, что контур интегрирования обходит все общие корни системы уравнений

$$f_k(1, z_1, \dots, z_{n-1}) = 0, \quad k = 2, \dots, n$$

(подробности см. в статьях [13]). Явная формула для $\ln R$ получается после нескольких итераций (9): для $n = 2$

$$\ln R_{r_1, r_2}\{f_1, f_2\} = \oint \ln f_1(1, z) d \ln f_2(1, z) + r_1 \ln f_2(0, 1);$$

для $n = 3$

$$\begin{aligned} \ln R_{r_1, r_2, r_3}\{f_1, f_2, f_3\} = & \oint \oint \ln f_1(1, z_1, z_2) d \ln f_2(1, z_1, z_2) \wedge d \ln f_3(1, z_1, z_2) + \\ & + r_1 \oint \ln f_2(0, 1, z) d \ln f_3(0, 1, z) + r_1 r_2 \ln f_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

и т. д. Таким образом, логарифм результата выражается через простые контурные интегралы. Чтобы получить R из $\ln R$, можно просто проэкспоненцировать последний. Используя эту формулу, можно воспроизвести известное выражение для результата двух полиномов через их корни: если

$$f_1(1, z) = a \prod_{i=1}^{r_1} (z - \alpha_i), \quad f_2(1, z) = b \prod_{i=1}^{r_2} (z - \beta_i),$$

то

$$\begin{aligned} R_{r_1, r_2}\{f_1, f_2\} = & \exp \left(\sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \oint \ln(z - \alpha_i) d \ln(z - \beta_j) + r_2 \ln a + r_1 \ln b \right) = \\ = & a^{r_2} b^{r_1} \prod_{i=1}^{r_1} \prod_{j=1}^{r_2} (\beta_j - \alpha_i). \end{aligned}$$

Экспоненциальная формула и ее прямые аналоги для $n > 2$ имеют несколько преимуществ. Разумеется, самое важное из них – это простота и явный характер этих формул: они имеют прозрачную структуру, которую легко запомнить и понять. Другое преимущество – универсальность: их можно легко написать для произвольного n , а не только для первых нескольких значений. Однако у них есть и серьезный недостаток. Как известно, результат является однородным полиномом степени $d_i = r_1 r_2 \dots r_n / r_i$ по коэффициентам i -го уравнения $f_i = 0$ и степени

$$d = d_1 + \cdots + d_n = r_1 r_2 \dots r_n \left(\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} \right)$$

по коэффициентам всех уравнений, но эта полиномиальная структура результата совершенно не видна в экспоненциальной формуле. Поэтому данная формула не вполне удобна для практических вычислений результатов (хотя она может быть крайне полезна в теоретических выкладках).

Чтобы превратить экспоненциальные формулы в инструмент практических вычислений, применим формулу (9) к *сдвинутой* системе

[illegible]

а затем разложим сдвинутые логарифмы в подынтегральном выражении в ряд Тейлора по степеням “спектральных параметров” λ_i . Тогда мы получим следующее разложение в ряд:

$$\ln R\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\} = - \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1, \dots, k_n}\{f_1, \dots, f_n\} \cdot \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \quad (11)$$

(знак минус можно ставить или не ставить в зависимости от соглашения), где конкретные компоненты разложения $T_{k_1, \dots, k_n}$ – однородные полиномы степени k_i по коэффициентам f_i . Мы называем их *следами* системы (10). Экспоненцируя, мы получаем результат сдвинутой системы:

$$R\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\} = \exp\left(-\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1, \dots, k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}\right).$$

Исходный результат $R\{f_1, \dots, f_n\}$, очевидно, равен произведению $(-1)^d$ на коэффициент при $\lambda_1^{d_1} \dots \lambda_n^{d_n}$ в $R\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\}$. Мы можем извлечь этот коэффициент, разлагая правую часть последнего равенства в ряд по положительным степеням λ_i :

$$\exp\left(-\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}T_{k_1,\dots,k_n}\cdot\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\mathcal{P}_{k_1,\dots,k_n}\cdot\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}.$$

Такое разложение в ряд величины $e^{S(x)}$, где $S(x)$ также является рядом (возможно, от нескольких переменных), часто называется *разложением Шура*. Из него следует

следующее соотношение между компонентами рядов:

$$\mathcal{P}_{k_1, \dots, k_n} = \sum_{m=1}^{k_1 + \dots + k_n} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_m = \vec{k}} T_{\vec{v}_1} \dots T_{\vec{v}_m},$$

где сумма берется по всем упорядоченным разбиениям вектора $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$ на m векторов, обозначенных через $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$. Под упорядоченным разбиением понимается способ записи вектора с целочисленными неотрицательными компонентами как суммы векторов с такими же компонентами, в которой важен порядок слагаемых. Полиномы $\mathcal{P}_{k_1, \dots, k_n}(T)$ часто называются полиномами Шура от многих переменных. Несколько первых полиномов Шура имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,0} &= -T_{1,0}, & \mathcal{P}_{2,0} &= -T_{2,0} + \frac{T_{1,0}^2}{2}, \\ \mathcal{P}_{2,1} &= -T_{2,1} + T_{2,0}T_{0,1} + T_{1,0}T_{1,1} - \frac{T_{1,0}^2 T_{0,1}}{2}, \\ \mathcal{P}_{2,1,0} &= -T_{2,1,0} + T_{2,0,0}T_{0,1,0} + T_{1,0,0}T_{1,1,0} - \frac{T_{1,0,0}^2 T_{0,1,0}}{2}, \\ \mathcal{P}_{1,1,1} &= -T_{1,1,1} + T_{1,0,0}T_{0,1,1} + T_{0,1,0}T_{1,0,1} + T_{1,1,0}T_{0,0,1} - T_{0,1,0}T_{0,0,1}T_{1,0,0}. \end{aligned}$$

Результант сам является полиномом Шура:

$$R\{f_1, \dots, f_n\} = (-1)^d \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n} = \sum_{m=1}^d \frac{(-1)^{m+d}}{m!} \sum_{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_m = \vec{d}} T_{\vec{v}_1} \dots T_{\vec{v}_m}. \quad (12)$$

Явная формула для следов имеет вид [13]

$$T_{\vec{k}} = T_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{k_1 \dots k_n} \sum_{r_{ij}} \det_{2 \leq i, j \leq n} (\delta_{ij} r_i k_i - r_{ij}) \prod_{i=1}^n (f_i)_{r_{i1}, \dots, r_{in}}^{k_i}, \quad (13)$$

где $(f)_{j_1, \dots, j_n}^{k_i}$ – коэффициент при $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ в $f(x_1, \dots, x_n)^k$ и суммирование ведется по всем неотрицательным целочисленным $(n \times n)$ -матрицам r_{ij} таким, что сумма элементов в i -м столбце или i -й строке фиксирована и равна $r_i k_i$. Формула (13) верна для положительных $k_1, \dots, k_n$. Случаи, когда $k_i = 0$ при некоторых i , также не представляют никакой сложности. Если $k_i = 0$, то

$$T_{k_1, \dots, k_n} \{f_1, \dots, f_n\} = r_i T_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n} \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\} \Big|_{x_i=0},$$

где след в правой части берется по переменным $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Несложно вывести эти формулы, разлагая в ряд логарифмы в подынтегральном выражении в (9). Операторный подход дает аналогичные и даже в чем-то более простые формулы [13]:

$$T_{k_1, \dots, k_n} \{f_1, \dots, f_n\} = \frac{r_1 \hat{f}_1^{k_1}}{(r_1 k_1)!} \dots \frac{r_n \hat{f}_n^{k_n}}{(r_n k_n)!} \cdot \frac{\text{tr } A^{r_1 k_1 + \dots + r_n k_n}}{r_1 k_1 + \dots + r_n k_n} \Big|_{A=0}. \quad (14)$$

Вместе формулы (12) и (13) (или (14)) дают явный алгоритм для вычисления результата, не содержащий деления полиномов. Как ожидается, с вычислительной точки зрения отсутствие деления полиномов должно быть преимуществом этого алгоритма по сравнению с алгоритмом комплекса Кошуля.

