Общероссийский математический портал

М. А. Браун, В. В. Вечернин, Механизм кварковой коалесценции вблизи порога,
ТМФ, 2004, том 139, номер 3, 381–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:25:16

© 2004 г.

М. А. Браун*, В. В. Вечернин*

МЕХАНИЗМ КВАРКОВОЙ КОАЛЕСЦЕНЦИИ ВБЛИЗИ ПОРОГА

Процесс кварковой коалесценции (когерентного слипания кварков) описывается как возможный механизм формирования кумулятивных частиц. Фейнмановские диаграммы для механизма когерентного слипания кварков вычислены и просуммированы вблизи кумулятивных порогов. Анализируется и учитывается интерференция как между вкладками, происходящими от разных диаграмм, так и от квадрирования амплитуды процесса коалесценции для одной диаграммы. Представлены замкнутые формулы для описания процесса формирования кумулятивных частиц в механизме коалесценции.

Ключевые слова: релятивистские ядра, фейнмановские диаграммы, пороговое поведение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В процессах рассеяния при высоких энергиях с участием атомных ядер актуальной является задача описания рождения так называемых кумулятивных частиц – элементарных частиц, образующихся в акте рассеяния и уносящих энергию сразу нескольких нуклонов ядра (в такой системе отсчета, где ядро быстро движется). Начало экспериментальным исследованиям кумулятивного эффекта было положено в пионерских работах Балдина [1]. Большие усилия были направлены и на теоретическое описание этого явления, которое самосогласованным образом возможно лишь на кварковом уровне (см., например, [2]–[5]).

В работах [6]–[9] был предложен один из подходов, позволяющий описать на кварковом уровне процесс рождения кумулятивных мезонов (в частности, пионов). В рамках этого подхода процесс образования кумулятивного пиона состоял в образовании одного быстрого кумулятивного кварка с последующей его фрагментацией в пион. Как показал анализ [10]–[12], в случае образования кумулятивных нуклонов (например, протонов) предпочтительным является другой механизм, когда образование кумулятивного нуклона происходит путем образования сразу трех быстрых кумулятивных кварков с последующим объединением их в нуклон. Такой механизм получил в литературе название механизма когерентного объединения (когерентного слипания) или коалесценции (coalescence).

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: vecherni@pink.phys.spbu.ru

Нашей целью является изложение математического формализма, пригодного для описания процесса формирования кумулятивных частиц путем когерентного объединения нескольких быстрых кварков в процессах взаимодействия адронов и ядер при высоких энергиях.

Важным упрощающим фактором, который позволяет продвинуться в решении задачи, является следующее ограничение: эти процессы рассматриваются лишь вблизи кумулятивных порогов, т.е. когда кумулятивная частица уносит практически весь импульс тех нуклонов ядра, на которых она образуется. Отклонение от соответствующего кинематического порога и является тем малым параметром, в главном порядке по которому и строится математическое описание.

Необходимо отметить, что мы следуем подходу, основанному на предположении о существовании так называемых составляющих или конститuentных (constituent) кварков (см., например, обзор [13]). При этом предположение о существовании у нуклона двух характерных размеров – радиуса составляющего кварка и радиуса нуклона – также используется в определенный момент для упрощения задачи. Ввиду сложности рассматриваемых диаграмм мы не учитываем также спины составляющих кварков, считая их скалярными.

Поскольку в рамках квантовой хромодинамики (КХД) теоретическое описание стадии адронизации – перехода от кварк-глюонных степеней свободы к адронным – в конечном состоянии пока не получено, то на практике при описании процессов сильных взаимодействий широко применяется феноменологический подход к описанию стадии адронизации, основанный на использовании функций фрагментации одиночных партонов (кварков и глюонов) в адроны. Идея о том, что в КХД процесс адронизации кварка может происходить также путем его объединения (коалесценции) с каким-либо из сопутствующих партонов, видимо, впервые была выдвинута в работе [14]. Позже эта идея была использована при описании процессов образования адронов с тяжелыми кварками (c и b) из протонов и пионов вблизи кинематической границы, когда очарованный адрон уносит значительную долю импульса начального протона (пиона) [15].

В этих работах была использована также еще одна важная идея о существовании так называемого “собственного” (intrinsic) скрытого очарования в обычных адронах. Было указано на то, что поскольку партонная волновая функция любого адрона является фоковским столбцом, в котором *изначально* (правда, возможно, с небольшим весом) присутствуют компоненты, содержащие $c\bar{c}$ пару, то это может проявлять себя в определенных процессах. В частности, было показано, что коалесценция (объединение, рекомбинация) такого “собственного” (скрытого) очарованного кварка с одним из валентных кварков адрона позволяет естественным образом объяснить наличие среди лидирующих частиц значительной доли очарованных адронов.

При описании кумулятивных явлений эта же идея об *изначальном* присутствии в волновой функции ядра редких конфигураций – малонуклонных корреляций [4], многокварковых кластеров [2], [5], [6], флуктонов [16] – также оказывается плодотворной. Важным общим моментом здесь является то, что эти редкие конфигурации, которые могут проявляться в некоторых специальных процессах, присущи самой волновой функции

объекта, а не возникают в результате его взаимодействия с другими объектами.

Как было показано в работах [17], вероятность наличия редких конфигураций в волновой функции, когда один конститuent уносит практически весь импульс всего связанного состояния, может быть вычислена на основе анализа так называемых “собственных” диаграмм, в которых несколько партонов взаимодействуют, что и приводит к наличию в волновой функции жесткой компоненты. Там же была обоснована возможность применения теории возмущений КХД вблизи кинематического порога для описания таких процессов взаимодействия между кварками.

В работах [6]–[12] эти идеи были использованы нами для описания процессов рождения кумулятивных частиц из ядер. Была предложена кварк-партоновая модель кумулятивных явлений, основанная на пертурбативных КХД-вычислениях соответствующих кварковых диаграмм вблизи порогов. Был разработан метод суммирования кварк-партоновых диаграмм Фейнмана вблизи порогов с помощью найденных рекуррентных соотношений и проведено суммирование всех “собственных” диаграмм, описывающих наличие в ядре быстрого кумулятивного кварка. Вблизи кумулятивных порогов были также вычислены и просуммированы диаграммы, описывающие рождение кумулятивных частиц в механизме когерентного объединения нескольких кварков.

