Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Да-Цзюнь Чжан, Цзянь-Бин Чжан, Цин Шэнь, Пре-
дельная симметрия уравнения Кортевега–де Фриза и ее
приложения, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 277–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:07:03

© 2010 г. Да-Цзюнь Чжан*, Цзянь-Бин Чжан*[†], Цин Шэнь*

ПРЕДЕЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Обсуждается симметрия уравнения Кортевега–де Фриза. Симметрию можно связать с симметрией квадратов собственных функций с помощью предельной процедуры. Как приложения рассматриваются редукция подобия уравнения Кортевега–де Фриза и уравнение Кортевега–де Фриза с новыми самосогласованными источниками. Некоторые решения получаются с помощью билинейного подхода.

Ключевые слова: симметрия, уравнение Кортевега–де Фриза, условие симметрии, самосогласованные источники, билинейный метод.

1. ВВЕДЕНИЕ

Симметрии играют важную роль при нахождении аналитических решений нелинейных уравнений эволюции [1], [2]. Симметрия связана с однопараметрической группой преобразований соответствующего уравнения и в принципе ведет к редукции подобия изначального уравнения, из которой можно дальше получить решение, инвариантное по отношению к действию группы. Обычно для интегрируемой системы Лакса волновая функция с парой Лакса (иногда вместе с волновой функцией в соответствующей формальной сопряженной паре Лакса) могут порождать симметрию, и такая симметрия обычно приводит к солитонным решениям с помощью подобной редукции, а также к самосогласованным источникам. Возьмем для примера хорошо известное уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), т. е.

$$u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

с парой Лакса

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= (k^2 - u)\varphi, \\ \varphi_t &= \varphi_{xxx} + 3(k^2 + u)\varphi_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функция

$$\sigma = (\varphi^2)_x \quad (1.3)$$

*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, China.
E-mail: djzhang@staff.shu.edu.cn

[†]School of Mathematics Science, Xuzhou Normal University, Xuzhou, China

обеспечивает симметрию квадратов собственных функций для уравнения КдФ (1.1), если φ разрешает пару Лакса (1.2). Можно рассмотреть условие связи

$$u = 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i^2, \quad (1.4)$$

проистекающее из следующей комбинированной симметрии:

$$\hat{\sigma} = u_x - 2 \sum_{i=1}^N (\varphi_i^2)_x, \quad (1.5)$$

где каждое φ_i разрешает пару Лакса (1.2) с $k = k_i$. Формулу (1.5) можно вывести как побочный результат обратного преобразования рассеяния [3], поэтому оно приводит к N -солитонным решениям. Эту формулу обычно также рассматривают как отображение баргмановского типа, чтобы преобразовать солитонные уравнения в конечномерные вполне интегрируемые гамильтоновы системы с помощью подхода нелинеаризации [4]–[6]. Кроме того, с помощью подхода связанного потока [7], [8], уравнение (1.3) также может привести к уравнению КдФ с самосогласованными источниками [9]:

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x - u_{xxx} &= 2 \sum_{i=1}^N (\varphi_i^2)_x, \\ \varphi_{i,xx} &= (k_i^2 - u)\varphi_i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

соответствующему солитонам с разнообразной динамикой.

В настоящей статье нам хотелось бы рассмотреть предельную форму симметрии квадратов собственных функций (1.3), являющуюся также симметрией уравнения КдФ. Такая предельная симметрия может приводить к решениям уравнения КдФ, отличным от солитонов, но связанным с ними посредством некоторой предельной процедуры. Предельная симметрия также приводит к источникам уравнения КдФ, и можно исследовать его решения. Наш способ получения решений – билинейный подход Хироты.

Мы рассмотрим предельную симметрию в разделе 2, соответствующее условие подобия в разделе 3 и уравнение КдФ с источниками в разделе 4.

2. ПРЕДЕЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ КДФ

Рассмотрим

$$\tilde{\sigma} = (\varphi\psi)_x, \quad (2.1)$$

где φ – волновая функция в паре Лакса (1.2), а ψ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= (k^2 - u)\psi + 2k\varphi, \\ \psi_t &= \psi_{xxx} + 3(k^2 + u)\psi_x + 6k\varphi_x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Прямой проверкой находим, что $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\sigma}_t = 6u\tilde{\sigma}_x + 6u_x\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}_{xxx}. \quad (2.3)$$

Это означает, что $\tilde{\sigma}$ – симметрия уравнения КдФ (1.1).