Чтобы проиллюстрировать эти общие формулы, рассмотрим конкретный случай $n = 3$ и $r = 2$, когда система уравнений имеет вид (7). Вычисляя следы с помощью формулы (14) и используя операторы

$$\begin{aligned}\hat{f} &= f_{11} \left(\frac{\partial}{\partial A_{11}} \right)^2 + f_{12} \frac{\partial^2}{\partial A_{11} \partial A_{12}} + f_{13} \frac{\partial^2}{\partial A_{11} \partial A_{13}} + \\ &\quad + f_{22} \left(\frac{\partial}{\partial A_{12}} \right)^2 + f_{23} \frac{\partial^2}{\partial A_{12} \partial A_{13}} + f_{33} \left(\frac{\partial}{\partial A_{13}} \right)^2, \\ \hat{g} &= g_{11} \left(\frac{\partial}{\partial A_{21}} \right)^2 + g_{12} \frac{\partial^2}{\partial A_{21} \partial A_{22}} + g_{13} \frac{\partial^2}{\partial A_{21} \partial A_{23}} + \\ &\quad + g_{22} \left(\frac{\partial}{\partial A_{22}} \right)^2 + g_{23} \frac{\partial^2}{\partial A_{22} \partial A_{23}} + g_{33} \left(\frac{\partial}{\partial A_{23}} \right)^2, \\ \hat{h} &= h_{11} \left(\frac{\partial}{\partial A_{31}} \right)^2 + h_{12} \frac{\partial^2}{\partial A_{31} \partial A_{32}} + h_{13} \frac{\partial^2}{\partial A_{31} \partial A_{33}} + \\ &\quad + h_{22} \left(\frac{\partial}{\partial A_{32}} \right)^2 + h_{23} \frac{\partial^2}{\partial A_{32} \partial A_{33}} + h_{33} \left(\frac{\partial}{\partial A_{33}} \right)^2,\end{aligned}$$

мы получаем

$$T_1 = 4f_{11} + 4g_{22} + 4h_{33},$$

$$T_2 = 4f_{11}^2 + 4g_{12}f_{12} + 4h_{13}f_{13} + 8g_{11}f_{22} + 8h_{11}f_{33} + 4g_{22}^2 + 8g_{33}h_{22} + 4g_{23}h_{23} + 4h_{33}^2$$

и т. д. Результат системы имеет степень 12 и выражается через следы:

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = P_{12} \left\{ \frac{-T_k(f)}{k} \right\} = -\frac{1}{12} T_{12} + \frac{1}{72} T_6^2 + \frac{1}{35} T_5 T_7 + \frac{1}{32} T_4 T_8 + \frac{1}{27} T_3 T_9 + \dots,$$

где приведена лишь часть слагаемых ввиду громоздкости полного выражения.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТА

Дискриминант является частным случаем результата для градиентных систем уравнений. Поскольку дискриминант зависит лишь от одного однородного полинома (вместо n однородных полиномов в случае результата), он несколько проще, чем результат, имеет большую симметрию и для него можно применять специфические методы вычисления. Эти методы и составляют содержание данного раздела.

4.1. Выражение дискриминанта через инварианты. Пусть $S(x_1, \dots, x_n)$ – однородный полином степени r по n переменным. Тогда дискриминант S – это полиномиальный $SL(n)$ -инвариант формы S . Следовательно, он должен иметь вид полинома по некоторым более простым (базисным) инвариантам, которые можно описывать, в числе прочих, с помощью элегантного метода диаграммной техники [1].

Рис. 1. Детерминант матрицы S_{ij} как диаграмма тензорной свертки. Черные двухвалентные вершины представляют тензор S , белые n -валентные вершины – тензор ϵ .

Рис. 2. Инвариант I_4 степени 4 для 3-формы от двух переменных как диаграмма тензорной свертки. Черные трехвалентные вершины представляют тензор S , белые двухвалентные вершины – тензор ϵ .

Простейший пример такого описания дает детерминант, изображенный на рис. 1. В то же время простейший нетривиальный (т. е. негауссов) пример – это 3-форма от двух переменных:

$$S(x_1, x_2) = S_{111}x_1^3 + 3S_{112}x_1^2x_2 + 3S_{122}x_1x_2^2 + S_{222}x_2^3.$$

В соответствии с числом степеней свободы (числом функционально независимых инвариантов) в данном случае есть лишь один независимый инвариант I_4 , изображенный на рис. 2. Индекс 4 обозначает степень этого инварианта, и далее нам кажется удобным обозначать элементарные инварианты степени k через I_k . Несложно выписать алгебраическое выражение, соответствующее этой диаграмме:

$$I_4 = S_{i_1 i_2 i_3} S_{j_1 j_2 j_3} S_{k_1 k_2 k_3} S_{l_1 l_2 l_3} \epsilon^{i_1 j_1} \epsilon^{i_2 j_2} \epsilon^{k_1 l_1} \epsilon^{k_2 l_2} \epsilon^{i_3 k_3} \epsilon^{j_3 l_3}.$$

Вычисляя эту сумму, мы получаем следующую явную формулу для I_4 :

$$I_4 = 2S_{111}^2 S_{222}^2 - 12S_{111} S_{112} S_{122} S_{222} + 8S_{111}^3 S_{122}^3 + 8S_{112}^3 S_{222}^3 - 6S_{112}^2 S_{122}^2,$$

Рис. 3. Инварианты для 4-формы от двух переменных как диаграммы тензорной свертки: инвариант I_2 (а) и инвариант I_3 (б). Черные четырехвалентные вершины представляют тензор S , белые двухвалентные вершины – тензор ϵ .

в которой несложно узнать дискриминант $D_{2|3}$ кубической формы S :

$$D_{2|3} = I_4. \quad (15)$$

Следующий по сложности пример – это 4-форма от двух переменных, которая может быть записана как

$$S(x_1, x_2) = S_{1111}x_1^4 + 4S_{1112}x_1^3x_2 + 6S_{1122}x_1^2x_2^2 + 4S_{1222}x_1x_2^3 + S_{2222}x_2^4.$$

В соответствии с числом степеней свободы в данном случае имеются два независимых инварианта. Они имеют сравнительно низкие степени 2 и 3, обозначаются через I_2 и I_3 и даются диаграммами на рис. 3. Рассматривая эти диаграммы, несложно написать алгебраические выражения для I_2 , I_3 :

$$I_2 = S_{i_1i_2i_3i_4}S_{j_1j_2j_3j_4}\epsilon^{i_1j_1}\epsilon^{i_2j_2}\epsilon^{i_3j_3}\epsilon^{i_4j_4},$$

$$I_3 = S_{i_1i_2i_3i_4}S_{j_1j_2j_3j_4}S_{k_1k_2k_3k_4}\epsilon^{i_1j_1}\epsilon^{i_2j_2}\epsilon^{i_3k_1}\epsilon^{i_4k_2}\epsilon^{j_3k_3}\epsilon^{j_4k_4}.$$

Вычисляя эти суммы, получаем следующие явные формулы для I_2 и I_3 :

$$I_2 = 2S_{1111}S_{2222} - 8S_{1112}S_{1222} + 6S_{1122}^2,$$

$$I_3 = 6S_{1111}S_{1122}S_{2222} - 6S_{1111}S_{1222}^2 - 6S_{1112}^2S_{2222} + 12S_{1112}S_{1122}S_{1222} - 6S_{1122}^3.$$

Алгебраический дискриминант $D_{2|4}$, как и любой другой $SL(2)$ -инвариант формы S , является функцией от I_2 и I_3 :

$$D_{2|4} = I_2^3 - 6I_3^2 = 8S_{1111}^3S_{2222}^3 - 96S_{1111}^2S_{1112}S_{1222}S_{2222}^2 - 144S_{1111}^2S_{1122}^2S_{2222}^2 +$$

$$+ 432S_{1111}^2S_{1122}S_{1222}^2S_{2222}^2 - 216S_{1111}^2S_{1222}^4 + 432S_{1111}S_{1112}^2S_{1122}S_{1222}^2S_{2222}^2 -$$

$$- 48S_{1111}S_{1112}^2S_{1222}^2S_{2222}^2 - 1440S_{1111}S_{1112}S_{1122}^2S_{1222}S_{2222}^2 + 648S_{1111}S_{1122}^4S_{2222}^2 +$$

$$+ 864S_{1111}S_{1112}S_{1122}S_{1222}^3S_{2222}^2 + 864S_{1112}^3S_{1122}S_{1222}S_{2222}^2 + 288S_{1112}^2S_{1122}^2S_{1222}^2 -$$

$$- 432S_{1111}S_{1122}^3S_{1222}^2 - 216S_{1112}^4S_{1222}^2 - 512S_{1112}^3S_{1222}^3 - 432S_{1112}^2S_{1222}^3S_{2222}^2.$$

Рис. 4. Инварианты для 5-формы от двух переменных как диаграммы тензорной свертки: инвариант I_4 (а), инвариант I_8 (б), инвариант I_{12} (в). Черные пятивалентные вершины представляют тензор S , белые двухвалентные вершины – тензор ϵ .

