Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Бен Фраж, С. Омри, Деформация вложений супералгебры Ли контактных векторных полей на $S^{1|2}$ в супералгебру Ли псевдодифференциальных операторов на $S^{1|2}$, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 258–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:54:15

© 2010 г.

Н. Бен Фраж*, С. Омри†

ДЕФОРМАЦИЯ ВЛОЖЕНИЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ КОНТАКТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА $S^{1|2}$ В СУПЕРАЛГЕБРУ ЛИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА $S^{1|2}$

Классифицируются деформации стандартного вложения супералгебры Ли $\mathcal{K}(2)$ контактных векторных полей на $(1, 2)$ -мерной суперокружности в супералгебру Ли $S\Psi D(S^{1|2})$ псевдодифференциальных операторов на $S^{1|2}$. Предлагаемый подход приводит к деформациям центрального заряда, индуцированного на $\mathcal{K}(2)$ каноническим центральным расширением супералгебры Ли $S\Psi D(S^{1|2})$.

Ключевые слова: когомология, супералгебра Ли, деформация супералгебры Ли.

1. ВВЕДЕНИЕ

Каждому псевдодифференциальному оператору F на окружности S^1 соответствует его символ [1]–[3]. Пусть $\Psi D(S^1)$ – алгебра Ли псевдодифференциальных символов на S^1 [4], [5]. *Порядок* в $\Psi D(S^1)$ определяется как

$$\text{ord}(F) = \{\sup k \in \mathbb{Z} \mid f_k(x) \neq 0\}, \quad F(x, \xi, \xi^{-1}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi^k f_k(x) \in \Psi D(S^1),$$

где $f_k(x) \in C_c^\infty(S^1)$ с $f_k(x) \equiv 0$ при достаточно большом k . С помощью двух естественных дифференцирований

$$\partial_\xi: \sum_k f_k \xi^k \mapsto \sum_k k f_k \xi^{k-1}, \quad \partial: \sum_k f_k \xi^k \mapsto \sum_k f'_k \xi^k \quad (1.1)$$

на $\Psi D(S^1)$ определяется естественная скобка Пуассона

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \xi}, \quad F, G \in \Psi D(S^1). \quad (1.2)$$

*Institut Supérieur des Sciences Appliquées et Technologie, Sousse, Tunisie.
E-mail: benfraj_nizar@yahoo.fr

†Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Gafsa, Gafsa, Tunisie.
E-mail: omri_salem@yahoo.fr

На пространстве псевдодифференциальных символов определяется структура ассоциативной алгебры $P(S^1)$ с помощью правила [6]

$$F \circ G = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} : \frac{\partial^k F}{\partial \xi^k} \frac{\partial^k G}{\partial x^k} :, \quad (1.3)$$

где $: \dots :$ обозначает нормальное упорядочение:

$$: f(x) \xi^k g(x) \xi^\ell : = f(x) g(x) \xi^{k+\ell}. \quad (1.4)$$

Это естественное обобщение произведения Вика. Как обычно, мы также можем определить скобку Ли, связанную с $\circ$ -произведением: $[F, G] = F \circ G - G \circ F$; будем обозначать алгебру Ли с такой структурой как $\Psi D(S^1)_L$, чтобы отличать ее от алгебры Ли со скобкой Пуассона (1.2).

В работах [4], [5] изучались многопараметрические деформации стандартного вложения π алгебры Ли $\mathbf{vect}(1)$ гладких векторных полей на S^1 в алгебру Ли псевдодифференциальных символов $\Psi D(S^1)_L$, определенного формулой $\pi(f(x)\partial_x) = f(x)\xi$. По сути, исследовались полиномиальные деформации вида

$$\pi(c) = \pi + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_k(c) \xi^k,$$

где $\pi_k(c): \mathbf{vect}(1) \rightarrow C_c^\infty(S^1)$ удовлетворяют условиям $\pi_k(0) = 0$, $\pi_k(c) \equiv 0$ при достаточно большом k .

В настоящей статье мы обращаемся к одному¹⁾ из супераналогов задачи, решавшейся в работах [4], [5], а именно рассматриваем суперокружность $S^{1|n}$ со стандартной контактной структурой, определенной 1-формой α_n , и вводим супералгебру Ли $S\Psi D(S^{1|n})_{SL}$ псевдодифференциальных операторов на $S^{1|n}$. Пространство $S\Psi D(S^{1|n})_{SL}$ является модулем над $\mathcal{K}(n)$ – супералгеброй Ли векторных полей с лорановскими коэффициентами, сохраняющих контактную структуру на $S^{1|n}$. Из результатов работы [9] и общих теорем [10] легко получить, что супералгебра Ли $\mathcal{K}(n)$ (с полиномиальными коэффициентами) является жесткой для любого n , и то же самое верно для лорановских коэффициентов (для случая алгебр Ли идея доказательства была опубликована в работе [11]), но существует множество интересных вложений $\mathcal{K}(n)$ в другие замечательные супералгебры Ли, допускающие нетривиальные деформации.

Случай $n = 2$, рассматриваемый в нашей статье, исключителен из-за неожиданного изоморфизма $\mathcal{K}(n) \simeq \mathbf{Vect}(\mathbb{C}^{1|1})$ (см. работу [7]), однако априори, вообще говоря, не известно, с какой точки зрения конкретное значение n является исключительным. Поэтому приходится рассматривать все случаи в надежде обнаружить интересный или неожиданный результат (подобный упомянутому ниже в замечании 5.3 или в работе [12]).

¹⁾Полный набор возможных суперизаций см. в работе [7]. Из приведенных в [7] примеров наиболее интересны *выделенные*, обладающие нетривиальными центральными расширениями. Имеется 12 таких примеров; результат для рассматриваемой нами задачи в простейшем случае ($n = 1$) можно найти в работе [8].

Для стандартного вложения $\mathcal{K}(2) \rightarrow S\Psi D(S^{1|2})_{SL}$ мы опишем полиномиальные деформации явно (существуют три четных трехпараметрических семейства нетривиальных деформаций и четыре четных двухпараметрических). Свертка этих деформаций приводит к деформациям стандартного вложения $\mathcal{K}(2)$ в супералгебру Пуассона $SP(S^{1|2})_L$ псевдодифференциальных символов на $S^{1|2}$.

Хорошо известное центральное расширение супералгебры Ли $S\Psi D(S^{1|2})_{SL}$ индуцирует центральное расширение подалгебры $\mathcal{K}(2)$ [13]. Ограничением 2-коцикла, порождающего это расширение, является 2-коцикл, определяющий центральное расширение супералгебры Ли $\mathcal{K}(2)$, известное как супералгебра Ли Невё-Шварца (см. работы [7], [13], [14]). Как приложение наших результатов мы получаем “деформированное” выражение для центрального заряда, который индуцирован построенными деформациями стандартного вложения.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Супералгебра Ли контактных векторных полей на $S^{1|2}$. Супералгебра $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^{1|2})$ гладких функций на суперокружности $S^{1|2}$ состоит из элементов вида

$$F(x, \theta_1, \theta_2) = f_0(x) + f_1(x)\theta_1 + f_2(x)\theta_2 + f_{12}(x)\theta_1\theta_2,$$

где $f_0, f_1, f_2, f_{12} \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^1)$, x – четная переменная, θ_1 и θ_2 – нечетные переменные, т.е. $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$. Пусть $p(F)$ – четность однородной функции F и

$$\text{Vect}_{\mathbb{C}}(S^{1|2}) = \{F_0\partial_x + F_1\partial_1 + F_2\partial_2 \mid F_i \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^{1|2})\},$$

где $\partial_i = \partial/\partial\theta_i$. Пусть $\mathcal{K}(2)$ – супералгебра Ли контактных векторных полей на $S^{1|2}$:

$$\mathcal{K}(2) = \{X \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(S^{1|2}) \mid \text{существует } F \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^{1|2}) \text{ такая, что } \mathfrak{L}_X(\alpha_2) = F\alpha_2\},$$