Ниже мы будем называть $\tilde{\sigma}$ предельной симметрией. С одной стороны, это вызвано тем, что условия (2.2) можно рассматривать как производную пары Лакса (1.2) по отношению к k , и такое же соотношение верно для формул (2.1) и (1.3). С другой стороны, в следующем разделе мы увидим, что решения, порожденные из $\tilde{\sigma}$ с помощью редукции подобия, можно рассматривать как предельные решения.

3. РЕДУКЦИЯ ПОДОБИЯ И РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую комбинированную симметрию:

$$\hat{\sigma} = u_x - 4 \sum_{j=1}^N (\varphi_j \psi_j)_x, \quad (3.1)$$

где φ_j, ψ_j разрешает пару Лакса (1.2) и вспомогательную систему (2.2) для $k = k_j$. Тогда условие $\hat{\sigma} = 0$ приводит к тому, что

$$u = 4 \sum_{j=1}^N \varphi_j \psi_j. \quad (3.2)$$

Таким образом, связанная система состоит из формулы (3.2), уравнения КдФ (1.1) и формул (1.2), (2.2) для $k = k_j, j = 1, 2, \dots, N$. Можно заметить, что если (φ_j, ψ_j) разрешают (1.2) и (2.2) для $k = k_j$, то u , определенное посредством формулы (3.2), удовлетворяет уравнению КдФ (1.1) автоматически, так что связанная система сводится к следующему:

$$\begin{aligned} u &= 4 \sum_{j=1}^N \varphi_j \psi_j, \\ \varphi_{j,xx} &= (k_j^2 - u) \varphi_j, \\ \varphi_{j,t} &= \varphi_{j,xxx} + 3(k_j^2 + u) \varphi_{j,x}, \\ \psi_{j,xx} &= (k_j^2 - u) \psi_j + 2k_j \varphi_j, \\ \psi_{j,t} &= \psi_{j,xxx} + 3(k_j^2 + u) \psi_{j,x} + 6k_j \varphi_{j,x}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для решения этой системы введем преобразование

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad \varphi_j = \frac{g_j}{f}, \quad \psi_j = \frac{h_j}{f}, \quad (3.4)$$

с помощью которого система (3.3) записывается как

$$\begin{aligned} D_x^2 f \cdot f &= 4 \sum_{j=1}^N g_j h_j, \\ D_x^2 g_j \cdot f &= k_j^2 g_j f, \\ D_x^2 h_j \cdot f &= k_j^2 h_j f + 2k_j g_j f, \\ D_t g_j \cdot f &= (D_x^3 + 3k_j^2 D_x) g_j \cdot f, \\ D_t h_j \cdot f &= (D_x^3 + 3k_j^2 D_x) h_j \cdot f + 6k_j D_x g_j \cdot f, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где D – хорошо известный билинейный оператор Хироты, определенный уравнением [10], [11]

$$D_t^m D_x^n a(t, x) \cdot b(t, x) = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} a(t+s, x+y) b(t-s, x-y) \Big|_{s=0, y=0}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Затем разлагаем g_j , h_j , f :

$$\begin{aligned} g_j &= g_j^{(1)}\varepsilon + g_j^{(3)}\varepsilon^3 + g_j^{(5)}\varepsilon^5 + \dots, \\ h_j &= h_j^{(1)}\varepsilon + h_j^{(3)}\varepsilon^3 + h_j^{(5)}\varepsilon^5 + \dots, \\ f &= 1 + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(4)}\varepsilon^4 + f^{(6)}\varepsilon^6 + \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

и подставляем их в систему (3.5). Когда $N = 1$, находим, что разложения можно оборвать, положив $f^{(2j)} = g_1^{(2j-1)} = h_1^{(2j-1)} = 0$ для $j \geq 3$, и остается

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \frac{1}{2k_1} (k_1 x + 12k_1^3 t - 1) e^{2\xi_1}, \\ f^{(4)} &= -\frac{1}{64k_1^2} e^{4\xi_1}, \\ g_1^{(1)} &= k_1 e^{\xi_1}, \\ g_1^{(3)} &= -\frac{1}{8} e^{3\xi_1}, \\ h_1^{(1)} &= k_1 (x + 12k_1^2 t) e^{\xi_1}, \\ h_1^{(3)} &= \frac{1}{8} \left(x + 12k_1^2 t - \frac{2}{k_1} \right) e^{3\xi_1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

а ξ_j — это

$$\xi_j = k_j x + 4k_j^3 t + \xi_j^{(0)} \quad (3.8)$$

с вещественными параметрами k_j , $e^{\xi_j^{(0)}}$.