Следующий пример соответствует 5-форме от двух переменных, которую можно записать как

$$S(x_1, x_2) = S_{11111}x_1^5 + 5S_{11112}x_1^4x_2 + 10S_{11122}x_1^3x_2^2 + 10S_{11222}x_1^2x_2^3 + 5S_{12222}x_1x_2^4 + S_{22222}x_2^5.$$

В соответствии с числом степеней свободы в данном случае есть три элементарных инварианта. Они имеют степени 4, 8, 12, обозначаются через I_4 , I_8 , I_{12} и даются диаграммами на рис. 4. Рассматривая эти диаграммы, несложно написать явное выражение для I_4 ,

$$I_4 = S_{i_1i_2i_3i_4i_5}S_{j_1j_2j_3j_4j_5}S_{k_1k_2k_3k_4k_5}S_{l_1l_2l_3l_4l_5}\epsilon^{i_1j_1}\epsilon^{i_2j_2}\epsilon^{i_3j_3}\epsilon^{i_4k_4}\epsilon^{i_5k_5}\epsilon^{j_4l_4}\epsilon^{j_5l_5}\epsilon^{k_1l_1}\epsilon^{k_2l_2}\epsilon^{k_3l_3},$$

и столь же просто для I_8 , I_{12} . Вычисляя эти свертки, мы получаем явную формулу для I_4 ,

$$\begin{aligned} I_4 = & 2S_{11111}^2S_{22222}^2 - 20S_{11111}S_{11112}S_{12222}S_{22222} + 8S_{11111}S_{11122}S_{11222}S_{22222} + \\ & + 32S_{11111}S_{11122}S_{12222}^2 - 24S_{11111}S_{11222}^2S_{12222} + 32S_{11112}^2S_{11222}S_{22222} + \\ & + 18S_{11112}^2S_{12222}^2 - 24S_{11112}S_{11222}^2S_{22222} - 152S_{11112}S_{11222}S_{11222}S_{12222} + \\ & + 96S_{11112}S_{11222}^3 + 96S_{11122}^3S_{12222} - 64S_{11122}^2S_{11222}^2, \end{aligned}$$

и аналогичные формулы для I_8 , I_{12} – они довольно громоздки и мы их здесь не приводим. Алгебраический дискриминант $D_{2|5}$, как и любая другая $SL(2)$ -инвариантная функция от формы S , представляется как функция от I_4 , I_8 , I_{12} :

$$D_{2|5} = I_4^2 - 64I_8. \quad (16)$$

Наконец, наш последний пример – это 3-форма от трех переменных, которая может быть записана как

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3) = & S_{111}x_1^3 + 3S_{112}x_1^2x_2 + 3S_{113}x_1^2x_3 + S_{222}x_2^3 + \\ & + 3S_{122}x_1x_2^2 + 3S_{223}x_2^2x_3 + S_{333}x_3^3 + 3S_{133}x_1x_3^2 + 3S_{233}x_2x_3^2 + 6S_{123}x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Рис. 5. Инварианты для 3-формы от трех переменных как диаграммы тензорной свертки: инвариант I_4 (а), инвариант I_6 (б). Черные трехвалентные вершины представляют тензор S , белые трехвалентные вершины – тензор ϵ .

В соответствии с числом степеней свободы в данном случае имеются два элементарных инварианта. Они имеют степени 4, 6, обозначаются через I_4 , I_6 и даются диаграммами на рис. 5. Рассматривая диаграммы, несложно написать алгебраические выражения для I_4 и I_6 :

$$I_4 = S_{i_1 i_2 i_3} S_{j_1 j_2 j_3} S_{k_1 k_2 k_3} S_{l_1 l_2 l_3} \epsilon^{i_1 j_1 k_1} \epsilon^{i_2 j_2 l_2} \epsilon^{i_3 k_3 l_3} \epsilon^{l_1 k_2 j_3},$$

$$I_6 = S_{i_1 i_2 i_3} S_{j_1 j_2 j_3} S_{k_1 k_2 k_3} S_{l_1 l_2 l_3} S_{m_1 m_2 m_3} S_{s_1 s_2 s_3} \epsilon^{i_1 k_1 l_1} \epsilon^{i_2 j_2 s_2} \epsilon^{j_1 k_2 m_1} \epsilon^{l_2 m_2 k_3} \epsilon^{m_3 s_3 j_3} \epsilon^{l_3 i_3 s_1}.$$

Вычисляя эти суммы, мы получаем явную формулу для I_4 ,

$$\begin{aligned} I_4 = & 6S_{123}^4 - 12S_{122}S_{123}^2S_{133} + 6S_{122}^2S_{133}^2 + 6S_{113}S_{123}S_{133}S_{222} - 12S_{113}S_{123}^2S_{223} - \\ & - 6S_{113}S_{122}S_{133}S_{223} + 18S_{113}S_{122}S_{123}S_{233} - 6S_{113}S_{122}^2S_{333} + 6S_{113}^2S_{223}^2 - \\ & - 6S_{113}^2S_{222}S_{233} - 6S_{112}S_{133}^2S_{222} + 18S_{112}S_{123}S_{133}S_{223} - 12S_{112}S_{123}^2S_{233} - \\ & - 6S_{112}S_{122}S_{133}S_{233} + 6S_{112}S_{122}S_{123}S_{333} - 6S_{112}S_{113}S_{223}S_{233} + 6S_{112}S_{113}S_{222}S_{333} + \\ & + 6S_{112}^2S_{233}^2 - 6S_{112}^2S_{223}S_{333} - 6S_{111}S_{133}S_{223}^2 + 6S_{111}S_{133}S_{222}S_{233} + \\ & + 6S_{111}S_{123}S_{223}S_{233} - 6S_{111}S_{123}S_{222}S_{333} - 6S_{111}S_{122}S_{233}^2 + 6S_{111}S_{122}S_{223}S_{333}, \end{aligned}$$

и аналогичную явную формулу для I_6 – она тоже громоздка и мы ее здесь не приводим. Алгебраический дискриминант $D_{3|3}$, как и любая другая $SL(3)$ -инвариантная функция S , представляется как функция от I_4 и I_6 :

$$D_{3|3} = 32I_4^3 + 3I_6^2. \quad (17)$$

Если записать в явном виде I_4^3 и I_6^2 в этой формуле, то выражение для $D_{3|3}$ через коэффициенты формы будет содержать 2040 мономов. В такой форме дискриминант $D_{3|3}$ выписан явно в книжном варианте статьи [1]. Формула (17) предоставляет замечательно короткое выражение для этого дискриминанта через два инварианта, которые в свою очередь выражаются замечательно симметричными диаграммами (см. рис. 5). Обобщение такого рода формул, а именно формул (15)–(17), на старшие n и r является открытой проблемой (см. также работы [14]).

4.2. Выражение дискриминанта через многогранники Ньютона. Однородный полином степени r от n переменных

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{a_1 + \dots + a_n = r} s_{a_1, \dots, a_n} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$$

может быть геометрически представлен как набор точек с координатами $(a_1, \dots, a_n)$ в n -мерном евклидовом пространстве. Выпуклая оболочка этих точек представляет собой n -мерный многогранник, который называется многогранником Ньютона полинома S . Известно, что различные триангуляции и клеточные разбиения этого многогранника находятся в соответствии с мономами в дискриминанте $D_{n|r}(S)$. Мы не приводим здесь деталей этого направления исследований (более подробное изложение см. в работе [3]).