где $\mathfrak{L}_X$ – производная Ли вдоль векторного поля X , а $\alpha_2 = dx + \theta_1 d\theta_1 + \theta_2 d\theta_2$. Любое контактное векторное поле на $S^{1|2}$ можно выразить как

$$X_F = F\partial_x - \frac{1}{2}(-1)^{p(F)} \sum_{i=1}^2 \eta_i(F)\eta_i,$$

где $\eta_i = \partial_i - \theta_i\partial_x$. Скобка векторных полей $[X_F, X_G] = X_{\{F, G\}}$ определяет контактную скобку

$$\{F, G\} = FG' - F'G - \frac{1}{2}(-1)^{p(F)} \sum_{i=1}^2 \eta_i(F)\eta_i(G). \quad (2.1)$$

2.2. Псевдодифференциальные операторы на $S^{1|2}$. Пусть $T^*S^{1|2}$ – кокасательное расслоение на $S^{1|2}$ с локальными координатами $(x, \theta_1, \theta_2, \xi, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$, где $p(\bar{\theta}_i) = 1$. Суперпространство $SP(S^{1|2})$ суперкоммутативной (относительно естественного умножения) алгебры псевдодифференциальных символов на $S^{1|2}$ есть

$$SP(2) = \left\{ \sum_{k=-M}^{\infty} \sum_{\epsilon=(\epsilon_1, \epsilon_2)} a_{k, \epsilon}(x, \theta) \xi^{-k} \bar{\theta}_1^{\epsilon_1} \bar{\theta}_2^{\epsilon_2} \mid a_{k, \epsilon} \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^{1|n}); \epsilon_i = 0, 1; M \in \mathbb{N} \right\}.$$

Это пространство обладает структурой супералгебры Ли, задаваемой скобкой Пуассона

$$\{A, B\} = \partial_\xi A \partial_x B - \partial_x A \partial_\xi B - (-1)^{p(A)} \sum_{i=1}^2 (\partial_i A \partial_{\bar{\theta}_i} B + \partial_{\bar{\theta}_i} A \partial_i B).$$

Ассоциативная супералгебра $S\Psi D(S^{1|2})$ псевдодифференциальных операторов на $S^{1|2}$ совпадает с $SP(S^{1|2})$ как векторное пространство, но умножение на ней определяется следующим правилом:

$$A \circ B = \sum_{\alpha \geq 0, \nu_i=0,1} \frac{(-1)^{p(A)+1}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \partial_{\bar{\theta}_i}^{\nu_i} A) (\partial_x^\alpha \partial_i^{\nu_i} B).$$

Обозначим через $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ супералгебру Ли на том же суперпространстве, что и $S\Psi D(S^{1|2})$, с суперкоммутатором, определенным на однородных элементах по правилу

$$[A, B] = A \circ B - (-1)^{p(A)p(B)} B \circ A.$$

Рассмотрим семейство ассоциативных законов на $S\Psi D(S^{1|2})$, зависящее от параметра $h \in]0, 1[$:

$$A \circ_h B = \sum_{\alpha \geq 0, \nu_i=0,1} \frac{(-1)^{p(A)+1} h^{\nu_i+\alpha-1}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \partial_{\bar{\theta}_i}^{\nu_i} A) (\partial_x^\alpha \partial_i^{\nu_i} B).$$

Обозначим через $S\Psi D_h(S^{1|2})$ ассоциативную супералгебру псевдодифференциальных операторов на $S^{1|2}$ с умножением $\circ_h$. Ясно, что все ассоциативные супералгебры $S\Psi D_h(S^{1|2})$ изоморфны друг другу.

Для суперкоммутатора $[A, B]_h := A \circ_h B - (-1)^{p(A)p(B)} B \circ_h A$ имеем

$$[A, B]_h = \{A, B\} + O(h),$$

и поэтому $\lim_{h \rightarrow 0} [A, B]_h = \{A, B\}$, где мы отождествили $SP(S^{1|2})$ и $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ как векторные пространства. Отсюда следует, что супералгебра Ли $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ сжимается до супералгебры Пуассона $SP(S^{1|2})$ [12].

Более того, $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ допускает *суперслед Адлера*, аналог следа Адлера, определенного на алгебре Ли $\Psi D(S^1)$ псевдодифференциальных операторов на S^1 [13], [14]:

$$\text{Str}(A) = \int_{S^{1|2}} \text{Sres}(A) \text{vol}(x, \theta), \quad A = \sum_{k, \epsilon_i} a_{k, \epsilon_1, \epsilon_2}(x, \theta) \xi^{-k} \bar{\theta}_1^{\epsilon_1} \bar{\theta}_2^{\epsilon_2}, \quad (2.2)$$

где (правый) супервычет $\text{Sres}(A)$ есть коэффициент $a_{-1,1,1} \in C_c^\infty(S^{1|2})$. Напомним, что интеграл Березина определяется формулой

$$\int_{S^{1|2}} \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2=0,1} f_{\epsilon_1, \epsilon_2}(x) \theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \text{vol}(x, \theta) = \int_{S^1} f_{1,1}(x) dx,$$

где $\text{vol}(x, \theta)$ – элемент объема в координатах x, θ (см. работу [15], с. 80–85). Пример применения в физике интегральных форм, которые, в отличие от дифференциальных, можно интегрировать на супермногообразиях (см. работу [16]).

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

3.1. Деформации и когомологии. Теория деформаций гомоморфизмов алгебр Ли изначально рассматривалась с одним параметром [17], [18]. В недавнее время интенсивно изучались многопараметрические деформации (супер)алгебр Ли и их модулей [4], [5], [19]–[21]. Напомним основы этой теории. Пусть $\rho_0: \mathcal{K}(2) \rightarrow S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ – каноническое вложение, определенное формулой

$$\rho_0(X_F) = F\xi - \frac{1}{2}(-1)^{p(F)}(\eta_1(F)\zeta_1 + \eta_2(F)\zeta_2), \quad (3.1)$$

где $\zeta_i = \bar{\theta}_i - \theta_i\xi$. Формальная деформация вложения ρ_0 – это формальный ряд

$$\rho(t) = \rho_0 + \sum_{i=1}^m t_i \rho_i + \sum_{i,j=1}^m t_i t_j \rho_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (3.2)$$

где $\rho_i, \rho_{ij}^{(2)}, \dots$ – линейные отображения из $\mathcal{K}(2)$ в $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ с $p(\rho_i) = p(t_i)$, $p(\rho_{ij}^{(2)}) = p(t_i t_j)$ и т.д., такой что отображение

$$\rho(t): \mathcal{K}(2) \rightarrow \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_m]] \otimes S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}} \quad (3.3)$$

является гомоморфизмом в любом порядке по $t = (t_1, \dots, t_m)$.

Две формальные деформации ρ и $\tilde{\rho}$ называются *эквивалентными*, если $\tilde{\rho} = I_t \circ \rho$ для внутреннего автоморфизма

$$I_t: \mathbb{C}[[t]] \otimes S\Psi D(S^{1|2}) \rightarrow \mathbb{C}[[t]] \otimes S\Psi D(S^{1|2})$$

вида

$$I_t = \exp\left(\sum_{i=1}^m t_i \text{ad}_{F_i} + \sum_{i,j} t_i t_j \text{ad}_{F_{i,j}} + \dots\right), \quad F_i, F_{i,j}, \dots, F_{i_1 \dots i_k} \in S\Psi D(S^{1|2}). \quad (3.4)$$

Во многих случаях можно рассматривать полиномиальные деформации вместо формальных, а тогда формальные ряды можно заменить формальными параметрами комплексными числами. Точнее, согласно работам [4], [8] *полиномиальная деформация* стандартного вложения (3.1) – это гомоморфизм $\rho(c): \mathcal{K}(2) \rightarrow S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ супералгебр Ли, имеющий вид

$$\rho(c) = \rho_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k(c), \quad (3.5)$$

где $\rho_k(c): \mathcal{K}(2) \rightarrow SP_k$ – четное линейное отображение в пространство SP_k (см. формулу (4.2) ниже), полиномиальные по параметру $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$ и такие, что $\rho_k \equiv 0$ при достаточно большом k .

Теория полиномиальных деформаций выглядит богаче теории формальных деформаций. У проблемы эквивалентности для полиномиальных деформаций есть интересные добавочные аспекты, связанные с преобразованиями параметра.