Когда $N = 2$, решение можно описать с помощью $f^{(2j)}, g_i^{(2j-1)}, h_i^{(2j-1)}$, $1 \leq j \leq 4$ и $i = 1, 2$. Мы перечислим их в приложении.

Вернемся к случаю $N = 1$ и исследуем динамику. В этом случае

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad f = 1 + \frac{1}{2} \left(x + 12k_1^2 t - \frac{1}{k_1} \right) e^{2\xi_1} - \frac{1}{64k_1^2} e^{4\xi_1}, \quad (3.9)$$

где мы положили $\varepsilon = 1$ в разложениях (3.6). Это решение изображено на рис. 1. Оно имеет сингулярность, движущуюся по кривой

$$8k_1^3 t + 2k_1 x - \ln \left[2(k_1 x + 12k_1^3 t - 1) + \sqrt{1 + 4(k_1 x + 12k_1^3 t - 1)^2} \right] - \ln 8k_1 = 0. \quad (3.10)$$

Помимо движущейся сингулярности, у решения также есть “нормальный” солитон с постоянной амплитудой $2k_1^2$, как можно видеть на рис. 1а. Посредством асимптотического анализа можно найти, что когда $|t| \rightarrow \infty$, траектория для “нормального” солитона имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -4k_1^2 t + \frac{1}{2k_1} (\ln(-t) + 8 \ln 2 + 4 \ln k_1), & t \rightarrow -\infty, \\ x &= -4k_1^2 t - \frac{1}{2k_1} (\ln t + 2 \ln 2 + 2 \ln k_1), & t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где мы предположили, что $k_1 > 0$.

Рис. 1. Решение u , заданное уравнением (3.9) с $k_1 = 0.5$, $\xi_1^{(0)} = 0$: а – форма u при $t = 100$ и с солитоном, и с сингулярностью; б – изображение плотности u при $x \in [-15, 15]$, $t \in [-12, 12]$, где серый фон обозначает значение u вблизи нуля, белая полоса – сингулярность, а темная – солитон с постоянной амплитудой.

Теперь рассмотрим отношение между полученным выше решением (3.9) и известным двухсолитонным решением уравнения КдФ, данным формулами $u = 2(\ln f)_{xx}$ и

$$f = 1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 e^{2\xi_1 + 2\xi_2}, \quad (3.11)$$

где ξ_j определены как (3.8). Благодаря произвольности $e^{\xi_j^{(0)}}$ в формулу (3.11) мы подставляем $\alpha_1 e^{2(\xi_1^{(0)} + \beta_1(k_1))} / (k_1 - k_2)$ и $\alpha_1 e^{2(\xi_1^{(0)} + \beta_1(k_2))} / (k_2 - k_1)$ вместо $e^{2\xi_1^{(0)}}$ и $e^{2\xi_2^{(0)}}$ соответственно, где α_1 – вещественная константа, а $\beta_1(k)$ – дифференцируемая функция от k . Таким способом мы записываем уравнение (3.11) в виде

$$f = 1 + \alpha_1 \frac{e^{2\xi_1} - e^{2\xi_2}}{k_1 - k_2} - \left(\frac{\alpha_1}{k_1 + k_2} \right)^2 e^{2\xi_1 + 2\xi_2} \quad (3.12)$$

с новыми ξ_j :

$$\xi_j = k_j x + 4k_j^3 t + \xi_j^{(0)} + \beta_1(k_j), \quad j = 1, 2. \quad (3.13)$$

Теперь, если положить $k_2 \rightarrow k_1$ и воспользоваться правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{k_2 \rightarrow k_1} \frac{e^{\xi_1} - e^{\xi_2}}{k_1 - k_2} = (x - 3k_1^2 t) e^{\xi_1}, \quad (3.14)$$

а тогда уравнение (3.12) можно записать как

$$f \rightarrow 1 + 2\alpha_1 (x + 12k_1^2 t + \partial_{k_1} \beta_1(k_1)) e^{2\xi_1} - \frac{\alpha_1^2}{4k_1^2} e^{4\xi_1}, \quad (3.15)$$

откуда можно восстановить (3.9), взяв $\alpha_1 = 1/4$, $\beta_1(k) = -\ln k_1$.