4.3. Дискриминант симметрических полиномов. Важным частным случаем являются симметрические полиномы $S(x_1, \dots, x_n)$, т. е. полиномы, инвариантные относительно перестановок переменных $x_1, \dots, x_n$. Оказывается, что именно для таких полиномов дискриминант существенно упрощается и представляется как произведение нескольких сравнительно простых сомножителей. Этот факт изучался в статьях [15]. Рассмотрим сначала несколько случаев малых степеней S , чтобы проиллюстрировать его.

Простейший пример – это симметрический полином второй степени, который всегда может быть записан в виде $S(x_1, \dots, x_n) = C_2 p_2 + C_{11} p_1^2$, где C_2, C_{11} – два произвольных параметра и $p_k = \sum_i x_i^k$. Чтобы вычислить дискриминант (в данном случае просто детерминант), мы дифференцируем полином S и получаем систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 2C_2 x_i + 2C_{11} p_1 = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Разумеется, это линейная система уравнений и ее детерминант может быть легко вычислен методами линейной алгебры:

$$D_{n|2}(C_2, C_{11}) = \det_{n \times n} \begin{pmatrix} C_2 + C_{11} & C_{11} & \dots & C_{11} \\ C_{11} & C_2 + C_{11} & \ddots & C_{11} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_{11} & \dots & C_{11} & C_2 + C_{11} \end{pmatrix} = C_2^{n-1} (C_2 + nC_{11}).$$

Можно видеть, что детерминант представляется как произведение более простых полиномов, и это является общим свойством симметрических полиномов.

Рассмотрим далее существенно нелинейный случай однородного полинома степени 3 от n переменных, который имеет вид $S(x_1, \dots, x_n) = C_3 p_3 + C_{21} p_2 p_1 + C_{111} p_1^3$ и содержит три параметра C_3, C_{21}, C_{111} . Как показано в работах [15], дискриминант этого полинома выражается формулой

$$D_{n|3}(C_3, C_{21}, C_{111}) = B_3^{(n-3)2^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{n-2k}{9n} \right)^2 B_1 B_3^2 + \frac{4k(n-k)}{27n^2} B_2^3 \right)^{\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}},$$

где

$$B_1 = n^2 C_{111} + n C_{21} + C_3, \quad B_2 = n C_{21} + 3 C_3, \quad B_3 = C_3.$$

Данное выражение является замечательно коротким и, что особенно важно, весьма простым образом зависит от n . Фактически, эта формула содержит n в качестве параметра, что позволяет исследовать ее асимптотику при больших n и соответствующие этой асимптотике непрерывные пределы.

Опишем теперь обобщение этих формул на произвольную степень r полинома S . В общем случае однородный симметрический полином степени r от n переменных имеет вид $S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|Y|=r} C_Y p_Y$, где сумма берется по всем диаграммам Юнга (разбиениям целых чисел) $Y: k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq 0$ с фиксированной суммой $|Y| = k_1 + k_2 + \dots = r$, а $p_Y = \prod_i p_{Y_i}$. Число параметров (независимых коэффициентов этого полинома) равно, таким образом, числу разбиений числа r на положительные целые числа, которое мы обозначим как $P(r)$. К примеру, $P(2) = 2$, что соответствует разбиениям (2) и $(1, 1)$. Аналогично, $P(3) = 3$, что соответствует разбиениям (3) , $(2, 1)$ и $(1, 1, 1)$. Несколько первых значений $P(r)$ приведены в следующей таблице:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(r)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Производящая функция для $P(r)$ имеет вид

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r) q^r = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Симметрический однородный полином степени r имеет $P(r)$ независимых коэффициентов C_Y . Его дискриминант – это функция от этих коэффициентов, которую мы обозначим через $\mathcal{D}_{n|r}(C)$. Согласно работам [15] этот дискриминант задается следующей формулой:

$$\mathcal{D}_{n|r}(C) = \text{const} \cdot C_r^{\beta_{n|r}} \prod_{M_1 + \dots + M_{r-1} = n} (d_M(C))^{\frac{(\#_M)!}{(r-1)!} \frac{(M_1 + \dots + M_{r-1})!}{M_1! \dots M_{r-1}!}}, \quad (19)$$

где произведение берется по разбиениям числа n на $r - 1$ неотрицательных целых частей с учетом порядка слагаемых, а $\#_M$ равно числу нулей среди $M_1, \dots, M_{r-1}$. Степень $\beta_{n|r}$ определяется полной степенью дискриминанта,

$$\beta_{n|r} = \deg \mathcal{D}_{n|r} - \sum_{M_1 + \dots + M_{r-1} = n} \frac{(\#_M)! \deg d_M}{(r-1)!} \frac{(M_1 + \dots + M_{r-1})!}{M_1! \dots M_{r-1}!}, \quad (20)$$

и

$$d_M(C) = R \left\{ \sum_i P_M^{(i)}, \sum_{i < j} P_M^{(ij)}, \sum_{i < j < k} P_M^{(ijk)}, \dots \right\},$$

где

$$P_M^{(ij)} = \frac{\det_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & P_M^{(i)} \\ 1 & P_M^{(j)} \end{pmatrix}}{\det_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{pmatrix}}, \quad P_M^{(ijk)} = \frac{\det_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & y_i & P_M^{(i)} \\ 1 & y_j & P_M^{(j)} \\ 1 & y_k & P_M^{(k)} \end{pmatrix}}{\det_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & y_i & y_i^2 \\ 1 & y_j & y_j^2 \\ 1 & y_k & y_k^2 \end{pmatrix}}$$

и в общем случае

$$P_M^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{\det_{k \times k} \begin{pmatrix} 1 & y_{i_1} & \dots & y_{i_1}^{k-2} & P_M^{(i_1)} \\ 1 & y_{i_2} & \dots & y_{i_2}^{k-2} & P_M^{(i_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{i_k} & \dots & y_{i_k}^{k-2} & P_M^{(i_k)} \end{pmatrix}}{\det_{k \times k} \begin{pmatrix} 1 & y_{i_1} & \dots & y_{i_1}^{k-2} & y_{i_1}^{k-1} \\ 1 & y_{i_2} & \dots & y_{i_2}^{k-2} & y_{i_2}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{i_k} & \dots & y_{i_k}^{k-2} & y_{i_k}^{k-1} \end{pmatrix}}.$$

Заметим, что каждая из величин $P_M^{(i_1 \dots i_k)}$ есть полином степени $r - k$ по переменным y_i . Эти величины определены только для попарно различных индексов $i_1, \dots, i_k$ и симметричны по этим индексам. Для $k \geq r$ они не определены: невозможно выбрать r попарно различных элементов из множества, содержащего $r - 1$ элемент. Как можно видеть, каждый отдельный множитель $d_M(C)$ можно вычислить как результат системы, содержащей не более чем $r - 1$ переменных. Поэтому формула (19) представляет удобный способ вычислять дискриминанты симметрических полиномов даже в области $n \gg r$.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ДИСКРИМИНАНТЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Негауссовы интегралы и тождества Уорда. Результаты и дискриминанты из предыдущих разделов являются чисто алгебраическими (или комбинаторными) объектами, т. е. они представляют собой полиномы – возможно сложные и громоздкие, но тем не менее конечные линейные комбинации мономов. Следующий уровень сложности в нелинейной алгебре занимают *статистические суммы*, которые, как правило, не выражаются в полиномах и даже в элементарных функциях. Тем не менее они имеют множество замечательных свойств и тесно связаны с результатами и дискриминантами. Простейшая такая статистическая сумма нелинейной алгебры – это интегральный дискриминант

$$J_{n|r}(S) = \int e^{-S(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n. \quad (21)$$

Для квадратичных форм диагонализация и другие методы линейной алгебры дают простой ответ $J_{n|2}(S) = (\det S)^{-1/2}$, но для степеней $r > 2$ такие методы уже не

работают. Вместо этого для вычисления интегральных дискриминантов необходимо использовать мощную технику тождеств Уорда, представляющих собой линейные дифференциальные уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{a_1, \dots, a_n}} \frac{\partial}{\partial s_{b_1, \dots, b_n}} - \frac{\partial}{\partial s_{c_1, \dots, c_n}} \frac{\partial}{\partial s_{d_1, \dots, d_n}} \right) J_{n|r}(S) = 0, \quad a_i + b_i = c_i + d_i, \quad (22)$$