В частности, было показано, что в механизме коалесценции возможны интерференционные эффекты двух типов: как между вкладками, происходящими от разных диаграмм, так и от квадрирования амплитуды процесса коалесценции для одной диаграммы. Было показано, что интерференционными вкладками между разными диаграммами можно пренебречь в пределе, когда радиус составляющего кварка считается гораздо меньшим радиуса нуклона. Однако даже в этом случае необходимо учитывать интерференционные эффекты, возникающие при вычислении квадрата модуля любой амплитуды процесса коалесценции (этот вопрос анализировался нами ранее, еще при изучении процессов коалесценции на нуклонном уровне [18]). Поскольку процесс объединения кварков носит когерентный характер, то правильный учет этих интерференционных эффектов безусловно необходим. К сожалению, в работах [15], где был предложен механизм кварковой коалесценции, это не было сделано. В этих работах сначала вычислялось сечение образования двух кварков, и только затем выполнялось интегрирование по их относительному импульсу, что полностью противоречит когерентности процесса слипания кварков (подробности см. ниже).

В работах [18] путем анализа фейнмановских диаграмм, описывающих процесс коалесценции, было также показано, что правильный учет этих интерференционных эффектов, а также возможности того, что объединяющиеся впоследствии частицы могут испускаться из разных точек ядра, позволяет объяснить нетривиальную угловую зависимость выходов частиц, образующихся в результате коалесценции.

Ниже подробно изложен такой подход, позволяющий получить замкнутые формулы для описания процесса формирования кумулятивных частиц за счет механизма когерентного слипания кварков.

Рис. 1. Диаграмма для амплитуды процесса коалесценции кварков вблизи кумулятивного порога.

2. АНАЛИЗ ДИАГРАММ

На рис. 1 представлена диаграмма взаимодействия налетающего адрона (H) с малонуклонным кластером (A) ядра. Здесь H – импульс налетающего адрона, P – импульс Nq -кластера, N – число конституентных кварков в ядерном кластере, $N = 6, 9, 12, \dots$, K – импульс кумулятивного адрона (F), образующегося путем объединения нескольких кварков кластера. Обозначим через n число этих объединяющихся (“активных”) кварков, а через $k_1^{(j)}$ и $k_1^{\prime(j)}$ – их импульсы до и после обмена глюонами в блоках W_j , $j = 1, \dots, n$. Очевидно, что

$$\sum_j k_1^{(j)} = K.$$

Через p_j мы обозначим число кварков-“доноров”, которые передают свои продольные импульсы данному j -му активному кварку. Их импульсы до и после глюонных обменов обозначим через $k_i^{\prime(j)}$ и $k_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, $i = 2, \dots, p_j + 1$. Пусть p – общее число до-

норов: $p = \sum_j p_j$. Условимся считать, что $\sum_j$ всегда распространяется на $j = 1, \dots, n$, а $\sum_i$ — на $i = 1, \dots, p_j + 1$, если нет никаких других прямых указаний. Как было показано в работе [6], все доноры должны провзаимодействовать с налетающим адроном. Если мы еще обозначим через k'_m , где $m = 1, \dots, M$, импульсы кварков-спектаторов, которые не являются донорами, то

$$\sum_{j,i} k_i'^{(j)} + \sum_m k'_m = P$$

и $n + p + M = N$.

Определим переменные светового фронта для ядерного кластера следующим образом: $x_i^{(j)'} = k_{i+}'^{(j)}/p_+$, $x'_m = k'_{m+}/p_+$, $x_i^{(j)} = k_{i+}^{(j)}/p_+$, $x_P = P_+/p_+$, и аналогично для образующегося адрона $x_K = K_+/p_+$, где p_+ — некий произвольно большой импульс. Для адрона, летящего навстречу ядру, соответственно имеем $y_i = h_{i-}/p_+$, $i = 1, \dots, L$, и $y_H = H_-/p_+$. Кумулятивной для рождающегося адрона (F) в этих переменных является область $x_K > 3x_P/N$.

Обозначим через A амплитуду, возникающую после присоединения к диаграмме, изображенной на рис. 1, соответствующей сопряженной диаграммы, а через J — инвариантный поток: $J = 2P_+ 2H_-$. Тогда, действуя как в работах [6], [8], получим для инклюзивного сечения рождения кумулятивного адрона посредством механизма объединения кварков следующее выражение (мы используем черту для обозначения переменных в сопряженной диаграмме):

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 2x_K \frac{d^3\sigma}{dx_K dK_\perp} &= \frac{1}{J} \text{Disc } A(0) = 2x_K C I_p \times \\ &\times \int \left[\Psi_P(x_i^{(j)'}, x'_m; k_{i\perp}^{(j)'}, k'_{m\perp}) W(x_i^{(j)'}; x_1^{(j)}) \prod_j \frac{1}{x_1^{(j)}} \Psi_K^*(x_1^{(j)}, k_{1\perp}^{(j)}) \times \right. \\ &\times \delta \left(\sum_{j,i} x_i^{(j)'} + \sum_m x'_m - x_P \right) \prod_{j,i} \frac{dx_i^{(j)'}}{2x_i^{(j)'}} \prod_{j,i=2}^{p_j+1} \frac{1}{m^2 + k_{i\perp}^{(j)2}} (2\pi)^3 \times \\ &\times \delta^{(2)} \left(\sum_{j,i} k_{i\perp}^{(j)'} + \sum_m k'_{m\perp} - P_\perp \right) \prod_{j,i} \frac{dk_{i\perp}^{(j)'}}{(2\pi)^3} \Big] \times \\ &\times [(\dots) \rightarrow (\overline{\dots}), \bar{x}'_m = x'_m, \bar{k}'_{m\perp} = k'_{m\perp}]^* (2\pi)^3 \times \\ &\times \delta^{(2)} \left(\sum_{j,i=2}^{p_j+1} k_{i\perp}^{(j)} + \sum_m k'_{m\perp} + K_\perp - P_\perp \right) \prod_{j,i=2}^{p_j+1} \frac{dk_{i\perp}^{(j)}}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \prod_m \frac{dx'_m}{2x'_m} \frac{dk'_{m\perp}}{(2\pi)^3} \sigma_{qq}(q_{i\perp}^{(j)}) (2\pi)^2 \times \\ &\times \delta^{(2)} \left(\sum_{j,i=1}^{p_j} q_{i\perp}^{(j)} \right) \prod_{j,i=1}^{p_j} \frac{dq_{i\perp}^{(j)}}{(2\pi)^2} \int \Psi_H(y_i, h_{i\perp}) \Psi_H^*(y_i, h_{i\perp} - \tilde{q}_{i\perp}) \times \\ &\times \delta \left(\sum_{i=1}^L y_i - y_H \right) (2\pi)^3 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^L h_{i\perp} - H_\perp \right) \prod_{i=1}^L \frac{dy_i}{2y_i} \frac{dh_{i\perp}}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где партонные волновые функции нормированы следующим образом:

$$\int |\Psi_P(x_i^{(j)'}, k_{i\perp}^{(j)'})|^2 \delta\left(\sum_{j,i} x_i^{(j)'} + \sum_m x'_m - x_P\right) \prod_{j,i} \frac{dx_i^{(j)'}}{2x_i^{(j)'}} \times \\ \times (2\pi)^3 \delta^{(2)}\left(\sum_{j,i} k_{i\perp}^{(j)'} + \sum_m k'_{m\perp} - P_\perp\right) \prod_{j,i} \frac{dk_{i\perp}^{(j)'}}{(2\pi)^3} = 1. \quad (2)$$

Детали вычислений можно найти в работе [10].

Важно отметить следующее. В случае реального порога, когда все спектаторные кварки являются донорами ($M = 0$, $N = n + p$), то условие, что активные кварки уносят весь продольный импульс кластера $x_K \rightarrow x_P$, автоматически приводит к выполнению условия $x_i^{(j)} \rightarrow 0$ для всех доноров. Это оправдывает применение теории возмущений КХД и ограничение минимальным необходимым числом глюонных обменов в блоках W_j . В случае же промежуточного порога, когда есть кварки-спектаторы, не являющиеся донорами ($M > 0$, $N = n + p + M$), условие $x_K \rightarrow (n + p)x'_0$, где $x'_0 = x_P/N$, будет вести к малости $x_i^{(j)}$ для всех кварков-доноров только в случае предположения, что партонная волновая функция $\Psi_P(x_i^{(j)'})$ имеет достаточно узкий пик в центральной точке при $x_i^{(j)'} = x'_0$.

Как было показано в работах [6], [8], [10], [11], вблизи порога результат автоматически пропорционален I_p , что соответствует правилам кваркового счета [3], [19]:

$$I_p = \frac{1}{2^p} \frac{\Delta^{2p-1}}{(2p-1)!},$$

где Δ – отклонение от порога – есть наш параметр малости: $\Delta = (n + p)x'_0 - x_K$, или для реального порога $\Delta = x_P - x_K$.

Рис. 2. Пример диаграмм, которые дают вклад в W_j вблизи порога при $p_j = 5$.

Для W и $\overline{W}$ мы имеем

$$W(x_i^{(j)'}; x_1^{(j)}) = \prod_j W_j(x_i^{(j)'}; x_1^{(j)}), \quad \overline{W}(\bar{x}_i^{(j)'}; \bar{x}_1^{(j)}) = \prod_j \overline{W}_j(\bar{x}_i^{(j)'}; \bar{x}_1^{(j)}),$$

где каждый блок W_j и $\overline{W}_j$ представляет собой сумму всех диаграмм с различными вариантами минимального необходимого числа жестких глюонных обменов (см. рис. 2).

Процедура суммирования этих диаграмм вблизи порога на основе рекуррентных соотношений была предложена нами в работе [6]. Кроме глюонных обменов эти диаграммы включают также “внутренние” (между глюонными обменами) кварковые пропагаторы (подробности см. в работах [6], [8]). В результате на каждый глюонный обмен надо включить ($\alpha = \sqrt{2} \alpha_s / 3$):

$$\begin{array}{c} x'_1 \text{---}\bullet\text{---} x_1 \\ x'_2 \text{---}\bullet\text{---} x_2 \end{array} = 4\pi\alpha \frac{(x_1 + x'_1)(x_2 + x'_2)}{(x_1 - x'_1)^2}$$

и на каждый “внутренний” кварковый пропагатор

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} = \frac{1}{x_i}$$

Позже мы будем предполагать, что партонная волновая функция кластера $\Psi_P(x_i^{(j)'})$ имеет узкий пик в центральной точке при $x_i^{(j)'} = x'_0 = x_P/N$. При этом условии мы можем вынести W из-подинтеграла в этой центральной точке, вспоминая, что все $x_i^{(j)} \rightarrow 0$ для $i > 1$ и, как следствие, $x_1^{(j)} = (p_j + 1)x'_0 \equiv x^{(j)}$:

$$\langle W \rangle \equiv W(x_i^{(j)'} = x'_0; x_1^{(j)} = (p_j + 1)x'_0) = \prod_j \frac{(4\pi\alpha)^{p_j}}{(x'_0)^{p_j-1}} X_{p_j} = \frac{(4\pi\alpha)^p}{x'_0{}^{p-n}} \prod_j X_{p_j}, \quad (3)$$

где X_{p_j} – сумма всех диаграмм блока W_j в центральной точке. Величины X_{p_j} те же, что и в работе [6]. Это результат суммирования всех диаграмм изображенного на рис. 2 типа, когда $p_j + 1$ начальных кварков с одинаковыми продольными импульсами $x'_0 p_z$ в результате жестких глюонных обменов переходят в активный кварк с импульсом $(p_j + 1)x'_0 p_z$ и p_j кварков-доноров с нулевым продольным импульсом.

В общем случае

$$\begin{aligned} x_1^{(j)} &= \sum_{i=1}^{p_j+1} x_i^{(j)'}, & k_{1\perp}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{p_j+1} k_{i\perp}^{(j)'} - \sum_{i=2}^{p_j+1} k_{i\perp}^{(j)}, \\ \bar{x}_1^{(j)} &= \sum_{i=1}^{\bar{p}_j+1} \bar{x}_i^{(j)'}, & \bar{k}_{1\perp}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{\bar{p}_j+1} \bar{k}_{i\perp}^{(j)'} - \sum_{i=2}^{\bar{p}_j+1} \bar{k}_{i\perp}^{(j)}. \end{aligned}$$

Введем также при $i = 2, \dots, p_j + 1$ величины $\bar{k}_{i\perp}^{(j)} \equiv k_{i\perp}^{(j)} + q_{i-1\perp}^{(j)}$, где $q_{i-1\perp}^{(j)} \equiv \tilde{q}_{l\perp} \equiv h_{l\perp} - \bar{h}_{l\perp}$ и $l = i - 1 + \sum_{k < j} p_k$ ($l = 1, \dots, p$). Как ясно из рис. 3 и 4, при $i = 2, \dots, p_j + 1$ величины $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$ равны некоторой перестановке переменных $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$, для которых i пробегает значения $i = 2, \dots, \bar{p}_j + 1$.