Теперь можно видеть, что решения, выведенные с использованием условия симметрии (3.2), – предельные, или дипольные, решения [12]–[15].

4. УРАВНЕНИЕ КДФ С ИСТОЧНИКАМИ

Известно, что квадраты собственных функций можно использовать с целью получения источников для солитонных уравнений [7], [8]. Случай уравнения КДФ – это система [9]

$$u_t - u_{xxx} - 6uu_x - 2 \sum_{j=1}^N (\phi_j^2)_x = 0, \quad (4.1)$$

$$\varphi_{j,xx} = (k_j^2 - u)\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

называемая уравнением КДФ с самосогласованными источниками (КДФССИ). По предельной симметрии (2.1) имеем следующее КДФССИ:

$$u_t - u_{xxx} - 6uu_x - 4 \sum_{j=1}^N (\phi_j \psi_j)_x = 0, \quad (4.2)$$

$$\varphi_{j,xx} = (k_j^2 - u)\varphi_j, \quad (4.3)$$

$$\psi_{j,xx} = (k_j^2 - u)\psi_j + 2k_j\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

где $\{k_j^2\}$ – N различных собственных значений. Это уравнение интегрируемо по Лаксу с парой Лакса

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= (k^2 - u)\varphi, \\ \varphi_t &= A\varphi + B\varphi_x, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} A &= u_x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\phi_j \psi_{jx} + \phi_{jx} \psi_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{2k_j \phi_j \phi_{jx}}{(\lambda - \lambda_j)^2} \right), \\ B &= -4\lambda - 2u + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\phi_j \psi_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{k_j \phi_j^2}{(\lambda - \lambda_j)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Чтобы это получить, можно использовать тот факт, что

$$L(\varphi_j^2) = 2k_j^2(\phi_j^2)_x, \quad L(\varphi_j \psi_j) = 2k_j^2(\phi_j \psi_j)_x + 2k_j(\phi_j^2)_x, \quad (4.7)$$

где $L = \partial^3/2 + 2u\partial + u_x$ – оператор сильной симметрии, а φ_j, ψ_j удовлетворяют условиям (4.3) и (4.4).

Ниже мы находим решения КДФССИ (4.2)–(4.4) методом Хироты. По-прежнему используя преобразование (3.4), можно переписать (4.2) в билинейной форме:

$$\begin{aligned} (D_t D_x - D_x^4) f \cdot f &= 4 \sum_{j=1}^N g_j h_j, \\ D_x^2 g_j \cdot f &= k_j^2 g_j f, \\ D_x^2 h_j \cdot f &= k_j^2 h_j f + 2k_j g_j f, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Затем подставим разложение (3.6) в (4.8). Когда $N = 1$, можно найти решение, описываемое уравнениями

$$\begin{aligned}
 f^{(2)} &= \frac{1}{2} (k_1 x + 12k_1^3 t - \beta_1(t)) e^{2\xi_1}, \\
 f^{(4)} &= -\frac{1}{64} e^{4\xi_1}, \\
 g_1^{(1)} &= k_1 \sqrt{\beta_1'(t)} e^{\xi_1}, \\
 g_1^{(3)} &= -\frac{1}{8} k_1 \sqrt{\beta_1'(t)} e^{3\xi_1}, \\
 h_1^{(1)} &= \sqrt{\beta_1'(t)} (k_1 x + 12k_1^3 t - \beta_1(t)) e^{\xi_1}, \\
 h_1^{(3)} &= \frac{1}{8} \sqrt{\beta_1'(t)} (k_1 x + 12k_1^3 t - \beta_1(t)) e^{3\xi_1}, \\
 f^{(2j)} &= g_1^{(2j-1)} = h_1^{(2j-1)} = 0, \quad j \geq 3,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

где ξ_j – это

$$\xi_j = k_j x + 4k_j^3 t + \beta_1(t) + \xi_j^{(0)}, \tag{4.10}$$

$k_j, e^{\xi_j^{(0)}}$ – вещественные параметры, $\beta_1(t)$ – произвольная функция, зависящая от t , и $\beta_1'(t) = d\beta_1(t)/dt$.

Тогда простейшее нетривиальное решение (4.2)–(4.4) имеет вид

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad f = 1 + \frac{1}{2} (k_1 x + 12k_1^3 t - \beta_1(t)) e^{2\xi_1} - \frac{1}{64} e^{4\xi_1}, \tag{4.11}$$

где в (3.6) мы положили $\varepsilon = 1$.