которым удовлетворяют интегральные дискриминанты. Данные уравнения вытекают из того, что дифференциальный оператор в левой части равенства (22) обращает в нуль подынтегральное выражение и, следовательно, интеграл в (21). С использованием тождеств Уорда в статье [5] интегральные дискриминанты были вычислены в нескольких простейших случаях, приведенных в следующей таблице.

n	r	Инварианты	Дискриминант $D_{n r}$	Первая ветвь интегрального дискриминанта $J_{n r}$
2	2	I_2	I_2	$I_2^{-1/2}$
2	3	I_4	I_2	$I_4^{-1/6}$
2	4	I_2, I_3	$I_2^3 - 6I_3^2$	$I_2^{-1/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3} \right)^i$
2	5	I_4, I_8, I_{12}	$I_4^2 - 64I_8$	$I_4^{-1/10} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} \frac{(3/10)_{i+j} (1/10)_{2i+3j} (1/10)_j}{(2/5)_{i+2j} (3/5)_{i+2j}} \left(\frac{16I_8}{I_4^3} \right)^i \left(\frac{128I_{12}}{3I_4^3} \right)^j$
3	2	I_3	I_3	$I_3^{-1/2}$
3	3	I_4, I_6	$32I_4^3 + 3I_6^2$	$I_4^{-1/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \left(-\frac{3I_6^2}{32I_4^3} \right)^i$

Здесь $(a)_k \equiv \Gamma(a+k)/\Gamma(a) = a(a+1) \dots (a+k-1)$.

Уже по определению интеграл (21) является $SL(n)$ -инвариантным и, следовательно, зависит только от элементарных $SL(n)$ -инвариантов I_k , которые были уже описаны выше в п. 4.1. Необходимо заметить, что $J_{n|r}(S)$ является многозначной функцией: для одних и тех же n и r имеются несколько ветвей, которые удовлетворяют одним и тем же уравнениям (22), но имеют различные асимптотики. К примеру, для $n = 2, r = 4$ интегральный дискриминант имеет ровно две ветви:

$$\begin{aligned} J_{2|4}^{(1)}(S) &= I_2^{-1/4} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1/12, 5/12 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{6I_3^2}{I_2^3} \right) = \\ &= I_2^{-1/4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \cdot \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3} \right)^i, \\ J_{2|4}^{(2)}(S) &= I_3 I_2^{-7/4} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 7/12, 11/12 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{6I_3^2}{I_2^3} \right) = \\ &= I_3 I_2^{-7/4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(7/12)_i (11/12)_i}{(3/2)_i} \cdot \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3} \right)^i. \end{aligned}$$

Для краткости лишь одна из этих ветвей выписана в таблице, приведенной выше, а именно та, нормировочный множитель которой зависит лишь от инварианта наименьшей степени $I_{\min}$. В настоящей статье мы не выписываем явно другие ветви.

Как можно видеть, негауссовы интегралы проявляют замечательную структуру: они все являются гипергеометрическими функциями, т. е. коэффициенты в их разложениях являются отношениями гамма-функций. Как показано в работе [5], во всех известных случаях интегральный дискриминант $J_{n|r}(S)$ имеет сингулярность в тех и только тех точках, где обычный алгебраический дискриминант $D_{n|r}(S)$ обращается в нуль. Это любопытное соотношение между чисто алгебраическими объектами (дискриминантами) и негауссовыми интегралами заслуживает дальнейшего изучения.

5.2. Независимость от формы действия. Верно более сильное утверждение, чем (22):

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{a_1, \dots, a_n}} \frac{\partial}{\partial s_{b_1, \dots, b_n}} - \frac{\partial}{\partial s_{c_1, \dots, c_n}} \frac{\partial}{\partial s_{d_1, \dots, d_n}} \right) \int f(S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n = 0,$$

где $a_i + b_i = c_i + d_i$, при (почти) любом выборе функции $f(S)$. Справедливость этих соотношений вновь следует из того, что дифференциальный оператор в левой части равенства обращает подынтегральное выражение в нуль. Как можно видеть, два разных интеграла (от функции e^{-S} и от функции $f(S)$) удовлетворяют одним и тем же тождествам Уорда. Сам по себе этот факт не гарантирует равенства этих двух интегралов, однако оба интеграла являются $SL(n)$ -инвариантными и оба имеют одну и ту же степень однородности: для любой $f(S)$ мы имеем

$$\int f(\lambda S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n = \lambda^{-n/r} \int f(S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n.$$

Три указанных свойства – одни и те же тождества Уорда, одна и та же степень однородности и общая $SL(n)$ -инвариантность – могут рассматриваться как доказательство (или, по меньшей мере, убедительное свидетельство в пользу) равенства этих двух, различных с первого взгляда, интегралов: для любой “хорошей” функции $f(S)$ мы имеем

$$\int f(S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n = \text{const}(f) \cdot \int e^{-S(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n. \quad (23)$$

Здесь константа зависит от выбора f , но не зависит от S . Свойство (23) иногда называют “независимостью от выбора формы действия” интегральных дискриминантов. Прежде чем описывать класс “хороших” функций и доказывать независимость от выбора формы действия, рассмотрим простой пример с $f(S) = e^{-S^2}$:

$$\begin{aligned} \int e^{-(S_{ij} x_i x_j)} d^n x &= \int e^{-(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)} d^n x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} \int e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} d^n x, \\ \int e^{-(S_{ij} x_i x_j g)^2} d^n x &= \int e^{-(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)^2} d^n x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} \int e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)^2} d^n x. \end{aligned}$$

Как можно видеть, два этих интеграла совпадают (мы имеем в виду, что они отличаются только не зависящим от S множителем при $1/\sqrt{\det S} = 1/\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}$).

Чтобы определить класс “хороших” функций и доказать (23), сделаем замену координат $x_1 = \rho$, $x_2 = \rho z_2, \dots$, $x_n = \rho z_n$, т.е. перейдем от однородных координат x_i к неоднородным координатам $z_i = x_i/x_1$, $i = 2, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int e^{-S(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n &= \int \rho^{n-1} d\rho \int e^{-\rho^r S(1, z_2, \dots, z_n)} dz_2 \dots dz_n = \\ &= \left(\int \rho^{n-1} e^{-\rho^r} d\rho \right) \cdot \int \frac{dz_2 \dots dz_n}{S(1, z_2, \dots, z_n)^{n/r}}. \end{aligned}$$

При этом правая часть (23) принимает вид

$$\begin{aligned} \int f(S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n &= \int \rho^{n-1} d\rho \int f(\rho^r S(1, z_2, \dots, z_n)) dz_2 \dots dz_n = \\ &= \left(\int \rho^{n-1} f(\rho^r) d\rho \right) \cdot \int \frac{dz_2 \dots dz_n}{S(1, z_2, \dots, z_n)^{n/r}}. \end{aligned}$$

Интегралы по ρ в правых частях двух последних соотношений дают всего лишь не зависящие от S константы. Таким образом, соотношение (23) верно, если оба этих интеграла конечны для одного и того же контура. Это условие и определяет класс “хороших” функций $f(S)$. К примеру, все функции вида $f(S) = e^{-S^k}$ при $k > 0$ лежат в этом классе.

5.3. Вычисление ограниченного объема. Независимость интегральных дискриминантов от формы действия позволяет выбирать различные $f(S)$. Это объясняет, почему интегральные дискриминанты появляются в самых разнообразных задачах. К примеру, можно положить

$$f(S) = \theta(1 - S) = \begin{cases} 1, & S \leq 1, \\ 0, & S > 1, \end{cases} \quad (24)$$

что имеет смысл, конечно, только в действительной области, т.е. тогда, когда контур интегрирования действителен (и форма S положительно определена). Этот выбор $f(S)$ дает важную геометрическую интерпретацию интегрального дискриминанта:

$$\int e^{-S(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n = \int_{S < 1} dx_1 \dots dx_n, \quad (25)$$

другими словами, данный интеграл равен объему, ограниченному гиперповерхностью $S = 1$. Эта интерпретация в терминах ограниченного объема является интересным практическим приложением теории интегральных дискриминантов. К примеру, рассмотрим случай $J_{2|4}$. Возьмем конкретную алгебраическую кривую $S(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + \epsilon x^2 y^2 = 1$. Площадь, ограниченная этой кривой, может быть вычислена в полярных координатах:

$$V(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\sqrt{1 + \epsilon \cos^2 \phi \sin^2 \phi}} = \frac{4}{\sqrt{\epsilon + 4}} K\left(\frac{\epsilon}{\epsilon + 4}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\epsilon + 4}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1 \middle| \frac{\epsilon}{\epsilon + 4}\right),$$