Здесь мы подразумеваем, что наряду с диагональным вкладом, изображенным на рис. 3, необходимо учитывать все недиагональные вклады типа изображенных на рис. 4а. Более того, необходимо учитывать также все недиагональные вклады типа изображенных на рис. 4б с различными наборами p_j и $\bar{p}_j$, ограниченными только одним условием: $\sum_j p_j = \sum_j \bar{p}_j = p$.

формулы (13) и (14)). Этот факт не учитывается в механизме слияния кварков, предложенном в работе [15], где сначала вычисляется сечение образования двух кварков и только потом выполняется интегрирование по их относительному импульсу.

Рис. 5. Примеры диагонального (а) и недиагонального (б) «однородных» вкладов ($p_j = \bar{p}_j = p_0 \equiv p/n$ при всех $j = 1, \dots, n$) в механизме коалесценции.

Введем еще одно полезное определение. Мы будем называть однородными вклады со всеми одинаковыми p_j и $\bar{p}_j$ ($p_j = \bar{p}_j = p_0 \equiv p/n$ при всех $j = 1, \dots, n$). Все блоки W_j и $\bar{W}_j$ в этом случае одинаковы. Как ясно из рис. 5б, в однородном случае недиагональные вклады также возможны.

На рис. 3 блок a – амплитуда упругого рассеяния партонов a_{qq} . Если мы обозначим через $\tilde{a}_{qq}$ амплитуду рассеяния партонов с выделенным инвариантным потоком: $a_{qq} = J_{qq} \tilde{a}_{qq} = 2k_{i+}^{(j)} 2h_{l-} \tilde{a}_{qq}$, то в формуле (1)

$$\sigma_{qq}(q_{i\perp}^{(j)}) \equiv \frac{1}{J_{qq}} \text{Disc } a_{qq} = \text{Disc } \tilde{a}_{qq}. \quad (4)$$

В первом приближении эта величина зависит только от поперечной компоненты переданного импульса $q_{i\perp}^{(j)}$. Фурье-образ $\sigma_{qq}(b)$ величины $\sigma_{qq}(q_{i\perp}^{(j)})$ имеет смысл сечения рассеяния партонов при фиксированном значении прицельного параметра b , которое нормировано следующим образом:

$$\int d^2b \sigma_{qq}(b) = \sigma_{qq}(q_{i\perp}^{(j)} = 0) = \frac{1}{J_{qq}} \text{Disc } a_{qq}(0) = \sigma, \quad (5)$$

где σ – полное сечение рассеяния партонов друг на друге.

Перейдем к анализу комбинаторного коэффициента C перед данной диаграммой. Если мы обозначим через C_{fix} вспомогательный коэффициент для случая, когда величины $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$ равны какой-то определенной фиксированной перестановке $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$, то для данной диаграммы (типа изображенных на рис. 3–5) комбинаторный коэффициент C будет равен

$$C = C_{\text{fix}} \times N^{\text{perm}},$$

где N^{perm} есть число перестановок величин $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$, которое не меняет вида данной диаграммы (т.е. число вариантов соединения левых блоков W_j с правыми блоками $\bar{W}_j$ через амплитуды a_{qq} , не меняющее вида данной диаграммы).

При этом

$$C_{\text{fix}} = \frac{N! n!}{S \bar{S} (N - n - p)!} \prod_j \frac{1}{p_j! \bar{p}_j!} \cdot \frac{L!}{(L - p)!} = \frac{N! n!}{S \bar{S} (N - n - p)!} \prod_j \frac{1}{p_j! \bar{p}_j!} \cdot p! C_L^p,$$

где

$$S = \prod_{p_j=1}^{\max p_j} s(p_j)!, \quad \bar{S} = \prod_{\bar{p}_j=1}^{\max \bar{p}_j} s(\bar{p}_j)!.$$

Здесь $s(p_j)$ — число блоков W_j с данным значением p_j в конкретной диаграмме (см. рис. 3–5) или, что тоже самое, число повторений данного значения p_j в наборе $\{p_1, \dots, p_n\}$, и аналогично для $s(\bar{p}_j)$. Например, для “однородного” случая, изображенного на рис. 5, когда $p_j = p_0 = \bar{p}_j$ для всех $j = 1, \dots, n$, мы имеем $s(p_j) = n \delta_{p_j p_0}$, $S = \bar{S} = n!$.

Проиллюстрируем сказанное выше. В некоторых случаях (например, при $n = 2$, $p = 4$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 2$) возможна диаграмма только одного типа. В этом случае все перестановки $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$ дают одинаковый вклад и $N^{\text{perm}} = p!$. Та же самая ситуация с диаграммами, описывающими рождение одного кумулятивного кварка ($n = 1$, $p_1 = \bar{p}_1 = p$) и рассмотренными в работе [6]. Кроме того, в этом случае $S = \bar{S} = 1$, и мы находим

$$C_{\text{one } q} = \frac{N!}{p! (N - 1 - p)!} \times \frac{L!}{(L - p)!}.$$

Для важного с практической точки зрения диагонального вклада (см. рис. 3), когда кварковые линии от данного левого блока W_j идут только к одному правому блоку $\bar{W}_{\bar{j}}$ и наоборот (ясно, что это возможно лишь при $\bar{p}_j = p_j$), мы имеем $N^{\text{perm}} = (p_1! \dots p_n!) \times S$. Первый множитель возникает благодаря перестановкам $\bar{k}_{i\perp}^{(j)}$ внутри блоков $\bar{W}_{\bar{j}}$, а второй — из-за перестановок блоков $\bar{W}_{\bar{j}}$ с одинаковыми значениями p_j (если такие имеются) как единого целого. В результате комбинаторный множитель для диагонального вклада оказывается равным

$$C_{\text{diag}} = \frac{N! n!}{S (N - n - p)!} \prod_j \frac{1}{p_j!} \times \frac{L!}{(L - p)!}. \quad (6)$$

Ниже мы приведем доводы в пользу того, что хотя вклады всех диаграмм на рис. 3–5 вблизи порога имеют одинаковый порядок малости $\sim \Delta^{2p-1}$ относительно нашего параметра малости Δ (отклонения от порога), тем не менее диагональные вклады являются доминирующими, так как только они отвечают рождению объединяющихся кварков из n различных точек в плоскости прицельного параметра.