Из рис. 2 можно видеть, что помимо сингулярности источник $\varphi_1 \psi_1$ вводит произвольную зависящую от времени функцию $\beta_1(t)$, что может привести к вариации скоростей и сингулярности, и солитона. Заметим, что солитон (4.11) также связан с двухсолитонным решением (4.1) посредством определенной предельной процедуры.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели симметрию $(\varphi\psi)_x$ для уравнения КдФ. Она связана с симметрией $(\varphi^2)_x$ квадратов собственных функций посредством определенной предельной процедуры. Как приложения, мы вывели решения уравнения КдФ через условие связи, соответствующее симметрии $\sum_{j=1}^N (\varphi_j \psi_j)_x$. Показано, что полученное решение (случай $N = 1$) является предельным решением двухсолитонного решения уравнения КдФ. У этого решения есть и движущаяся сингулярность, и солитон с постоянной амплитудой. Мы привели траектории сингулярности и солитона.

Рис. 2. Изображение плотности решения u , заданного формулой (4.11) с $k_1 = 0.5$, $\xi_1^{(0)} = 0$, $\beta_1(t) = t \sin t$, $x \in [-15, 15]$, $t \in [-10, 10]$. Серый фон обозначает значение u вблизи нуля, белая полоса – сингулярность, а черная – солитон с конечной амплитудой.

Кроме того, мы привели уравнение КдФССИ, источники которого связаны с симметрией $(\varphi\psi)_x$, но не $(\varphi^2)_x$. Это уравнение интегрируемо по Лаксу. Мы вывели его решения через метод Хироты. Простейшее нетривиальное решение также состоит как из сингулярностей, так и из солитонов, но источники могут приводить к разнообразной динамике. Мы полагаем, что подобные симметрии можно также найти для множества других солитонных уравнений, и получающиеся в результате решения могут быть связаны с солитонными решениями посредством определенных предельных процедур.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение системы (3.5) с $N = 2$

Приведем формулы для $f^{(2j)}$, $g_i^{(2j-1)}$, $h_i^{(2j-1)}$, $1 \leq j \leq 4$, $i = 1, 2$, из (3.6), которые были выведены с помощью компьютерной программы *Mathematica*.

$$f^{(2)} = \frac{e^{2\xi_1} k_2 (-1 + 12k_1^3 t + k_1 x) + e^{2\xi_2} k_1 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x)}{2k_1 k_2},$$

$$\begin{aligned} f^{(4)} = \frac{1}{64} \Bigg\{ & -\frac{e^{4\xi_1}}{k_1^2} - \frac{e^{4\xi_2}}{k_2^2} + \frac{1}{k_1 k_2 (k_1 + k_2)^4} 16e^{2(\xi_1 + \xi_2)} [-24k_1^6 k_2 t + \\ & + k_1^4 (1 + 12k_2^3 t - 3k_2 x) - k_2^4 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + 12k_1^7 t (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) - \\ & - k_1^5 (24k_2^2 t - x) (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + 2k_1^2 k_2^2 (-3 + 12k_2^3 t + 2k_2 x) + \\ & + k_1^3 k_2 (1 + 2k_2 (6k_2^2 t + 72k_2^5 t^2 + 2x - 6k_2^3 t x - k_2 x^2)) + \\ & + k_1 k_2^3 (1 + k_2 (-3x + k_2 (-24k_2 t + 12k_2^2 t x + x^2)))] \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$f^{(6)} = \frac{(k_1 - k_2)^3}{128k_1^2k_2^2(k_1 + k_2)^5} e^{2(\xi_1 + \xi_2)} [e^{2\xi_2} k_1 (k_1^2 - k_2^2 - 12k_1^5 t + \\ + k_1^3 (12k_2^2 t - x) + k_1 k_2 (-4 + k_2 x)) + e^{2\xi_1} k_2 (4k_1 k_2 - k_1^2 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + \\ + k_2^2 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x))],$$

$$f^{(8)} = \frac{e^{4(\xi_1 + \xi_2)} (k_1 - k_2)^8}{4096k_1^2k_2^2(k_1 + k_2)^8},$$