3.2. Инфинитезимальные деформации и H^1 . Деформации (3.2) и (3.5) по модулю членов второго порядка по t и c соответственно называются *инфинитезимальными*. Инфинитезимальные деформации гомоморфизма супералгебр Ли $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$ классифицируются элементами пространства $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$, где $\mathfrak{b}$ превращается в $\mathfrak{g}$ -модуль посредством ρ . А именно, члены ρ_1 первого порядка в формуле (3.2) и $(\partial\rho(c)/\partial c_i)_{c=0}$ в формуле (3.5) суть 1-коциклы. Две инфинитезимальные деформации называются *эквивалентными*, если соответствующие коциклы когомологичны. Обратно, для заданного гомоморфизма $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$ супералгебр Ли произвольный 1-коцикл $\rho_1 \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ определяет инфинитезимальную деформацию гомоморфизма ρ .

Препятствия к существованию деформации (3.2) лежат в $H^2(\mathcal{K}(2), S\Psi D(S^{1|2}))$. Действительно, положив

$$\varphi_t = \rho - \rho_0, \quad \rho^{(1)} = \sum t_i \rho_i, \quad \rho^{(2)} = \sum t_i t_j \rho_{ij}^{(2)}, \quad \dots,$$

можно переписать соотношение (3.2) следующим образом:

$$[\varphi_t(x), \rho_0(y)] + [\rho_0(x), \varphi_t(y)] - \varphi_t([x, y]) + \sum_{i,j>0} [\rho^{(i)}(x), \rho^{(j)}(y)] = 0. \quad (3.6)$$

Первые три члена суть $(\delta\varphi_t)(x, y)$, где δ обозначает оператор кограницы. Для произвольных линейных отображений $\gamma_1, \gamma_2: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$ рассмотрим стандартное *произведение Колмогорова–Александера* $[[\gamma_1, \gamma_2]]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$, определенное формулой

$$[[\gamma_1, \gamma_2]](x, y) = (-1)^{p(\gamma_2)(p(\gamma_1)+p(x))} [\gamma_1(x), \gamma_2(y)] + (-1)^{p(\gamma_1)p(x)} [\gamma_2(x), \gamma_1(y)]. \quad (3.7)$$

Соотношение (3.6) теперь эквивалентно

$$\delta\varphi_t = -\frac{1}{2} [[\varphi_t, \varphi_t]]. \quad (3.8)$$

Разлагая это произведение в степенной ряд по t , получаем следующее уравнение для $\rho^{(k)}$:

$$\delta\rho^{(k)} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=k, \\ i,j>0}} [[\rho^{(i)}, \rho^{(j)}]]. \quad (3.9)$$

Правая часть этого уравнения – 2-коцикл, коэффициенты которого суть однородные многочлены от t степени k . Класс когомологий этого коцикла и есть препятствие к существованию решений (3.9).

4. ПРОСТРАНСТВО $H^1(\mathcal{K}(2), S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}})$

4.1. Фильтрация на $S\Psi D(S^{1|2})$. Естественные вложения $\mathcal{K}(2)$ в $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ и $SP(S^{1|2})_{\text{SL}}$, данные формулой (3.1), индуцируют структуру $\mathcal{K}(2)$ -модуля на $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ и $SP(S^{1|2})$ соответственно.

Положив $\deg x = \deg \theta_i = 0$, $\deg \xi = \deg \bar{\theta}_i = 1$ для любого i , мы вводим $\mathbb{Z}$ -градуировку на супералгебре Пуассона $SP(S^{1|2})$:

$$SP(S^{1|2}) = \widetilde{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} SP_n}, \quad (4.1)$$

где $\widetilde{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}} = (\bigoplus_{n < 0}) \oplus \prod_{n \geq 0}$ и

$$SP_n = \{F\xi^{-n} + G\xi^{-n-1}\bar{\theta}_1 + H\xi^{-n-1}\bar{\theta}_2 + T\xi^{-n-2}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 \mid F, G, H, T \in C_c^\infty(S^{1|2})\} \quad (4.2)$$

– однородное пространство степени $-n$. Каждый элемент из $S\Psi D(S^{1|2})$ можно выразить как

$$A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_k + G_k \xi^{-1} \bar{\theta}_1 + H_k \xi^{-1} \bar{\theta}_2 + T_k \xi^{-2} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2) \xi^{-k},$$

где $F_k, G_k, H_k, T_k \in C_c^\infty(S^{1|2})$. Определим *порядок* элемента A как

$$\text{ord}(A) = \sup\{k \mid F_k \neq 0, \text{ или } G_k \neq 0, \text{ или } H_k \neq 0, \text{ или } T_k \neq 0\}.$$

Такое определение порядка устанавливает на $S\Psi D(S^{1|2})$ убывающую фильтрацию следующим образом: положим

$$\mathbf{F}_n = \{A \in S\Psi D(S^{1|2}) \mid \text{ord}(A) \leq -n\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Тогда мы имеем $\cdots \subset \mathbf{F}_{n+1} \subset \mathbf{F}_n \subset \cdots$. Эта фильтрация совместима с умножением и суперскобкой Пуассона, т.е. для $A \in \mathbf{F}_n$ и $B \in \mathbf{F}_m$ имеем $A \circ B \in \mathbf{F}_{n+m}$ и $\{A, B\} \in \mathbf{F}_{n+m-1}$. Фильтрация превращает $S\Psi D(S^{1|2})$ в ассоциативную фильтрованную супералгебру. Кроме того, эта фильтрация совместима с естественным действием $\mathcal{K}(2)$ на $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$. Действительно,

$$X_F(A) = [X_F, A] \in \mathbf{F}_n, \quad X_F \in \mathcal{K}(2), \quad A \in \mathbf{F}_n.$$

Индукированная структура $\mathcal{K}(2)$ -модуля на факторпространстве $\mathbf{F}_n/\mathbf{F}_{n+1}$ изоморфна структуре $\mathcal{K}(2)$ -модуля на SP_n . Поэтому,

$$SP(S^{1|2}) \simeq \widetilde{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_n/\mathbf{F}_{n+1}}.$$

4.2. Пространство $H^1(\mathcal{K}(2), SP(S^{1|2}))$. Заметим, что

$$H^1(\mathcal{K}(2), SP(S^{1|2})) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^1(\mathcal{K}(2), SP_n).$$

Пространства $H^1(\mathcal{K}(2), SP_n)$ известны (см. работу [22]). Они нетривиальны, если и только если $n = -1, 0, 1$, соответствующие размерности равны 3, 6, 1. Поэтому $H^1(\mathcal{K}(2), SP(S^{1|2})) \cong \mathbb{R}^{10}$. Нетривиальные коциклы, порождающие пространство $H^1(\mathcal{K}(2), SP(S^{1|2}))$, суть

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_1(X_F) &= \eta_1 \eta_2(F) \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-1}, & \Upsilon_2(X_F) &= F' \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-1}, \\
 \Upsilon_3(X_F) &= \left(\frac{1}{4} (F + (-1)^{p(F)+1} F) + \eta_2 \eta_1(F \theta_1 \theta_2) \right) \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-1}, \\
 \Upsilon_4(X_F) &= \frac{1}{4} (F + (-1)^{p(F)+1} F) + \eta_2 \eta_1(F \theta_1 \theta_2), \\
 \Upsilon_5(X_F) &= F', & \Upsilon_6(X_F) &= \eta_1 \eta_2(F), \\
 \Upsilon_7(X_F) &= (-1)^{p(F)} (\eta_1(F') \zeta_1 + \eta_2(F') \zeta_2) \xi^{-1}, \\
 \Upsilon_8(X_F) &= F'' \xi^{-2} \zeta_1 \zeta_2 + (-1)^{p(F)} (\eta_2(F') \zeta_1 - \eta_1(F') \zeta_2) \xi^{-1}, \\
 \Upsilon_9(X_F) &= \eta_1 \eta_2(F') \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-2}, \\
 \Upsilon_{10}(X_F) &= \frac{2}{3} F''' \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-3} + (-1)^{p(F)} (\eta_2(F'') \zeta_1 - \eta_1(F'') \zeta_2) \xi^{-2} + 2 \eta_1 \eta_2(F') \xi^{-1},
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ принимают значения в SP_{-1} , $\Upsilon_4, \dots, \Upsilon_9$ – в SP_0 , а Υ_{10} – в SP_1 .