3. ПЕРЕХОД К ПРОСТРАНСТВУ ПРИЦЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Дальнейшее рассмотрение (1) удобнее проводить в пространстве прицельных параметров. Предварительно мы изменим нормировку:

$$\tilde{\Psi}_K(x_i, k_{i\perp}) = \frac{\Psi_K(x_i, k_{i\perp})}{(2\pi)^{(n-1)/2}},$$

и определим преобразование к пространству прицельных параметров следующим образом:

$$\Psi_K(x_i, r_i) = \int (2\pi)^2 \delta^{(2)}\left(\sum_{i=1}^n k_{i\perp} - K_{\perp}\right) \tilde{\Psi}_K(x_i, k_{i\perp}) \exp\left(i \sum_{i=1}^n r_i k_{i\perp}\right) \prod_{i=1}^n \frac{dk_{i\perp}}{(2\pi)^2},$$

где $\Psi_K(x_i, r_i)$ нормировано согласно

$$\int \Psi_K(x_i, r_i) \Psi_K^*(x_i, r_i) \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - x_K\right) \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{2x_i} dr_i = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(K_{\perp} - \bar{K}_{\perp}).$$

Проведем те же преобразования для Ψ_P и Ψ_H .

Чтобы выполнить интегрирование по поперечной координате общего центра масс, введем также $\psi_K(x_i, r_i)$:

$$\Psi_K(x_i, r_i) = \exp\left[i\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i\right) K\right] \psi_K(x_i, r_i),$$

где для произвольного r

$$\psi_K(x_i, r_i + r) = \psi_K(x_i, r_i).$$

ψ_K в отличие от Ψ_K не зависит от импульса K , и индекс K отмечает здесь лишь связь с определенной частицей (F). Позже по этой причине мы вместо индексов K и P будем использовать индексы F и A (см. рис. 1).

Для ψ_K (а также и для Ψ_K) выполняется следующее нормировочное условие:

$$\int |\psi_K(x_i, r_i)|^2 \delta^{(2)}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i - r\right) \prod_{i=1}^n dr_i \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - x_K\right) \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{2x_i} = 1, \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$\int |\psi_K(x_i, r_1, \dots, r_{n-1}, 0)|^2 \prod_{i=1}^{n-1} dr_i \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - x_K\right) \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{2x_i} = 1.$$

Вводя таким же образом ψ_P и ψ_H , после перехода в формуле (1) в пространство прицельных параметров и интегрирования по поперечной координате общего центра масс

находим для инклюзивного сечения рождения кумулятивного адрона посредством механизма объединения кварков следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^3 2x_K \frac{d^3\sigma}{dx_K dK_\perp} &= \frac{1}{J} \text{Disc } A(0) = \frac{2x_K C I_p}{(2\pi)^{2p-1}} \times \\
 &\times \int \left[\psi_P(x_i^{(j)'}, x_m'; r_i^{(j)'}, r_m') W(x_i^{(j)'}; x^{(j)}) \prod_j \frac{1}{x^{(j)}} \psi_K^*(x^{(j)}, r^{(j)}) \times \right. \\
 &\times \delta \left(\sum_{j,i} x_i^{(j)'} + \sum_m x_m' - x_P \right) \prod_{j,i} \frac{dx_i^{(j)'}}{2x_i^{(j)'}} \times \\
 &\times \prod_{j,i=1}^{p_j} \lambda(c_i^{(j)} - r^{(j)}) e^{i(\rho P_\perp - r K_\perp)} \prod_j dr^{(j)} \left. \right] \times \\
 &\times \left[\psi_P^*(\bar{x}_i^{(j)'}, x_m'; \bar{r}_i^{(j)'}, r_m') \bar{W}(\bar{x}_i^{(j)'}; \bar{x}^{(j)}) \prod_j \frac{1}{\bar{x}^{(j)}} \psi_K(\bar{x}^{(j)}, \bar{r}^{(j)}) \times \right. \\
 &\times \delta \left(\sum_{j,i} \bar{x}_i^{(j)'} + \sum_m x_m' - x_P \right) \prod_{j,i} \frac{d\bar{x}_i^{(j)'}}{2\bar{x}_i^{(j)'}} \times \\
 &\times \prod_{j,i=1}^{\bar{p}_j} \lambda(\bar{c}_i^{(j)} - \bar{r}^{(j)}) e^{-i(\bar{\rho} P_\perp - \bar{r} K_\perp)} \prod_j d\bar{r}^{(j)} \left. \right] \prod_m \frac{dx_m'}{2x_m'} dr_m' \times \\
 &\times \prod_{j,i=1}^{p_j} \sigma_{qq}(c_i^{(j)} - \beta_i^{(j)}) dc_i^{(j)} \eta_H(\beta_i^{(j)}) d\beta_i^{(j)}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

где

$$x^{(j)} = \sum_{i=1}^{p_j+1} x_i^{(j)'}, \quad \bar{x}^{(j)} = \sum_{i=1}^{\bar{p}_j+1} \bar{x}_i^{(j)'}, \quad r_i^{(j)'} = r^{(j)}, \quad \bar{r}_i^{(j)'} = \bar{r}^{(j)} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{n} \sum_j r^{(j)}, \quad \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_j \bar{r}^{(j)}, \\
 \rho &= \frac{1}{N} \sum_{j,i} r_i^{(j)'} = \frac{1}{N} \sum_j (p_j + 1) r^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_j p_j r^{(j)} + \frac{n}{N} r, \\
 \bar{\rho} &= \frac{1}{N} \sum_{j,i} \bar{r}_i^{(j)'} = \frac{1}{N} \sum_j (\bar{p}_j + 1) \bar{r}^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_j \bar{p}_j \bar{r}^{(j)} + \frac{n}{N} \bar{r}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\bar{c}_i^{(j)}$ есть некоторая перестановка $c_i^{(j)}$, $\lambda(b) = K_0(|b|m)/(2\pi)$, а $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда). Мы также ввели партонную матрицу плотности для адрона, летящего навстречу ядру,

$$\eta_H(\rho_1, \dots, \rho_p) = \int |\psi_H(y_i, \rho_i)|^2 \delta^{(2)} \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \rho_i \right) \prod_{i=p+1}^L d\rho_i \delta \left(\sum_{i=1}^L y_i - y_H \right) \prod_{i=1}^L \frac{dy_i}{2y_i}, \tag{11}$$

нормированную следующим образом:

$$\int \prod_{i=1}^p d\rho_i \eta_H(\rho_i) = 1.$$

Отметим, что она не обладает свойством трансляционной инвариантности (см. приложение А). Заметим также, что в “однородном” (см. рис. 5) случае, когда $p_j = p_0$ при всех $j = 1, \dots, n$, мы имеем $\rho = (n + p)r/N$.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Формула (8) представляет собой искомый результат в максимально общем в рамках данного подхода виде. Чтобы она стала пригодной для практических расчетов сечений рождения кумулятивных частиц (в частности протонов) посредством механизма объединения кварков, необходимо сделать дальнейшие упрощения.