$$g_1^{(1)} = k_1 e^{\xi_1},$$

$$g_1^{(3)} = -\frac{1}{8} e^{3\xi_1} + \frac{e^{\xi_1 + 2\xi_2} k_1 [-k_1 k_2 + k_1^2 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) - k_2^2 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x)]}{2k_2 (k_1 + k_2)^2},$$

$$g_1^{(5)} = \frac{(k_1 - k_2)^2 e^{\xi_1}}{64k_2^2 (k_1 + k_2)^4} \{4e^{2(\xi_1 + \xi_2)} k_2 [3k_1 k_2 - k_1^2 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + \\ + k_2^2 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x)] - e^{4\xi_2} k_1 (k_1 + k_2)^2\},$$

$$g_1^{(7)} = \frac{(k_1 - k_2)^6}{512k_2^2 (k_1 + k_2)^6} e^{3\xi_1 + 4\xi_2},$$

$$h_1^{(1)} = k_1 (12k_1^2 t + x) e^{\xi_1},$$

$$h_1^{(3)} = \frac{1}{8} k_1 e^{\xi_1} \left\{ \frac{-2 + 12k_1^3 t + k_1 x}{k_1^2} e^{2\xi_1} + \right. \\ + \frac{4}{(k_1 + k_2)^3} e^{2\xi_2} \left[-\frac{12(k_1 + k_2)(k_1^4 + k_1^3 k_2 - k_1^2 k_2^2 - 2k_2^4) t}{k_2} - \right. \\ - k_1 - 3k_2 + 144k_1^2 (k_1 - k_2) k_2^2 (k_1 + k_2)^2 t^2 - \frac{k_1 + k_2}{k_2} (k_1^2 + k_1 k_2 - 3k_2^2) x + \\ \left. \left. + 12(k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^2 (k_1^2 + k_2^2) t x + (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^2 x^2 \right] \right\},$$

$$h_1^{(5)} = \frac{(k_1 - k_2)}{64k_1 k_2^2 (k_1 + k_2)^5} e^{\xi_1} \{ -e^{4\xi_2} k_1^2 (k_1 + k_2)^2 (4k_2 + (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)(12k_1^2 t + x)) + \\ + 4e^{2(\xi_1 + \xi_2)} k_2 [-36k_1^6 k_2 t + k_1^4 (2 + 12k_2^3 t - 5k_2 x) - 2k_2^4 (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + \\ + 12k_1^7 t (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + k_1^5 (-24k_2^2 t + x) (-1 + 12k_2^3 t + k_2 x) + \\ + k_1^2 k_2^2 (-10 + 48k_2^3 t + 7k_2 x) + k_1^3 k_2 (5 + 2k_2 (6k_2^2 t + 72k_2^5 t^2 + 2x - 6k_2^3 t x - k_2 x^2)) + \\ + k_1 k_2^3 (-3 + k_2 (-3x + k_2 (-24k_2 t + 12k_2^2 t x + x^2)))] \},$$

$$h_1^{(7)} = -\frac{(k_1 - k_2)^5 [-2k_1^2 + 2k_2^2 + 12k_1^5 t + k_1^3 (-12k_2^2 t + x) + k_1 k_2 (4 - k_2 x)]}{512k_1 k_2^2 (k_1 + k_2)^7} e^{3\xi_1 + 4\xi_2},$$

$$g_2^{(1)} = k_2 e^{\xi_2},$$

$$g_2^{(3)} = -\frac{1}{8} e^{3\xi_2} + \frac{e^{2\xi_1 + \xi_2} k_2 [k_1^2 - k_2^2 - 12k_1^5 t + k_1^3 (12k_2^2 t - x) + k_1 k_2 (-1 + k_2 x)]}{2k_1 (k_1 + k_2)^2},$$