4.3. Пространство $H^1(\mathcal{K}(2), S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}})$. Напомним, что $S\Psi D_h(S^{1|2})$ как векторное пространство совпадает с $SP(S^{1|2})$. Результат из работы [22] является частным случаем (при $h = 1$) следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пространство $H^1(\mathcal{K}(2), S\Psi D_h(S^{1|2}))$ чисто четное. Оно порождено классами следующих нетривиальных 1-коциклов:*

$$\begin{aligned}
 \Theta_1(X_F) &= \eta_1 \eta_2(F) \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-1}, & \Theta_2(X_F) &= F' \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-1}, \\
 \Theta_3(X_F) &= \left(\frac{1}{4} (F + (-1)^{p(F)+1} F) + \eta_2 \eta_1(F \theta_1 \theta_2) \right) \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-1}, \\
 \Theta_4(X_F) &= \frac{1}{4} (F + (-1)^{p(F)+1} F) + \eta_2 \eta_1(F \theta_1 \theta_2), \\
 \Theta_5(X_F) &= F', & \Theta_6(X_F) &= \eta_1 \eta_2(F), \\
 \Theta_{7_h}(X_F) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p(F)+n}}{n+1} h^n (\eta_1(F^{(n+1)}) \zeta_1 + \eta_2(F^{(n+1)}) \zeta_2) \xi^{-n-1} + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n+2} h^{n+1} F^{(n+2)} \xi^{-n-1}, \\
 \Theta_{8_h}(X_F) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{p(F)+n} h^n (\eta_2(F^{(n+1)}) \zeta_1 - \eta_1(F^{(n+1)}) \zeta_2) \xi^{-n-1} + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n F^{(n+2)} \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^n \eta_1 \eta_2(F^{(n)}) \xi^{-n},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{9_h}(X_F) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n \eta_1 \eta_2 (F^{(n+1)}) \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-n-2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{p(F)+n} \frac{n}{n+1} h^n (\eta_1 (F^{(n+1)}) \zeta_1 + \eta_2 (F^{(n+1)}) \zeta_2) \xi^{-n-1} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2} h^{n+1} F^{(n+2)} \xi^{-n-1}, \\
\Theta_{10_h}(X_F) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{n+2} h^{n-1} F^{(n+2)} \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-n-2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{p(F)+n} \frac{2n}{n+1} h^{n-1} (\eta_1 (F^{(n+1)}) \zeta_2 - \eta_2 (F^{(n+1)}) \zeta_1) \xi^{-n-1} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} h^{n-1} \eta_1 \eta_2 (F^{(n)}) \xi^{-n}.
\end{aligned}$$

5. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ВЛОЖЕНИЯ $\mathcal{K}(2)$ В $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи. В ней дается классификация полиномиальных деформаций стандартного вложения (3.1).

ТЕОРЕМА 5.1. *Любая нетривиальная полиномиальная деформация вложения (3.1) эквивалентна одной из семи следующих деформаций:*

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{\lambda,\mu}^1 &= \rho_0 + \lambda(\Theta_1 + \sqrt{-1}\Theta_2) + \mu(\Theta_5 - \sqrt{-1}\Theta_6) - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\Theta_7 + \Theta_9 + \sqrt{-1}\Theta_8), \\
\tilde{\rho}_{\lambda,\mu}^2 &= \rho_0 + \lambda(\Theta_1 - \sqrt{-1}\Theta_2) + \mu(\Theta_5 + \sqrt{-1}\Theta_6) - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\Theta_7 + \Theta_9 - \sqrt{-1}\Theta_8), \\
\tilde{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}^3 &= \rho_0 + (\lambda(\mu + \nu) + \nu)\Theta_5 + (\lambda^2 - \mu\nu + \lambda)\Theta_6 + (\lambda^2 + \lambda)\Theta_8 - \lambda\mu(\Theta_7 + \Theta_9), \\
\tilde{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}^4 &= \rho_0 + (\lambda(\mu + \nu) + \nu)\Theta_5 + (\lambda^2 - \mu\nu + \lambda)\Theta_6 - \mu\nu\Theta_8 - \lambda\mu(\Theta_7 + \Theta_9), \\
\tilde{\rho}_{\lambda,\mu}^5 &= \rho_0 + \lambda(\Theta_1 + \Theta_5 - \Theta_7 - \Theta_9) + \mu(\Theta_2 - \Theta_6 - \Theta_8), \\
\tilde{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}^6 &= \rho_0 + \lambda(\Theta_1 - \Theta_5) + \mu(\Theta_2 + \Theta_6), \quad \tilde{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}^7 = \rho_0 + \lambda\Theta_4 + \mu\Theta_5 + \nu\Theta_6,
\end{aligned}$$

где $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ – параметры деформации.

Полное доказательство этой теоремы дается в п. 5.2.7. На самом деле сначала нам потребуется условие интегрируемости, при котором инфинитезимальная деформация соответствует полиномиальной. Пространство $H^1(\mathcal{K}(2), S\Psi D(S^{1|2}))$ натянуто на инфинитезимальные деформации вложения (3.1). Таким образом, любую нетривиальную инфинитезимальную деформацию можно выразить в следующем виде:

$$\tilde{\rho}_1(c)(X_F) = \rho_0(X_F) + \sum_{1 \leq i \leq 10} c_i \Theta_i(X_F), \quad (5.1)$$

где $c = (c_1, \dots, c_{10}) \in \mathbb{C}^{10}$. Из того, что $\tilde{\rho}_1(c)$ – гомоморфизм, т.е. из условия

$$[\tilde{\rho}_1(c)(X_F), \tilde{\rho}_1(c)(X_G)] = \tilde{\rho}_1(c)([X_F, X_G])$$

следует, что $c_3 = 0$ и либо $c_4 = 0$, либо $c_1 = c_2 = c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = 0$.

5.1. Деформации, порожденные коциклами Θ_4 , Θ_5 и Θ_6 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Любая нетривиальная формальная деформация вложения (3.1), порожденная коциклами Θ_4 , Θ_5 и Θ_6 , эквивалентна деформации порядка 1, т.е. деформации $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu, \nu}^7$ из теоремы 5.1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, легко проверить, что произведение Колмогорова–Александера $[[\Theta_i, \Theta_j]]$ тождественно обращается в нуль при $i, j = 4, 5, 6$. Таким образом, отображение $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu, \nu}^7$ действительно является нетривиальной деформацией стандартного вложения. Эта деформация на самом деле и формальна, и полиномиальна, так как имеет порядок 1.

Далее, рассмотрим формальную деформацию вложения (3.1), порожденную Θ_4 , Θ_5 и Θ_6 :

$$\tilde{\rho}_t = \rho_0 + t_4\Theta_4 + t_5\Theta_5 + t_6\Theta_6 + \sum_{m \geq 2} \sum_{i+j+k=m} t_4^i t_5^j t_6^k \rho_{i,j,k}^{(m)}, \quad (5.2)$$

где члены старшего порядка $\rho_{i,j,k}^{(m)}: \mathcal{K}(2) \rightarrow S\Psi D(S^{1|2})$ – четные линейные отображения. Решение $\rho_{i,j,k}^{(2)}$ уравнения (3.9) определено с точностью до 1-коцикла, и в работах [17], [19], [20] было показано, что разные представители одного класса решений уравнения (3.9) соответствуют эквивалентным деформациям. Таким образом, всегда можно избавиться от $\rho_{i,j,k}^{(2)}$. Тогда по рекуррентности члены старшего порядка удовлетворяют уравнению $\delta \rho_{i,j,k}^{(m)} = 0$, и от них тоже можно избавиться.