Прежде всего вынесем W и $\bar{W}$ из-под интеграла в центральной точке $x_i^{(j)'} = x'_0 = x_P/N$, как это описано выше (см. формулу (3)). Это приведет к замене W и $\bar{W}$ под интегралами на известный множитель

$$\langle W \rangle \langle \bar{W} \rangle = 2^{2p} (2\pi)^{2p} (x'_0)^{2n-2p} \left(\frac{2\alpha_s^2}{9} \right)^p \prod_j X_{p_j} X_{\bar{p}_j},$$

где X_p вычислены нами ранее в работе [6] на основе рекуррентных соотношений.

Далее также в целях упрощения мы будем использовать факторизованную форму партонных волновых функций:

$$\psi(x_i, r_i) = \psi_{\parallel}(x_i) \psi_{\perp}(r_i),$$

где продольная часть нормирована следующим образом (ср. с формулой (7)):

$$\int |\psi_{\parallel}(x_i)|^2 \delta \left(\sum_{i=1}^n x_i - x \right) \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{2x_i} = 1.$$

После этого мы можем переписать формулу (8) для инклюзивного сечения в виде

$$(2\pi)^3 2x_K \frac{d^3\sigma}{dx_K dK_{\perp}} = \frac{CI_p(x_K)}{(2\pi)^{2p-1}} \langle W \rangle \langle \bar{W} \rangle J_{\parallel} J_{\perp}(K_{\perp}), \quad (12)$$

где $J_{\parallel}$ — оставшийся после вынесения W и $\bar{W}$ в центральной точке интеграл перекрытия продольных частей волновых функций ψ_P и ψ_K :

$$\begin{aligned} J_{\parallel} = & 2x_K \int \left[\psi_{\parallel P}(x_i^{(j)'}, x'_m) \prod_j \frac{1}{x^{(j)}} \psi_{\parallel K}^*(x^{(j)}) \delta \left(\sum_{j,i} x_i^{(j)'} + \sum_m x'_m - x_P \right) \prod_{j,i} \frac{dx_i^{(j)'}}{2x_i^{(j)'}} \right] \times \\ & \times \left[\psi_{\parallel P}^*(\bar{x}_i^{(j)'}, x'_m) \prod_j \frac{1}{\bar{x}^{(j)}} \psi_{\parallel K}(\bar{x}^{(j)}) \times \right. \\ & \times \left. \delta \left(\sum_{j,i} \bar{x}_i^{(j)'} + \sum_m x'_m - x_P \right) \prod_{j,i} \frac{d\bar{x}_i^{(j)'}}{2\bar{x}_i^{(j)'}} \prod_{j,i=1}^{\bar{p}_j} \prod_m \frac{dx'_m}{2x'_m} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

а $J_{\perp}(K_{\perp})$ – оставшийся интеграл, зависящий только от поперечных частей волновых функций ψ_P и ψ_K :

$$\begin{aligned}
 J_{\perp}(K_{\perp}) = & \int \left[\psi_{\perp P}(r_i^{(j)'}, r_m') \psi_{\perp K}^*(r_j) \prod_{j,i=1}^{p_j} \lambda(c_i^{(j)} - r_j) e^{i(\rho P_{\perp} - r K_{\perp})} \prod_j dr_j \right] \times \\
 & \times \left[\psi_{\perp P}^*(\bar{r}_i^{(j)'}, r_m') \psi_{\perp K}(\bar{r}_j) \prod_{j,i=1}^{\bar{p}_j} \lambda(\bar{c}_i^{(j)} - \bar{r}_j) e^{-i(\bar{\rho} P_{\perp} - \bar{r} K_{\perp})} \prod_j d\bar{r}_j \right] \prod_m dr_m' \times \\
 & \times \prod_{j,i=1}^{p_j} \sigma_{qq}(c_i^{(j)} - \beta_i^{(j)}) dc_i^{(j)} \eta_H(\beta_i^{(j)}) d\beta_i^{(j)}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы те же обозначения (9) и (10), что и в (8), лишь с небольшим упрощением: $r_j \equiv r^{(j)}$ и $\bar{r}_j \equiv \bar{r}^{(j)}$.

Простые оценки для величины продольной части $J_{\parallel}$ приведены в приложении Б. Сейчас мы хотели бы перейти к оценке более сложной и важной поперечной части $J_{\perp}(K_{\perp})$, определяющей характер зависимости выхода кумулятивных частиц от их поперечного импульса в механизме объединения кварков.

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОЙ ЧАСТИ $J_{\perp}$

5.1. Идея приближения. Основная идея, позволяющая радикальным образом упростить выражение (14) для поперечной части, основана на том, что модель конститuentных кварков по своей сути предполагает существование второго масштабного параметра наряду с размером адрона – размера конституентного кварка. Действительно, в нашем подходе есть еще один размерный параметр $m \simeq 300$ МэВ, который в формуле (14) входит в аргументы функций $\lambda(b) = K_0(m|b|)/(2\pi)$. Величина $1/m$ имеет порядок размера конституентного кварка: $2r_q \simeq 1/m$, тогда как другие размерные переменные, входящие в ответ (ниже это параметры r_P, r_K, r_H, r_0), имеют порядок размеров адрона ($\sim R_h$). Мы можем считать, что возникающий безразмерный параметр $\gamma_0^2 \equiv r_q^2/R_h^2 \simeq 1/10$ мал.

Поэтому в первом приближении мы будем искать асимптотическое выражение для ответа при $m \rightarrow \infty$. При больших z функция $K_0(z)$ имеет асимптоту

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

и, следовательно, эффективный размер для $\lambda(b)$ – это $|b| \sim r_q \sim 1/m \rightarrow 0$. В этом приближении главный вклад по параметру γ_0^2 вносят члены, где интегрирование по переменным r_j и $\bar{r}_j$ производится по максимальному числу различных точек в пространстве прицельных параметров.