где K – полный эллиптический интеграл первого типа [16]. С точки зрения интегральных дискриминантов мы имеем два инварианта формы

$$I_2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\epsilon + \frac{1}{6}\epsilon^2, \quad I_3 = \frac{16}{9} + \frac{2}{3}\epsilon - \frac{1}{6}\epsilon^2 - \frac{1}{36}\epsilon^3$$

и две ветви интегрального дискриминанта

$$J_{2|4}^{(1)}(S) = \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \epsilon + \frac{1}{6} \epsilon^2 \right)^{-1/4} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1/12, 5/12 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{(\epsilon + 2)^2(\epsilon + 8)^2(\epsilon - 4)^2}{(\epsilon^2 + 4\epsilon + 16)^3} \right),$$

$$J_{2|4}^{(2)}(S) = \left(\frac{16}{9} + \frac{2}{3} \epsilon - \frac{1}{6} \epsilon^2 - \frac{1}{36} \epsilon^3 \right) \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \epsilon + \frac{1}{6} \epsilon^2 \right)^{-7/4} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 7/12, 11/12 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{(\epsilon + 2)^2(\epsilon + 8)^2(\epsilon - 4)^2}{(\epsilon^2 + 4\epsilon + 16)^3} \right).$$

Как замечено в работе [5], лишь одна линейная комбинация этих ветвей остается регулярной при $\epsilon \rightarrow 0$, а именно

$$J_{2|4}^{(\text{reg})}(\epsilon) = \left(6^{-1/4} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/12)\Gamma(11/12)} \right) J_{2|4}^{(1)}(\epsilon) - \left(6^{+1/4} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/12)\Gamma(5/12)} \right) J_{2|4}^{(2)}(\epsilon).$$

Поэтому данная ветвь должна быть отождествлена с ограниченной площадью (регулярность ограниченной площади при $\epsilon \rightarrow 0$ очевидна, поскольку в этом пределе кривая превращается в окружность единичного радиуса). Сравнивая ограниченную площадь с регулярной ветвью интегрального дискриминанта, мы получаем гипергеометрическое тождество

$$V(\epsilon) = \text{const} \cdot J_{2|4}^{(\text{reg})}(\epsilon), \quad (26)$$

которое и в самом деле имеет место для любых ϵ . Оставляя аккуратное доказательство в стороне, мы можем убедиться в этом, разлагая обе части равенства в ряд по степеням ϵ :

$$V(\epsilon) = \pi - \frac{1}{16} \pi \epsilon + \frac{9}{1024} \pi \epsilon^2 - \frac{25}{16384} \pi \epsilon^3 + \frac{1225}{4194304} \pi \epsilon^4 + \dots,$$

$$J_{2|4}^{(\text{reg})}(\epsilon) = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \epsilon + \frac{9}{4096} \epsilon^2 - \frac{25}{65536} \epsilon^3 + \frac{1225}{16777216} \epsilon^4 + \dots.$$

Отсюда мы получаем, что множитель в (26) равен 4π . Итак, ограниченная площадь и соответствующий интегральный дискриминант в самом деле совпадают с точностью до постоянного нормировочного множителя.

Приведенные выше действия с инвариантами, однако, не являются самым практичным способом вычислять интегральный дискриминант и ограниченную площадь, скорее, это концептуальная демонстрация эквивалентности данных величин. На практике нужно только произвести разложение в ряд самого интеграла (21), что автоматически гарантирует выбор правильной ветви и часто позволяет очень легко и быстро вычислить ограниченный объем. Для примера рассмотрим алгебраическую гиперповерхность

$$a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_4^2 + cx_4^4 = \hbar$$

в четырехмерном пространстве. Используя интегральный дискриминант, запишем ограниченный объем как

$$V(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{a}{\hbar} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - \frac{b}{\hbar} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_4^2 - \frac{c}{\hbar} x_4^4 \right) dx_4.$$

Перейдя в соответствии с формулами

$$x_1 = \rho \cos \theta_1, \quad x_2 = \rho \sin \theta_1 \cos \phi, \quad x_3 = \rho \sin \theta_1 \sin \phi, \quad x_4 = t$$

к новым переменным интегрирования ρ, θ, ϕ, t с пределами изменения

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq \infty, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

и якобианом преобразования $\rho^2 \sin \theta$, мы получаем

$$V(a, b, c) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{a}{\hbar} \rho^4 - \frac{b}{\hbar} \rho^2 t^2 - \frac{c}{\hbar} t^4\right) dt.$$

Интегрируем по угловым переменным

$$V(a, b, c) = 4\pi \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{a}{\hbar} \rho^4 - \frac{b}{\hbar} \rho^2 t^2 - \frac{c}{\hbar} t^4\right) dt,$$

разлагаем в ряд

$$V(a, b, c) = 4\pi \sum_{k=0}^\infty \frac{b^k}{k! \hbar^k} \int_0^\infty \rho^{2+2k} e^{a\rho^4/\hbar} d\rho \int_{-\infty}^\infty t^{2k} e^{-ct^4/\hbar} dt$$

и, вычисляя два последних интеграла, имеем

$$V(a, b, c) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{b^k}{k! \hbar^k} \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right) \left(\frac{a}{\hbar}\right)^{-3/4-k/2} \left(\frac{c}{\hbar}\right)^{-1/4-k/2}.$$

Суммы легко вычисляются в элементарных функциях, и мы получаем замечательно простой ответ:

$$V(a, b, c) = \frac{\pi^2}{\sqrt{a}} \frac{\hbar}{\sqrt{b + 2\sqrt{ac}}}.$$

В этом примере использование интегрального дискриминанта дает возможность вывести простую формулу в радикалах для объема, ограниченного алгебраической гиперповерхностью. Таким образом, интегральные дискриминанты полезны при вычислении ограниченного объема.

5.4. Алгебраические числа как гипергеометрические ряды. Характеристическое свойство интегральных дискриминантов, которое очевидно уже из самого определения, – это их $SL(n)$ -инвариантность. Интеграл (21) не зависит от выбора базиса в n -мерном линейном пространстве, и поэтому зависит только от элементарных $SL(n)$ -инвариантов $I_k(S)$ (эта зависимость явно видна в обзорной таблице в начале данного раздела). Однако это свойство не универсально: существует много других величин, которые являются статистическими суммами, но не являются $SL(n)$ -инвариантами. Важный и, вероятно, наиболее простой пример таких величин – это корни полиномов, также известные как алгебраические числа. Рассмотрим уравнение $f_0 + f_1 \lambda + \dots + f_r \lambda^r = 0$, которое определяет λ как функцию от $f_0, \dots, f_r$. Эта функция, естественно, является многозначной – существует ровно r ветвей, поскольку алгебраическое уравнение степени r имеет ровно r корней в комплексной

плоскости. Для малых r функция $\lambda(f_0, \dots, f_r)$ может быть выражена в радикалах. Например, для $r = 2$ мы имеем не что иное, как решение квадратного уравнения:

$$\lambda(f_0, f_1, f_2) = -\frac{1}{2} \frac{f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - 4f_2 f_0}}{f_2}. \quad (27)$$

Аналогично, для $r = 3$ один из корней дается выражением

$$\begin{aligned} \lambda(f_0, f_1, f_2, f_3) = & -f_2(3f_3)^{-1} + (6f_3)^{-1} \left(36f_1f_2f_3 - 108f_0f_3^2 - 8f_2^3 + \right. \\ & \left. + 12f_3\sqrt{12f_1^3f_3 - 3f_1^2f_2^2 - 54f_1f_2f_3f_0 + 81f_0^2f_3^2 + 12f_0f_2^3} \right)^{1/3} - \\ & - (3f_3)^{-1} \left(36f_1f_2f_3 - 108f_0f_3^2 - 8f_2^3 + \right. \\ & \left. + 12f_3\sqrt{12f_1^3f_3 - 3f_1^2f_2^2 - 54f_1f_2f_3f_0 + 81f_0^2f_3^2 + 12f_0f_2^3} \right)^{-1/3} (6f_1f_3 - 2f_2^2), \end{aligned}$$