5.2. Деформации, порожденные коциклами $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_5, \dots, \Theta_{10}$. Рассмотрим инфинитезимальную деформацию стандартного вложения $\mathcal{K}(2)$ в $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$, определенного коциклами $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_5, \dots, \Theta_{10}$ и зависящего от восьми комплексных параметров $c_1, c_2, c_5, \dots, c_{10}$:

$$\rho_1(c)(X_F) = \rho_0(X_F) + c_1\Theta_1(X_F) + c_2\Theta_2(X_F) + c_5\Theta_5(X_F) + \dots + c_{10}\Theta_{10}(X_F). \quad (5.3)$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Инфинитезимальная деформация (5.3) соответствует полиномиальной, если и только если ненулевые коэффициенты c_i удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$c_7^2 + c_8^2 - c_6c_8 + c_5c_7 = 0, \quad c_7 = c_9 \quad (5.4a)$$

или

$$\begin{aligned} c_7^2 + c_8^2 - c_6c_8 + c_5c_7 &= 0, & c_2 - c_6 + 2c_8 &= 0, \\ c_1 + c_5 + 2c_7 &= 0, & c_1c_8 - c_2c_7 &= 0, & c_7 &= c_9. \end{aligned} \quad (5.4b)$$

Для того чтобы доказать теорему 5.2, введем понятие однородности деформации, определенной дифференцируемыми отображениями [5], и докажем, что условия (5.4) необходимы для интегрируемости инфинитезимальной деформации. Далее мы покажем, что эти соотношения достаточны, построив деформации явным образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Соотношения (5.4) определяют трехмерную квадрику и поверхность.

5.2.1. Однородная деформация. Рассмотрим произвольную полиномиальную деформацию стандартного вложения, соответствующую инфинитезимальной деформации (5.3):

$$\tilde{\rho}(c)(X_F) = \bar{\rho}_1(c)(X_F) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k(c) \rho_k(X_F), \quad (5.5)$$

где P_k – полиномиальные функции степени не меньше 2, ρ_k – некие дифференцируемые четные линейные отображения из $\mathcal{K}(2)$ в SP_k , а $\bar{\rho}_1(c)$ – класс $\rho_1(c)$ в $\mathbf{F}_{-1}/\mathbf{F}_2$, где $\rho_1(c)$ определяется формулой (5.3):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1(c)(X_F) = & \rho_0(X_F) + c_1 \Theta_1(X_F) + c_2 \Theta_2(X_F) + c_5 \Theta_5(X_F) + c_6 \Theta_6(X_F) + \\ & + c_9 \left(\Upsilon_9(X_F) - \eta_1 \eta_2(F'') \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-3} - \frac{1}{2} (-1)^{p(F)} (\eta_1(F'') \zeta_1 + \eta_2(F'') \zeta_2) \xi^{-2} \right) + \\ & + c_7 \left(\Upsilon_7(X_F) - \frac{1}{2} (-1)^{p(F)} (\eta_1(F'') \zeta_1 + \eta_2(F'') \zeta_2) \xi^{-2} + F'' \xi^{-1} \right) + c_{10} \Upsilon_{10}(X_F) + \\ & + c_8 (\Upsilon_8(X_F) - (-1)^{p(F)} (\eta_2(F'') \zeta_1 - \eta_1(F'') \zeta_2) \xi^{-2} - F^{(3)} \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-3} - \eta_1 \eta_2(F') \xi^{-1}). \end{aligned}$$

Заметим, что, так как коциклы $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_5, \dots, \Theta_{10}$ – дифференцируемые отображения, любая деформация тоже определяется через дифференцируемые отображения. Это следует из формализма Гельфанда–Фукса дифференцируемых (или локальных) когомологий [10].

Далее, введем понятие однородности для деформации, определенной дифференцируемыми отображениями. Деформация (5.5) называется *однородной*, если сумма $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + 2k - 2n$, соответствующая каждому члену $\eta_1^{\epsilon_1} \eta_2^{\epsilon_2} (F^{(k)}) \zeta_1^{\epsilon_3} \zeta_2^{\epsilon_4} \xi^{-n}$, где $\epsilon_i = 0, 1$, в правой части формулы (5.5), постоянна.

Поскольку коциклы $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_5, \dots, \Theta_{10}$ имеют степень 2, любая однородная деформация (5.5), соответствующая нетривиальной инфинитезимальной деформации, имеет степень 2:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(c)(X_F) = & \bar{\rho}_1(c)(X_F) + \sum_{k \geq 2} (P_{k,1}(c) F^{(k+1)} + P_{k,2}(c) \eta_1 \eta_2(F^{(k)})) \xi^{-k} + \\ & + \sum_{k \geq 2} P_{k,3}(c) (-1)^{p(F)} (\eta_1(F^{(k+1)}) \zeta_1 + \eta_2(F^{(k+1)}) \zeta_2) \xi^{-k-1} + \\ & + \sum_{k \geq 2} P_{k,4}(c) (-1)^{p(F)} (\eta_2(F^{(k+1)}) \zeta_1 - \eta_1(F^{(k+1)}) \zeta_2) \xi^{-k-1} + \\ & + \sum_{k \geq 2} (P_{k,5}(c) F^{(k+2)} + P_{k,6}(c) \eta_1 \eta_2(F^{(k+1)})) \xi^{-k-2} \zeta_1 \zeta_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Любая деформация (5.5) эквивалентна однородной деформации (5.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что любой гомоморфизм сохраняет однородность. Это означает, что первый член в выражении (5.5) (член наименьшего порядка по c), не являющийся однородным степени 2, должен лежать в $H^1(\mathcal{K}(2), SP(S^{1|2}))$. Такой 1-коцикл когомологичен линейной комбинации 1-коциклов $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_5, \dots, \Upsilon_{10}$ (см. формулу (4.4)), однородных степени 2. Таким образом, можно прибавить (или отнять) кограницу в член полиномиальной деформации (5.5), чтобы получить эквивалентную.

5.2.2. Условия интегрируемости необходимы. Инфинитезимальная деформация (5.3), очевидно, имеет вид

$$\tilde{\rho}(c)(X_F) = \bar{\rho}_1(c)(X_F) + \dots, \quad (5.7)$$

где “...” обозначает коэффициенты при ξ^{-2} , $\zeta_i \xi^{-3}$, $\zeta_1 \zeta_2 \xi^{-4}$. Чтобы вычислить препятствие к интегрируемости инфинитезимальной деформации (5.3), необходимо вычислить разность

$$[\tilde{\rho}(c)(X_F), \tilde{\rho}(c)(X_G)] - \tilde{\rho}(c)([X_F, X_G]).$$

Собирая коэффициенты при $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \xi^{-k}$ и $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \bar{\theta}_1^{\nu_1} \bar{\theta}_2^{\nu_2} \xi^{-k-\nu_1-\nu_2}$, $\nu_i, \epsilon_i = 0, 1$, для $k = 0, 1$ получаем следующие условия:

коэффициенты при $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2}$ и $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \bar{\theta}_1^{\nu_1} \bar{\theta}_2^{\nu_2} \xi^{-\nu_1-\nu_2}$ дают

$$\begin{aligned} c_i(c_2 - c_6 + 2c_8) = 0, \quad c_i(c_1 + c_5 + 2c_7) = 0, \quad i = 1, 2, \\ c_1 c_8 - c_2 c_7 = 0; \end{aligned} \quad (5.8)$$

коэффициенты при $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \xi^{-1}$ и $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \bar{\theta}_1^{\nu_1} \bar{\theta}_2^{\nu_2} \xi^{-1-\nu_1-\nu_2}$ дают

$$\begin{aligned} c_i(c_7 - c_9) = 0, \quad i = 1, 2, \\ c_7^2 - c_7 c_9 + c_2 c_{10} = 0, \quad c_7 c_8 - c_8 c_9 - c_1 c_{10} = 0, \\ c_7^2 + c_8^2 - c_6 c_8 + c_5 c_7 = 0, \quad c_5 c_9 + c_7 c_9 - c_6 c_8 + c_2 c_{10} + c_8^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

При $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$ из уравнений (5.8) и (5.9) тут же следует условие (5.46). При $c_1 = c_2 = 0$ надо сложить первые нетривиальные члены и учесть, что $\hat{\rho}(x)$ – гомоморфизм. Так что положим