Ясно, что именно эта ситуация реализуется в случае диагонального вклада (см. рис. 3), когда кварковые линии от данного левого блока W_j идут только к одному правому блоку $\bar{W}_{\bar{j}}$ и наоборот. При этом все блоки W_j и $\bar{W}_{\bar{j}}$ оказываются разбиты на n пар,

и нет кварковых линий, соединяющих разные пары. Мы имеем в виду кварковые линии, отвечающие функциям $\lambda(c_i^{(j)} - r_j)$ и $\lambda(\bar{c}_i^{(j)} - \bar{r}_j)$ в формуле (14), где $\bar{c}_i^{(j)}$ есть некая перестановка $c_i^{(j)}$, а $c_i^{(j)}$ — положение кварка-донора в пространстве прицельных параметров при его взаимодействии с одним из кварков налетающего адрона ($\beta_i^{(j)}$ — его положение в пространстве прицельных параметров). Поэтому, хотя вклады всех диаграмм на рис. 3–5 вблизи порога имеют одинаковый порядок малости $\sim \Delta^{2p-1}$ относительно нашего параметра малости Δ (отклонения от порога), тем не менее диагональные вклады являются доминирующими по параметру γ_0^2 , так как только они отвечают рождению объединяющихся кварков из n различных точек в плоскости прицельного параметра.

Действительно, в недиагональном случае всегда имеется хотя бы один левый блок W_{j_0} , связанный кварковыми линиями (через амплитуды qq -взаимодействия) сразу с двумя или более правыми блоками $\bar{W}_{j_1}, \bar{W}_{j_2}, \dots$ (или наоборот). При этом эти правые блоки оказываются связанными между собой (через блок W_{j_0}), и, поскольку у нас имеется только n правых блоков, такой вклад будет отвечать уже случаю вылета кумулятивных (активных) кварков из меньшего, чем n , числа различных точек в пространстве прицельных параметров. Как следствие он будет иметь дополнительную малость по параметру γ_0^2 . Подробный, на конкретных примерах анализ этого вопроса можно найти в работах [10], [12].

5.2. Оценка диагонального вклада. Вследствие этого мы переходим к вычислению доминирующего диагонального вклада $J_{\perp}^{\text{diag}}$. В этом случае положим $\bar{r}_j = r_j + \pi_j$ и будем пренебрегать π_j по сравнению с другими переменными везде, где это оправданно. Мы имеем

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_j \bar{r}_j = r + \frac{1}{n} \sum_j \pi_j, \quad \bar{r} - r = \frac{1}{n} \sum_j \pi_j \equiv \pi$$

и

$$\bar{\rho} - \rho = \frac{1}{N} \sum_j p_j \pi_j + \frac{1}{N} \sum_j \pi_j,$$

так как в диагональном случае $\bar{p}_j = p_j$.

В пределе $m \rightarrow \infty$ в формуле (14) наступает факторизация, и для диагонального вклада мы находим (анализ некоторых других случаев можно найти в работе [12]; мы также везде ниже полагаем $P_{\perp} = 0$)

$$J_{\perp}^{\text{diag}}(K_{\perp}) = O_{\perp}^{\text{diag}} I^{\text{diag}}(K_{\perp}), \quad (15)$$

где для множителя, отвечающего малым расстояниям (порядка размера конститuentного кварка),

$$I^{\text{diag}}(K_{\perp}) = \int \prod_{j,i=1}^{p_j} dc_i^{(j)} \lambda(c_i^{(j)}) \lambda(c_i^{(j)} - \pi_j) e^{iK_{\perp} \sum_j \pi_j / n} \prod_j d\pi_j. \quad (16)$$

Этот множитель зависит только от одного размерного параметра m , входящего в функцию $\lambda(c)$, и определяет характер зависимости выхода кумулятивных частиц от их поперечного импульса $K_{\perp}$ в механизме объединения кварков.

Для сомножителя, отвечающего большим расстояниям (много бóльшим размера конститuentного кварка), мы находим

$$O_{\perp}^{\text{diag}} = \int \rho_P(r_i^{(j)'}) |\psi_{\perp K}(r_j)|^2 \prod_{j,i=1}^{p_j} \sigma_{qq}(r_j - \beta_i^{(j)}) \eta_H(\beta_i^{(j)}) d\beta_i^{(j)} \prod_j dr_j, \quad (17)$$

$$\rho_P(r_i^{(j)'}) \equiv \int |\psi_{\perp P}(r_i^{(j)'}, r'_m)|^2 \prod_m dr'_m, \quad r_i^{(j)'} = r_j.$$

Отметим, что в отличие от $\eta_H(b_i)$ матрица плотности $\rho_P(r_i)$ является трансляционно-инвариантной (см. приложение А). Она нормирована согласно

$$\int \rho_P(0, r_2, \dots, r_{n+p}) \prod_{i=2}^{n+p} dr_i = 1.$$

Комбинаторный множитель для диагонального вклада C_{diag} уже был нами вычислен выше (см. (6)).

5.3. Зависимость от поперечного импульса $K_{\perp}$. Оценка $I(K_{\perp})$. Проанализируем теперь зависимость инклюзивного сечения от поперечного импульса образующейся кумулятивной частицы ($K_{\perp}$), возникающую в механизме объединения кварков, и сравним ее с результатами, полученными нами ранее в работе [9], где рождение кумулятивного мезона описывалось как результат фрагментации одного быстрого кварка.

Как видно из (15) и (16), для диагонального вклада, доминирующего в пределе $m \rightarrow \infty$, вся эта зависимость определяется только множителем $I^{\text{diag}}(K_{\perp})$, который можно записать следующим образом:

$$I^{\text{diag}}(K_{\perp}) = \int \prod_j d\pi_j \Lambda^{p_j}(\pi_j) e^{iK_{\perp} \sum_j \pi_j / n} = \prod_j \int d\pi_j \Lambda^{p_j}(\pi_j) e^{iK_{\perp} \pi_j / n},$$

где

$$\Lambda(b) \equiv \int d^2c \lambda(c) \lambda(c-b) = \int d^2c \frac{K_0(m|c|)}{2\pi} \frac{K_0(m|c-b|)}{2\pi} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ikb}}{(k^2 + m^2)^2}. \quad (18)$$