а два других могут быть аналогично выражены через кубические и квадратные корни. Для $r = 4$ понадобятся уже радикалы четвертой степени, а для $r > 4$ выражение в терминах радикалов не существует (как показано Абелем и Галуа). Однако, несмотря на невозможность выражения в терминах элементарных функций, для любого r алгебраические числа удовлетворяют тем же дифференциальным уравнениям, тождествам Уорда

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_a} \frac{\partial}{\partial f_b} - \frac{\partial}{\partial f_c} \frac{\partial}{\partial f_d} \right) \lambda(f_0, \dots, f_r) = 0, \quad (28)$$

что и интегральные дискриминанты. К примеру, можно проверить эти тождества непосредственно для $r = 2$ и для $r = 3$, а также для $r = 4$. Для произвольного r (когда не существует явных выражений через радикалы) справедливость тождеств Уорда (28) становится очевидной, если написать хорошо известное интегральное представление Коши для λ :

$$\lambda(f_0, \dots, f_r) = \oint z d \ln(f_0 + f_1 z + \dots + f_r z^r) = - \oint \ln(f_0 + f_1 z + \dots + f_r z^r) dz.$$

Все это – многозначность, тождества Уорда и интегральные представления – делает алгебраические числа весьма похожими на интегральные дискриминанты. Разумеется, поскольку корни не являются SL -инвариантными, они не буквально равны интегральным дискриминантам. Однако вследствие тождеств Уорда решения алгебраических уравнений даются гипергеометрическими функциями, как и интегральные дискриминанты. Простейший пример соответствует $r = 2$: уравнение $f_0 + f_1 \lambda + f_2 \lambda^2 = 0$ имеет два независимых решения, которые даются формулами (27). Если представить эти решения в виде рядов

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{f_0^{k+1} f_2^k}{f_1^{2k+1}} \quad \text{и} \quad -\frac{f_1}{f_2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{f_0^{k+1} f_2^k}{f_1^{2k+1}},$$

то можно проверить справедливость тождеств Уорда почленно. Стоит обратить внимание на еще одно сходство с интегральными дискриминантами: имеются две ветви, которые удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и отличаются лишь асимптотикой (при больших f_1 одна из ветвей растет как $-f_1/f_2$, а вторая стремится к нулю). Коэффициенты этих рядов суть знаменитые числа Кэталана $\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}$, $k = 1, 2, \dots$. Эти числа являются целыми и имеют комбинаторное значение, поскольку равны числу планарных (древесных) диаграмм, возникающих в ходе рекурсивной процедуры Боголюбова [17]. Однако мы заинтересованы не столько в диаграммной и/или комбинаторной интерпретации этих чисел, сколько в их гипергеометрической структуре: фактически, решение дается двумя гипергеометрическими рядами

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{f_0^{k+1} f_2^k}{f_1^{2k+1}} &= -\frac{f_0}{f_1} \cdot {}_2F_1\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right], [2], \frac{4f_2 f_0}{f_1^2}\right), \\ -\frac{f_1}{f_2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{f_0^{k+1} f_2^k}{f_1^{2k+1}} &= -\frac{f_1}{f_2} + \frac{f_0}{f_1} \cdot {}_2F_1\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right], [2], \frac{4f_2 f_0}{f_1^2}\right), \end{aligned}$$

которые выражаются через квадратные корни. Можно заметить здесь еще одно сходство с интегральными дискриминантами: сингулярности этих рядов сосредоточены при единичном значении аргумента гипергеометрической функции, а оно соответствует уравнению $f_1^2 = 4f_2 f_0$. Таким образом, мы имеем в точности множество значений параметров, при которых алгебраический дискриминант равен нулю.

В отличие от выражений через радикалы, выражения через гипергеометрические функции могут быть написаны для произвольного r : скажем, уравнение $x^6 + x + c = 0$, неразрешимое в радикалах, с легкостью разрешимо в гипергеометрических рядах:

$$x = -c - c^6 - 6c^{11} - 51c^{16} - 506c^{21} - \dots,$$

где общая формула для коэффициентов имеет вид $-\frac{(6k)!}{k!(5k+1)!}$, $k = 1, 2, \dots$. Каждое такое число снова является целым и определяет число 6-арных деревьев на плоскости с k вершинами. Производящая функция для таких чисел снова является гипергеометрической:

$$x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!}{k!(5k+1)!} c^{k+1} = -c \cdot {}_5F_4\left(\left[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \frac{46656c}{3125}\right).$$

Заметим, что эта функция представляет лишь один из корней. Другие корни выражаются через другие гипергеометрические функции, эти выражения полностью аналогичны и мы их здесь не приводим. Дополнительная информация о гипергеометрическом характере решений алгебраических уравнений может быть найдена в работах [18]. Заметим также, что целочисленность коэффициентов не является универсальным свойством: к примеру, уравнение $(x^2 + a)^3 + (x + b)^4 = 0$ имеет решение

$$x = I + \frac{3I}{2} a + 2b - \frac{21I}{8} a^2 - 6ab + 3Ib^2 + \dots$$

с нецелочисленными коэффициентами и общей формулой

$$x = I + \frac{1}{2} \sum_{s,m=0}^{\infty} (-1)^{s+1} (2I)^{m+1} \frac{\Gamma(3s + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2})\Gamma(2s + \frac{3}{2}m - 1)}{\Gamma(2s + m - \frac{1}{2})\Gamma(2s + mt)} \frac{a^s}{s!} \frac{b^m}{m!}.$$

Сделаем еще одно короткое замечание о $SL(n)$ -инвариантности. Мы уже говорили, что сами корни не являются $SL(2)$ -инвариантными: при преобразованиях $G \in SL(2)$ они преобразуются как

$$\lambda \mapsto \frac{G_{11}\lambda + G_{12}}{G_{21}\lambda + G_{22}}, \quad G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 1,$$

поэтому они не выражаются через элементарные инварианты. Однако двойные отношения

$$\Lambda_{ijkl} = \frac{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_l)}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_l)}$$

являются инвариантными относительно $SL(2)$ -преобразований (это легко проверить непосредственно). К примеру, для $r = 4$ уравнение $f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + f_3\lambda^3 + f_4\lambda^4 = 0$ имеет два элементарных инварианта

$$\begin{aligned} I_2 &= 2f_0f_4 - \frac{1}{2}f_1f_3 + \frac{1}{6}f_2^2, \\ I_3 &= f_0f_2f_4 - \frac{3}{8}f_0f_3^2 - \frac{3}{8}f_1^2f_4 + \frac{1}{4}f_1f_2f_3 - \frac{1}{36}f_2^3 \end{aligned}$$

и единственное двойное отношение Λ_{1234} , которое $SL(2)$ -инвариантно, и поэтому выражается через I_2 и I_3 . Чтобы выразить Λ_{1234} через элементарные инварианты, рассмотрим частный случай

$$f_0 = -A^4, \quad f_1 = \epsilon, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 1. \quad (29)$$

Для этих значений параметров $I_2 = -2A^4$ и $I_3 = -3\epsilon^2/8$. Легко получить, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A - \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{A^2} - \frac{1}{32} \frac{\epsilon^2}{A^5} + \frac{7}{2048} \frac{\epsilon^4}{A^{11}} + \frac{1}{512} \frac{\epsilon^5}{A^{14}} + \dots, \\ \lambda_2 &= AI + \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{A^2} + \frac{1}{32} I \frac{\epsilon^2}{A^5} + \frac{7}{2048} I \frac{\epsilon^4}{A^{11}} - \frac{1}{512} \frac{\epsilon^5}{A^{14}} + \dots, \\ \lambda_3 &= -A - \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{A^2} + \frac{1}{32} \frac{\epsilon^2}{A^5} - \frac{7}{2048} \frac{\epsilon^4}{A^{11}} + \frac{1}{512} \frac{\epsilon^5}{A^{14}} + \dots, \\ \lambda_4 &= -IA + \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{A^2} - \frac{1}{32} I \frac{\epsilon^2}{A^5} - \frac{7}{2048} I \frac{\epsilon^4}{A^{11}} - \frac{1}{512} \frac{\epsilon^5}{A^{14}} + \dots. \end{aligned}$$

Данные четыре ветви соответствуют ϵ -деформациям четырех корней простого уравнения $\lambda^4 = A^4$. Соответственно, двойное отношение тоже может быть вычислено как ряд по ϵ :

$$\Lambda_{1234} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} = \frac{1}{2} - \frac{3I}{32} \frac{\epsilon^2}{A^6} + \frac{33I}{16384} \frac{\epsilon^6}{A^{18}} - \frac{1665I}{16777216} \frac{\epsilon^{10}}{A^{30}} + \dots.$$

Будучи выраженным через инварианты, оно принимает вид

$$\Lambda_{1234} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{I_3}{I_2^{3/2}} - \frac{11\sqrt{2}}{18} \frac{I_3^3}{I_2^{9/2}} - \frac{185\sqrt{2}}{108} \frac{I_3^5}{I_2^{15/2}} - \dots$$

Это наиболее простой известный нам способ выразить двойное отношение через I_2 и I_3 . В силу $SL(2)$ -инвариантности приведенное тождество останется верным для любых значений $f_0, \dots, f_4$, а не только в частном случае (29).