$$\begin{aligned}
g_2^{(5)} &= \frac{(k_1 - k_2)^2}{64k_1^2(k_1 + k_2)^4} e^{\xi_2} \left\{ -e^{4\xi_1} k_2 (k_1 + k_2)^2 + 4e^{2(\xi_1 + \xi_2)} k_1 [-k_1^2 + k_2^2 + 12k_1^5 t + \right. \\
&\quad \left. + k_1^3 (-12k_2^2 t + x) + k_1 k_2 (3 - k_2 x)] \right\}, \\
g_2^{(7)} &= \frac{e^{4\xi_1 + 3\xi_2} (k_1 - k_2)^6}{512k_1^2(k_1 + k_2)^6}, \\
h_2^{(1)} &= k_2 (12k_2^2 t + x) e^{\xi_2}, \\
h_2^{(3)} &= \frac{1}{8} k_2 e^{\xi_2} \left\{ \frac{12k_2^3 t + k_2 x - 2}{k_2^2} e^{2\xi_2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{(k_1 + k_2)^3} e^{2\xi_1} \left[-\frac{12(k_1 + k_2)(k_2^4 + k_2^3 k_1 - k_2^2 k_1^2 - 2k_1^4) t}{k_1} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3k_1 - k_2 + 144k_2^2 (k_2 - k_1) k_1^2 (k_1 + k_2)^2 t^2 - \frac{k_1 + k_2}{k_1} (k_2^2 + k_1 k_2 - 3k_1^2) x + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 12(k_2 - k_1)(k_1 + k_2)^2 (k_1^2 + k_2^2) t x + (k_2 - k_1)(k_1 + k_2)^2 x^2 \right] \right\}, \\
h_2^{(5)} &= \frac{k_2 - k_1}{64k_2 k_1^2 (k_1 + k_2)^5} e^{\xi_2} \left\{ -e^{4\xi_1} k_2^2 (k_1 + k_2)^2 (4k_1 + (k_2 - k_1)(k_1 + k_2)(12k_2^2 t + x)) + \right. \\
&\quad + 4e^{2(\xi_1 + \xi_2)} k_1 [-36k_2^6 k_1 t + k_2^4 (2 + 12k_1^3 t - 5k_1 x) - 2k_1^4 (-1 + 12k_1^3 t + k_1 x) + \\
&\quad + 12k_2^7 t (-1 + 12k_1^3 t + k_1 x) + k_1^5 (-24k_1^2 t + x) (-1 + 12k_1^3 t + k_1 x) + \\
&\quad + k_2^2 k_1^2 (-10 + 48k_1^3 t + 7k_1 x) + \\
&\quad + k_2^3 k_1 (5 + 2k_1 (6k_1^2 t + 72k_1^5 t^2 + 2x - 6k_1^3 t x - k_1 x^2)) + \\
&\quad \left. + k_2 k_1^3 (-3 + k_1 (-3x + k_1 (-24k_1 t + 12k_1^2 t x + x^2))) \right\}, \\
h_2^{(7)} &= -\frac{e^{4\xi_1 + 3\xi_2} (k_1 - k_2)^5 [-4k_1 k_2 + k_1^2 (-2 + 12k_2^3 t + k_2 x) - k_2^2 (-2 + 12k_2^3 t + k_2 x)]}{512k_1^2 k_2 (k_1 + k_2)^7}, \\
f^{(2j)} &= g_i^{(2j-1)} = h_i^{(2j-1)} = 0, \quad j > 4, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Благодарности. Проект поддержан Национальным фондом естественных наук Китая (10671121) и Шанхайским проектом ведущих академических дисциплин (№ J50101).

Список литературы

- [1] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [2] G. W. Bluman, S. C. Anco, *Symmetry and Integration Methods in Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **154**, Springer, New York, 2002.
- [3] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**:1 (1974), 97–133.
- [4] C. W. Cao, X. G. Geng, “Classical integrable systems generated through nonlinearization of eigenvalue problems”, *Nonlinear Physics*, Res. Rep. Phys., eds. C. H. Gu, Y. S. Li, G. Z. Tu, Springer, Berlin, 1994, 68–78.

- [5] C. W. Cao, *Sci. China Ser. A*, **33**:5 (1990), 528–536.
- [6] C. W. Cao, X. G. Geng, *J. Phys. A*, **23**:18 (1990), 4117–4125.
- [7] M. Antonowicz, *Phys. Lett. A*, **165**:1 (1992), 47–52.
- [8] Y. B. Zeng, Y. S. Li, *J. Phys. A*, **26**:5 (1993), L273–L278.
- [9] R. Lin, Y. Zeng, W.-X. Ma, *Physica A*, **291**:1–4 (2001), 287–298.
- [10] R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.*, **27**:18 (1971), 1192–1194.
- [11] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts Math., **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [12] M. Wadati, K. Ohkuma, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:6 (1982), 2029–2035.
- [13] H. Tsuru, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **53** (1984), 2908–2921.
- [14] V. B. Matveev, *Phys. Lett. A*, **166**:3–4 (1992), 205–208.
- [15] В. Б. Матвеев, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 44–61.

Поступила в редакцию 29.09.2009