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(c)(X_F) = \bar{\rho}(c)(X_F) + (P_{2,1}(c)F^{(3)} + P_{2,2}(c)\eta_1\eta_2(F^{(2)}))\xi^{-2} + \\ + P_{2,3}(c)(-1)^{p(F)}(\eta_1(F^{(3)})\zeta_1 + \eta_2(F^{(3)})\zeta_2)\xi^{-3} + \\ + P_{2,4}(c)(-1)^{p(F)}(\eta_2(F^{(3)})\zeta_1 - \eta_1(F^{(3)})\zeta_2)\xi^{-3} + \\ + (P_{2,5}(c)F^{(4)} + P_{2,6}(c)\eta_1\eta_2(F^{(3)}))\xi^{-4}\zeta_1\zeta_2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $P_{2,i}(c)$ – некоторые многочлены от $c = (c_5, \dots, c_{10}) \in \mathbb{C}^6$, и вычислим разность

$$[\hat{\rho}(c)(X_F), \hat{\rho}(c)(X_G)] - \hat{\rho}(c)([X_F, X_G]).$$

Собирая коэффициенты при $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \xi^{-2}$ и $\theta_1^{\epsilon_1} \theta_2^{\epsilon_2} \bar{\theta}_1^{\nu_1} \bar{\theta}_2^{\nu_2} \xi^{-2-\nu_1-\nu_2}$, легко получаем с использованием (5.9) следующие равенства для многочленов $P_{2,i}(c)$:

коэффициенты при $\bar{\theta}_1 \xi^{-3}$ дают

$$P_{2,3} = -2P_{2,1} - c_7 + \left(\frac{4}{3}c_6 - \frac{2}{3}c_8\right)c_{10}, \quad \frac{3}{2}P_{2,4} = P_{2,2} + \frac{1}{2}c_8 + c_7c_{10},$$

$$P_{2,3} = \frac{2}{3}c_9 + \frac{1}{3}c_7 - \frac{2}{3}c_8c_{10} = \frac{2}{3}c_9 + \frac{1}{3}c_7 + \left(2c_8 - \frac{4}{3}c_6\right)c_{10},$$

$$P_{2,4} = c_8 - \left(\frac{4}{3} + 2c_7\right)c_{10} = c_8 - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}c_7 - \frac{4}{3}c_5\right)c_{10},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} (2c_8 - c_6)c_{10} &= 0, & (2c_7 + c_5)c_{10} &= 0, \\ P_{2,2} &= -2c_{10} + c_8 + 2c_5c_{10}; \end{aligned} \quad (5.11)$$

коэффициенты при $\bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 \xi^{-4}$ дают

$$\begin{aligned} c_9c_{10} &= 0, \\ P_{2,5} &= -c_{10} + c_8 - \frac{4}{3}c_7c_{10}, & P_{2,6} &= c_9 - \frac{2}{3}c_8c_{10}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Сделаем еще один шаг и разложим деформацию в ряд до $\xi^{-3}, \zeta_i \xi^{-4}, \zeta_1 \zeta_2 \xi^{-5}$. Тот факт, что $\widehat{\rho}(x)$ – гомоморфизм, приводит к нетривиальным соотношениям между параметрами (в порядке ξ^{-3}):

$$-4c_{10}^2 + c_9^2 - c_8^2 + 4c_8c_{10} - 2c_7c_9 + 2c_6c_{10} - c_6c_8 - c_5c_9 + 2c_6P_{2,2} = 0. \quad (5.13)$$

После использования уравнений (5.11) и последнего из уравнений (5.9) уравнение (5.13) превращается в

$$-4c_{10}^2 + c_9^2 - c_7c_9 - 8c_6c_7c_{10} = 0.$$

Из этого равенства, первого из уравнений (5.12) и третьего уравнения в (5.9) можно получить, что $c_{10} = 0$ и $c_9 - c_7 = 0$. Последние уравнения вместе с (5.9) приводят к условию (5.4a). Мы показали, что условия (5.4) необходимы для интегрируемости инфинитезимальных деформаций.

5.2.3. Единственность однородной деформации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть дана инфинитезимальная деформация (5.3). Если существует однородная полиномиальная деформация (5.6), соответствующая заданной, то эта однородная полиномиальная деформация единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив формулу (5.6) в уравнение гомоморфизма и воспользовавшись вычислениями, подобными проделанным в п. 5.2.2, можно увидеть, что многочлены $P_{k,i}(c)$, $k \geq 2$, однозначно определяются константами $c_1, c_2, c_5, \dots, c_{10}$.

5.2.4. *Введение параметра h .* Можно модифицировать соотношения (5.4), чтобы получилась деформация вложения $\mathcal{K}(2)$ в $S\Psi D_h(S^{1|2})$. Тогда скаляр h фигурирует в разных степенях согласно “весу” соответствующих членов в формуле (5.3). В конце концов, для ненулевых c_i получаются следующие соотношения:

$$c_7^2 + c_8^2 - c_6c_8 + c_5c_7 = 0, \quad c_7 = c_9 \quad (5.14a)$$

или

$$\begin{aligned} c_7^2 + c_8^2 - c_6c_8 + c_5c_7 &= 0, \\ hc_1 + c_5 + 2c_7 &= 0, \quad hc_2 - c_6 + 2c_8 = 0, \\ c_1c_8 - c_2c_7 &= 0, \quad c_7 = c_9. \end{aligned} \quad (5.14б)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Установив веса $\text{wht}(c_i) = 2$ (для $i = 5, 6, 7, 8$) и $\text{wht}(c_1) = \text{wht}(c_2) = \text{wht}(h) = 1$, делаем многочлены (5.14) однородными веса 4, 3 и 2. Более того, можно заключить следующее: чтобы иметь полиномиальную деформацию стандартного вложения (3.1), соответствующую данной инфинитезимальной, порожденной коциклами $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_5, \dots, \Upsilon_{10}$ (4.4), необходимо либо выполнение условий (5.14) при $h = 0$, либо выполнение равенства $c_i = 0$ для $i = 5, 6, 7, 8, 10$.

5.2.5. *Рациональная параметризация.* Существует рациональная параметризация трехмерной квадрики и поверхности, определяемая уравнениями (5.14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. 1. Для любых $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ константы

$$c_5 = \lambda(\mu + \nu) + \nu, \quad c_6 = \lambda^2 - \mu\nu + \lambda, \quad c_8 = -\mu\nu, \quad c_7 = c_9 = -\lambda\mu \quad (5.15a)$$

или

$$c_5 = \lambda(\mu + \nu) + \nu, \quad c_6 = \lambda^2 - \mu\nu + \lambda, \quad c_8 = \lambda^2 + \lambda, \quad c_7 = c_9 = -\lambda\mu \quad (5.15б)$$

удовлетворяют соотношениям (5.14a).

2. Для любых λ и $\mu \in \mathbb{C}$ константы

$$c_1 = \lambda, \quad c_2 = \mu, \quad c_5 = -h\lambda, \quad c_6 = h\mu, \quad c_9 = c_8 = c_7 = 0, \quad (5.16a)$$

или

$$c_1 = \lambda, \quad c_2 = \mu, \quad c_5 = h\lambda, \quad c_8 = c_6 = -h\mu, \quad c_7 = c_9 = -h\lambda, \quad (5.16б)$$

или

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu, & c_2 &= \sqrt{-1}\mu, \\ c_5 &= \lambda, & c_6 &= -\sqrt{-1}\lambda, \\ c_7 = c_9 &= -\frac{1}{2}(h\mu + \lambda), & c_8 &= -\frac{1}{2}\sqrt{-1}(h\mu + \lambda), \end{aligned} \quad (5.16в)$$

или

$$\begin{aligned}
c_1 &= \mu, & c_2 &= -\sqrt{-1}\mu, \\
c_5 &= \lambda, & c_6 &= \sqrt{-1}\lambda, \\
c_7 &= c_9 = -\frac{1}{2}(h\mu + \lambda), & c_8 &= \frac{1}{2}\sqrt{-1}(h\mu + \lambda)
\end{aligned} \tag{5.16г}$$

удовлетворяют соотношению (5.14б).