В завершение данного раздела заметим, что множество всех алгебраических чисел, т.е. множество всех решений всех алгебраических уравнений, образует поле. В частности, это означает что множество всех алгебраических чисел замкнуто относительно сложения и умножения. К примеру, предположим что x_1 и x_2 являются алгебраическими числами. Другими словами, предположим что x_1 является корнем некоторого полинома $f(z)$, а x_2 – корнем некоторого полинома $g(z)$. Тогда полиномы $f(z)$ и $g(t - z)$ имеют общий корень $t = x_1 + x_2$, так что $x_1 + x_2$ является корнем результата полиномов $f(z)$ и $g(t - z)$. Поскольку результат – это снова полином, $x_1 + x_2$ – алгебраическое число. Аналогично можно показать, что $x_1 - x_2$, $x_1 x_2$ и x_1/x_2 при $x_2 \neq 0$ являются алгебраическими числами. Поэтому алгебраические числа образуют поле.

По аналогии можно было бы рассмотреть 2-алгебраические числа (x, y) – решения системы уравнений $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, где f и g являются неоднородными полиномами, а также прямолинейное обобщение на случай произвольного количества переменных. Однако умножение и деление таких многокомпонентных объектов не выглядит естественной операцией. Более естественным направлением обобщения, возможно, является связь между алгебраическими числами и интегральными дискриминантами. Было бы интересно выяснить, в каком точном смысле множество всех интегральных дискриминантов однородных форм образует кольцо или даже поле. Это приводит нас прямо в область теории мотивов (см. недавний обзор “для физиков” [19]), которые, однако, выходят за пределы настоящей статьи.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы кратко описали (по возможности в явной и элементарной форме) несколько направлений исследования в теории результантов, включая формулы типа Сильвестра–Безу (детерминантные) и Шура (аналитические) для результанта, инвариантные формулы и симметрическую редукцию для дискриминанта, тождества Уорда и представления в виде гипергеометрических рядов для статистических сумм (интегральных дискриминантов и корней алгебраических уравнений). К сожалению, несколько важных областей, например матрицы Маколея [10], многогранники Ньютона [3], множества Мандельброта [20] и другие, остались неохваченными. Подчеркнем, что объекты и соотношения, которые мы рассматривали в настоящей статье, являются еще не до конца исследованными. Многие интересные свойства результантов, дискриминантов и в особенности статистических сумм были найдены и начали привлекать внимание совсем недавно. Более того, в этой области продолжают обнаруживаться новые неожиданные свойства и соотношения. Все это показывает, что теория результантов и вся нелинейная алгебра находятся еще только в начале пути.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Российского федерального агентства по ядерной энергии, Российского федерального агентства по науке и инновациям (контракт № 02.740.11.5029), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2), РФФИ (грант № 07-02-00645, а также объединенные гранты № 09-02-90493-Ukr, 09-01-92440-CE, 09-02-91005-ANF и 09-02-93105-CNRS). Работа Ш. Шакирова частично поддержана Фондом конкурса Мебиуса для молодых ученых.

Список литературы

- [1] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Sci., Hackensack, NJ, 2007; [arXiv: hep-th/0609022](#).
- [2] E. Bézout, *Théorie générale des Equations Algébriques*, De l'Imprimerie de Ph.-D. Pierres, Paris, 1779; J. J. Sylvester, *Philos. Magazine*, **16** (1840), 132–135; “A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree”, *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, V. I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1904, 54–57; A. Cayley, *Cambridge and Dublin Math. J.*, **3** (1848), 116–120; F. S. Macaulay, *Proc. London Math. Soc.*, **35** (1903), 3–27; A. L. Dixon, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1908), 468–478.
- [3] I. Gel'fand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1994; И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов, *Алгебра и анализ*, **2:3** (1990), 1–62.
- [4] А. Ю. Морозов, *УФН*, **162:8** (1992), 83–175.
- [5] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 002; [arXiv: 0903.2595](#).
- [6] P. Aluffi, F. Cukierman, *Manuscripta Math.*, **78:3** (1993), 245–258; M. Chardin, *J. Pure Appl. Algebra*, **101:2** (1995), 129–138; L. Ducos, *J. Pure Appl. Algebra*, **145:2** (2000), 149–163; L. Busé, C. D'Andrea, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338:4** (2004), 287–290; C. D'Andrea, T. Krick, A. Szanto, *J. Algebra*, **302:1** (2006), 16–36; [arXiv: math/0501281](#).
- [7] А. Д. Власов, *ТМФ*, **163:1** (2010), 45–78; [arXiv: 0907.4249](#).
- [8] L. I. Nicolaescu, *Notes on the Reidemeister torsion*, <http://www.nd.edu/~lnicolae/Torsion.pdf>; В. Г. Тураев, *УМН*, **41:1**(247) (1986), 97–147.
- [9] А. С. Анохина, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **160:3** (2009), 403–433; [arXiv: 0812.5013](#).
- [10] K. Kalorkoti, *On Macaulay form of the resultant*, <http://homepages.inf.ed.ac.uk/kk/Reports/Macaulay.pdf>.
- [11] D. Eisenbud, F.-O. Schreyer, *J. Amer. Math. Soc.*, **16:3** (2003), 537–579; [arXiv: math/0111040](#).
- [12] A. Khetan, *J. Pure Appl. Algebra*, **198:1–3** (2005), 237–256; [arXiv: math/0310478](#).
- [13] B. Gustafsson, V. G. Tkachev, *Comm. Math. Phys.*, **286:1** (2009), 313–358; [arXiv: 0710.2326](#); A. Morozov, Sh. Shakirov, *Analogue of the identity LogDet = TraceLog for resultants*, [arXiv: 0804.4632](#); *Resultants and contour integrals*, [arXiv: 0807.4539](#).
- [14] Н. Д. Беклемишев, *Вестн. МГУ. Сер. матем., мех.*, 1982, № 2, 42–49; D. Hilbert, *Theory of Algebraic Invariants*, ed. B. Sturmfels, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993; H. Derksen, G. Kemper, *Computational Invariant Theory*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups. I, Encyclopedia Math. Sci., **130**, Springer, Berlin, 2002; B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Texts Monogr. Symbolic Comput., Springer, Wien, 2008.
- [15] N. Perminov, Sh. Shakirov, *Discriminants of symmetric polynomials*, [arXiv: 0910.5757](#); Н. С. Перминов, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **6:1**(11) (2009), 68–71.

- [16] М. Абрамовиц, И. Стегун (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1963.
- [17] А. Ю. Морозов, М. Н. Сербин, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 316–343.
- [18] B. Sturmfels, *Discrete Math.*, **15**:1–3 (2000), 171–181; M. Glasser, *The quadratic formula made hard: A less radical approach to solving equations*, [arXiv:math/9411224](#).
- [19] A. Rej, M. Marcolli, *Motives: an introductory survey for physicists*, [arXiv:0907.4046](#).
- [20] V. Dolotin, A. Morozov, *The Universal Mandelbrot Set. Beginning of the Story*, World Sci., Hackensack, NJ, 2006; *Algebraic geometry of discrete dynamics. The case of one variable*, [arXiv:hep-th/0501235](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **23**:22 (2008), 3613–3684; [arXiv:hep-th/0701234](#); A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **86**:11 (2007), 856–859.

Поступила в редакцию 16.11.2009