3. Любой набор констант $c_1, c_2, c_5, \dots, c_{10} \in \mathbb{C}$, удовлетворяющий формулам (5.14), имеет вид (5.15) или (5.16) для некоторых $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое и второе утверждения легко проверяются непосредственно. Чтобы доказать обратное утверждение, сначала фиксируем c_5, c_6, c_7 , как в (5.15), и решим равенство (5.14а) как квадратное уравнение относительно c_8 . Два решения этого уравнения заданы в формулах (5.15). Затем легко проверить, что (5.14б) эквивалентно

$$\begin{aligned}
(c_1^2 + c_2^2)(hc_2 - c_6)(hc_2 + c_6) &= 0, & c_1c_6 + c_2c_5 &= 0, \\
hc_2 - c_6 + 2c_8 &= 0, & hc_1 + c_5 + 2c_7 &= 0, & c_7 &= c_9.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы заключаем, что коэффициенты $c_1, c_2, c_5, \dots, c_{10}$ выражаются соотношениями (5.16).

5.2.6. Условия интегрирования достаточны. Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы 5.2, найдем в явном виде полиномиальную деформацию, которая соответствует любой инфинитезимальной деформации (5.3), удовлетворяющей условиям (5.14). Из этого будет следовать, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для интегрируемости инфинитезимальной деформации (5.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Любая инфинитезимальная деформация (5.3), удовлетворяющая условиям (5.14), есть полиномиальная деформация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым вычислением покажем, что произведения Колмогорова–Александера $[[\Theta_5, \Theta_{8_h}]]_h$, $[[\Theta_6, \Theta_{8_h}]]_h$, $[[\Theta_6, \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h$, $[[\tilde{\Theta}_{7_h}, \Theta_{8_h}]]_h$ и $[[\Theta_i, \Theta_j]]_h$ для $i, j = 5, 6$, где $\tilde{\Theta}_{7_h} = \Theta_{7_h} + \Theta_{9_h}$, тождественно обращаются в нуль. Поэтому при условиях $c_9 = c_7$ и $c_{10} = 0$ инфинитезимальная деформация (5.3) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(c)([X_F, X_G]) - [\tilde{\rho}(c)(X_F), \tilde{\rho}(c)(X_G)]_h = \\
&= \sum_{i=1}^2 c_i((c_5[[\Theta_i, \Theta_5]]_h + c_7[[\Theta_i, \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h)(X_F, X_G)) + c_1^2[\Theta_1(X_F), \Theta_1(X_G)]_h + \\
&+ \sum_{i=1}^2 c_i((c_6[[\Theta_i, \Theta_6]]_h + c_8[[\Theta_i, \Theta_{8_h}]]_h)(X_F, X_G)) + c_2^2[\Theta_2(X_F), \Theta_2(X_G)]_h + \\
&+ (c_5c_7[[\Theta_5, \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h + c_6c_8[[\Theta_6, \Theta_{8_h}]]_h + c_1c_2[\Theta_1(X_F), \Theta_2(X_G)]_h)(X_F, X_G) + \\
&+ c_7^2[\tilde{\Theta}_{7_h}(X_F), \tilde{\Theta}_{7_h}(X_G)]_h + c_8^2[\Theta_{8_h}(X_F), \Theta_{8_h}(X_G)]_h,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

где $X_F, X_G \in \mathcal{K}(2)$ и $F, G \in C_c^\infty(S^{1|2})$.

Следующая лемма доказывается непосредственно.

ЛЕММА 5.1. 1. Коциклы Θ_5 , Θ_6 , $\tilde{\Theta}_{7_h}$ и Θ_{8_h} удовлетворяют следующему соотношению:

$$c_5 c_7 [[\Theta_5, \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h + c_6 c_8 [[\Theta_6, \Theta_{8_h}]]_h + c_7^2 [\tilde{\Theta}_{7_h}, \tilde{\Theta}_{7_h}]_h + c_8^2 [\Theta_{8_h}, \Theta_{8_h}]_h = \\ = (c_5 c_7 - c_6 c_8 + c_7^2 + c_8^2) [[\Theta_5, \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h.$$

2. Коциклы Θ_1 , Θ_5 и $\tilde{\Theta}_{7_h}$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$c_1 (c_1 [\Theta_1, \Theta_1]_h + [[\Theta_1, c_5 \Theta_5 + c_7 \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h) = c_1 (h c_1 + c_5 + 2 c_7) [[\Theta_1, \Theta_5]]_h.$$

3. Коциклы Θ_2 , Θ_6 и Θ_{8_h} удовлетворяют следующему соотношению:

$$c_2 (c_2 [\Theta_2, \Theta_2]_h + [[\Theta_2, c_6 \Theta_6 + c_8 \Theta_{8_h}]]_h) = -c_2 (h c_2 - c_6 + 2 c_8) [[\Theta_2, \Theta_6]]_h.$$

4. При условии $c_1 c_8 = c_2 c_7$ коциклы Θ_1 , Θ_2 , Θ_5 , Θ_6 , $\tilde{\Theta}_{7_h}$ и Θ_{8_h} удовлетворяют следующему соотношению:

$$[[c_1 \Theta_1, c_2 \Theta_2 + c_6 \Theta_6 + c_8 \Theta_{8_h}]]_h + [[c_2 \Theta_2, c_5 \Theta_5 + c_7 \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h = \\ = c_2 (h c_1 + c_5 + 2 c_7) [[\Theta_2, \Theta_5]]_h - c_1 (h c_2 - c_6 + 2 c_8) [[\Theta_1, \Theta_6]]_h.$$

Из леммы 5.1 следует, что равенство (5.17) эквивалентно

$$\tilde{\rho}(c)([X_F, X_G]) - [\tilde{\rho}(c)(X_F), \tilde{\rho}(c)(X_G)]_h = (c_5 c_7 - c_6 c_8 + c_7^2 + c_8^2) [[\Theta_5, \tilde{\Theta}_{7_h}]]_h + \\ + \sum_{i=1}^2 c_i ((h c_1 + c_5 + 2 c_7) [[\Theta_i, \Theta_5]]_h - (h c_2 - c_6 + 2 c_8) [[\Theta_i, \Theta_6]]_h) (X_F, X_G). \quad (5.18)$$

Таким образом, из формул (5.14) следует, что правая сторона равенства (5.18) обращается в нуль. Поэтому

$$\tilde{\rho}(c)([X_F, X_G]) = [\tilde{\rho}(c)(X_F), \tilde{\rho}(c)(X_G)]_h.$$

Следовательно, при условиях (5.14) инфинитезимальная деформация (5.3) является полиномиальной. Предложение 5.5 доказано. Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 5.2.

5.2.7. Доказательство теоремы 5.1. Прежде всего, напомним, что из условий интегрируемости инфинитезимальной деформации (5.1) следует, что $c_3 = 0$ и либо $c_4 = 0$, либо $c_1 = c_2 = c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = 0$. Так что нам надо изучить только полиномиальные деформации вложения (3.1), порожденные либо Θ_4 , Θ_5 , Θ_6 , либо Θ_1 , Θ_2 , $\Theta_5, \dots, \Theta_{10}$. Используя предложение 5.1, мы получаем классификацию полиномиальных деформаций, порожденных Θ_4 , Θ_5 , Θ_6 . Что касается полиномиальных деформаций, порожденных Θ_1 , Θ_2 , $\Theta_5, \dots, \Theta_{10}$, мы показали, что:

1) любая интегрируемая инфинитезимальная деформация (5.3) удовлетворяет условию (5.4);

2) любая полиномиальная деформация эквивалентна однородной;

3) для данной инфинитезимальной деформации (5.3), удовлетворяющей одному из условий (5.15) или (5.16) при $h = 1$, существует единственная однородная деформация, соответствующая инфинитезимальной. Ситуация аналогична рассматриваемой в теореме 5.1 за исключением $\tilde{\rho}_{\lambda,\mu,\nu}^7$; заметим также, что полиномиальные деформации, даваемые теоремой 5.1, не эквивалентны друг другу для различных значений параметров λ , μ и ν , поскольку соответствующие инфинитезимальные деформации даются некохомологичными коциклами.

СЛЕДСТВИЕ. *Любая нетривиальная полиномиальная деформация стандартного вложения $\mathcal{K}(2)$ в $SP(2)$ эквивалентна одной из шести следующих деформаций:*

$$\rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(1)} = \rho_0 + (\lambda(\mu + \nu) + \nu)\Upsilon_5 + (\lambda^2 - \mu\nu + \lambda)\Upsilon_6 + (\lambda^2 + \lambda)\Upsilon_8 - \lambda\mu(\Upsilon_7 + \Upsilon_9),$$

$$\rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(2)} = \rho_0 + (\lambda(\mu + \nu) + \nu)\Upsilon_5 + (\lambda^2 - \mu\nu + \lambda)\Upsilon_6 - \mu\nu\Upsilon_8 - \lambda\mu(\Upsilon_7 + \Upsilon_9),$$

$$\rho_{\lambda,\mu}^{(3)} = \rho_0 + \lambda(\Theta_1 + \sqrt{-1}\Theta_2) + \mu\left(\Theta_5 - \frac{\Theta_7 + \Theta_9}{2}\right) - \sqrt{-1}\left(\Theta_6 + \frac{1}{2}\Theta_8\right),$$

$$\rho_{\lambda,\mu}^{(4)} = \rho_0 + \lambda(\Theta_1 - \sqrt{-1}\Theta_2) + \mu\left(\Theta_5 - \frac{\Theta_7 + \Theta_9}{2} + \sqrt{-1}\left(\Theta_6 + \frac{1}{2}\Theta_8\right)\right),$$

$$\rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(5)} = \rho_0 + \lambda\Upsilon_1 + \mu\Upsilon_2 + \nu\Upsilon_9, \quad \rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(6)} = \rho_0 + \lambda\Upsilon_4 + \mu\Upsilon_5 + \nu\Upsilon_6,$$

где $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ – параметры деформации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ в инфинитезимальной деформации (5.3), удовлетворяющей одному из условий (5.15) или одному из условий (5.16), получаем полиномиальную деформацию стандартного вложения $\mathcal{K}(2)$ в $SP(S^{1|2})$, порожденную 1-коциклами $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_5, \dots, \Upsilon_{10}$ и соответствующую условиям (5.14) при $h = 0$. Точнее, мы получаем одну из полиномиальных деформаций $\rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(1)}, \dots, \rho_{\lambda,\mu}^{(4)}$ и $\rho_{\lambda,\mu,0}^{(5)}$. Более того, используя те же аргументы, что и в доказательстве предложения 5.1, выводим, что любая нетривиальная полиномиальная деформация стандартного вложения $\mathcal{K}(2) \rightarrow SP(S^{1|2})$, порожденная коциклами Υ_1, Υ_2 и Υ_9 , эквивалентна деформации $\rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(5)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Деформации вложений $\mathcal{K}(2)$ в $SP(S^{1|2})_{\text{SL}}$ суть “полуклассические пределы” деформаций вложений $\mathcal{K}(2)$ в $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$, исключая $\rho_{\lambda,\mu,\nu}^{(5)}$. Это отличается от общей картины для $n = 0$ и $n = 1$ (см. работы [4], [8]).

6. ВАРИАЦИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ЗАРЯДА

Пространство $H_0^1(S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}, S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}})$ четных внешних супердифференциальных операторов супералгебры Ли $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ содержит линейный оператор $\text{ad}_{\ln \xi}$ на $S\Psi D(S^{1|2})_{\text{SL}}$ [13]. Этот внешний супердифференциальный оператор определяет нетривиальный 2-коцикл с числовыми значениями [13]:

$$\tilde{C}_1(A, B) = \text{Str}([\ln \xi, A] \circ B). \quad (6.1)$$

Известно (см., например, [7]), что пространство $H^2(\mathcal{K}(2), \mathbb{C})$ порождено коциклом Невё–Шварца

$$\begin{aligned} C(X_F, X_G) &= -\frac{1}{2} \int_{S^{1|2}} F \eta_1 \eta_2 (G') \operatorname{vol}(x, \theta) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{S^1} (f_0 g_0''' + f_1 g_1'' + f_2 g_2'' - f_{12} g_{12}') dx, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $F = f_0 + f_1 \theta_1 + f_2 \theta_2 + f_{12} \theta_1 \theta_2$ и $G = g_0 + g_1 \theta_1 + g_2 \theta_2 + g_{12} \theta_1 \theta_2$ для $f_0, f_1, f_2, f_{12}, g_0, g_1, g_2, g_{12} \in C^\infty(S^1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Ограничение 2-коцикла (6.1) на супералгебру Ли $\mathcal{K}(2)$ совпадает с коциклом Невё–Шварца.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Ограничение коцикла $\tilde{C}_1$ на $\mathcal{K}(2)$ по отношению к вложению $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu}^i$ есть $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu}^{i*}(\tilde{C}_1) = (4\lambda + 1)C$, а по отношению к вложению $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu, \nu}^i$ есть $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu, \nu}^{i*}(\tilde{C}_1) = C$. В случае h -деформированной супералгебры $S\Psi D_h(S^{1|2})$ имеем

$$\tilde{\rho}_{\lambda, \mu}^{i*}(\tilde{C}_1) = h^{-1}(4\lambda + 1)C, \quad \tilde{\rho}_{\lambda, \mu, \nu}^{i*}(\tilde{C}_1) = h^{-1}C, \quad (6.3)$$

где $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu}^i$ и $\tilde{\rho}_{\lambda, \mu, \nu}^i$ определяются из теоремы 5.1.

Предложение доказывается прямым вычислением.

Благодарности. Авторы признательны профессору В. Овсиенко за внимательное чтение этой статьи на разных стадиях написания, ценные замечания и исправление многих ошибок. Особая благодарность рецензенту за его замечания и предложения.

Список литературы

- [1] P. B. Cohen, Yu. I. Manin, D. Zagier, “Automorphic pseudodifferential operators”, *Algebraic Aspects of Integrable Systems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **26**, eds. A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 17–47.
- [2] D. R. Lebedev, Yu. I. Manin, *Phys. Lett. A*, **74**:3–4 (1979), 154–156.
- [3] Д. Р. Лебедев, Ю. И. Манин, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:4 (1979), 40–46.
- [4] V. Ovsienko, C. Roger, “Deforming the Lie algebra of vector fields on S^1 inside the Lie algebra of pseudodifferential symbols on S^1 ”, *Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **194**, eds. A. Astashkevich S. Tabachnikov, AMS, Providence, RI, 1999, 211–227.
- [5] V. Ovsienko, C. Roger, *Comm. Math. Phys.*, **198**:1 (1998), 97–110.
- [6] M. Adler, *Invent. Math.*, **50**:3 (1979), 219–248.
- [7] P. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina, *Acta Math. Vietnam.*, **26**:1 (2001), 27–63; [arXiv: hep-th/9702120](#).
- [8] N. Ben Fraj, S. Omri, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **13**:1 (2006), 19–33.
- [9] D. B. Fuchs, D. A. Leites, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **37**:12 (1985), 1595–1596.
- [10] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [11] A. Dzhumadil'daev, *Z. Phys. C*, **72**:3 (1996), 509–517.
- [12] E. Poletaeva, *J. Math. Phys.*, **42**:1 (2001), 526–540.
- [13] A. O. Radul, *Phys. Lett. B*, **265**:1–2 (1991), 86–91.
- [14] Yu. I. Manin, A. O. Radul, *Comm. Math. Phys.*, **98**:1 (1985), 65–77.

- [15] *Quantum Fields and Strings: a Course for Mathematicians*, V. 1, 2. Material from the Special Year on Quantum Field Theory (Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997), eds. P. Deligne, P. Etingof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison, E. Witten, AMS, Providence, RI, 1999.
- [16] Б. М. Зупник, Д. Г. Пак, *ТМФ*, **77**:1 (1988), 97–106.
- [17] A. Fialowski, D. B. Fuchs, *J. Funct. Anal.*, **161**:1 (1999), 76–110.
- [18] A. Nijenhuis, R. W. Richardson Jr., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 175–179.
- [19] B. Agrebaoui, F. Ammar, P. Lecomte, V. Ovsienko, *Internat. Math. Res. Not.*, **2002**:16 (2002), 847–869.
- [20] B. Agrebaoui, M. Ben Ammar, N. Ben Fraj, V. Ovsienko, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**:2 (2003), 148–156.
- [21] M. Ben Ammar, M. Boujelbene, *SIGMA*, **4** (2008), 065.
- [22] B. Agrebaoui, N. Ben Fraj, S. Omri, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **13**:4 (2006), 523–534; [arXiv: math-ph/0603057](#).

Поступила в редакцию 7.10.2009,
после доработки 5.11.2009