В случае рождения одного кумулятивного кварка, рассмотренном в работе [9], в настоящих обозначениях мы имели

$$I^{\text{one } q}(K_{\perp}, p) = \int d\pi' \Lambda^p(\pi') e^{iK_{\perp} \pi'}$$

и, следовательно,

$$I^{\text{diag}}(K_{\perp}) = \prod_j I^{\text{one } q}\left(\frac{K_{\perp}}{n}, p_j\right). \quad (19)$$

Используя (18), можно получить для $I^{\text{diag}}(K_{\perp})$ следующее представление в явном виде:

$$I^{\text{diag}}(K_{\perp}) = \int \prod_{j,i}^{p_j} \frac{dk_i^{(j)}}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k_i^{(j)2} + m^2)^2} \prod_j (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^{p_j} k_i^{(j)} + \frac{K_{\perp}}{n} \right),$$

$$I^{\text{one } q}(K_{\perp}, p) = \int \prod_{i=1}^p \frac{dk_i}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k_i^2 + m^2)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^p k_i + \frac{K_{\perp}}{n} \right).$$

Однако для дальнейшего анализа более полезно ввести новую безразмерную функцию одного аргумента

$$\bar{\Lambda}(z) \equiv z K_1(z).$$

Здесь $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя (функции Макдональда). Легко доказать, что

$$\Lambda(b) = \frac{1}{4\pi m^2} \bar{\Lambda}(m|b|).$$

Функция $\bar{\Lambda}(z)$ обладает следующими свойствами. При $z \rightarrow 0$ она разлагается в ряд

$$\bar{\Lambda}(z) = 1 + \frac{z^2}{2} \left[\gamma - \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{z}{2} \right) \right] + O(z^4 \ln z), \quad \gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right) = 0.5772 \dots;$$

при $z \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\bar{\Lambda}(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} e^{-z},$$

и ее производные равны

$$\bar{\Lambda}'(z) = -z K_0(z), \quad \bar{\Lambda}''(z) = z K_1(z) - K_0(z) = \bar{\Lambda} - K_0(z).$$

Для этой функции справедливо следующее интегральное представление, основанное на двумерном преобразовании Фурье (t и b – двумерные векторы):

$$\bar{\Lambda}(|b|) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 t}{(t^2 + 1)^2} e^{itb}.$$

Введем также безразмерные функции (двумерные фурье-образы степеней $\bar{\Lambda}$)

$$f_p(t) \equiv \int d^2 b e^{itb} \bar{\Lambda}^p(|b|), \quad (20)$$

через которые результат выражается наиболее просто. Ясно, что $f_p(t)$ зависит только от $|t|$ и

$$f_1(t) = \frac{4\pi}{(t^2 + 1)^2},$$

$$f_p(t) = \frac{1}{\pi^p} \int \prod_{i=1}^p \frac{d^2 t_i}{(t_i^2 + 1)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^p t_i + t \right).$$

Функции $f_p(t)$ нормированы на единицу:

$$\int f_p(t) \frac{d^2 t}{(2\pi)^2} = \bar{\Lambda}^p(0) = 1.$$

Интегрируя по углу в формуле (20), находим

$$f_p(t) = 2\pi \int_0^\infty dz z J_0(|t|z) [z K_1(z)]^p. \quad (21)$$

Здесь $J_0(z)$ – функция Бесселя: $J_0(0) = 1$ и при $z \rightarrow \infty$ ($|\arg z| < \pi$)

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right).$$

Представление (21) было использовано в работе [9] при нахождения зависимости величины среднего поперечного импульса $\langle K_\perp \rangle$ образующихся пионов от степени их кумулятивности в механизме, основанном на фрагментации одного быстрого кварка:

$$I^{\text{one } q}(K_\perp, p) = \frac{1}{(4\pi)^p} \frac{1}{m^{2(p+1)}} f_p\left(\frac{K_\perp}{m}\right).$$

Для механизма, основанного на объединении кварков, имеем похожий результат:

$$I^{\text{diag}}(K_\perp) = \frac{1}{(4\pi)^p} \frac{1}{m^{2(p+n)}} \prod_j f_{p_j}\left(\frac{K_\perp}{nm}\right). \quad (22)$$

5.4. Вычисление фактора $O_\perp$. Перейдем теперь к оценке $O_\perp^{\text{diag}}$ в формуле (15). В отличие от механизма, основанного на фрагментации одного быстрого кварка, для механизма, основанного на объединении кварков, это необходимо для нахождения характера зависимости выхода кумулятивных частиц от их поперечного импульса $K_\perp$. Хотя на первый взгляд вся зависимость от поперечного импульса $K_\perp$ в формуле (15) сосредоточена в вычисленном выше множителе $I^{\text{diag}}(K_\perp)$, однако в механизме объединения кварков одно и то же общее число кварков-доноров p может отвечать различным наборам $\{p_j\}$ ($\sum_j p_j = p$). Поэтому в таком случае для определения характера зависимости выхода кумулятивных частиц от их поперечного импульса $K_\perp$ кроме функций (22) необходимо знать также веса, с которыми вклады, отвечающие разным наборам, входят в ответ.

Мы будем использовать трансляционно-инвариантное гауссово приближение для волновых функций $\psi_{\perp K}$ и $\psi_{\perp P}$ (см. приложение А):

$$\psi_{\perp K}(r_1, \dots, r_n) = C_{\perp K} \exp\left[-\frac{1}{2nr_K^2} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2\right], \quad C_{\perp K}^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\pi r_K^2}\right)^{n-1},$$

и аналогично для $\psi_{\perp P}$

$$\psi_{\perp P}(r_1, \dots, r_N) = C_{\perp P} \exp \left[-\frac{1}{2Nr_P^2} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 \right], \quad C_{\perp P}^2 = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\pi r_P^2} \right)^{N-1}.$$

Тогда для величин, входящих в $O_{\perp}^{\text{diag}}$ (17), используя результаты приложения А, имеем

$$\begin{aligned} \rho_F(r_j) &\equiv |\psi_{\perp K}(r_1, \dots, r_n)|^2 = C_F \exp \left[-\frac{1}{r_K^2} \sum_{i=1}^n r_i^2 + \frac{n}{r_K^2} R_F^2 \right], \\ R_F &\equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_j, \quad C_F = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\pi r_K^2} \right)^{n-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \rho_A(r_j) &\equiv \rho_P(r_i^{(j)'} = r_j) = C_A \exp \left[-\frac{1}{r_P^2} \sum_{j=1}^n (p_j + 1) r_j^2 + \frac{n+p}{r_P^2} R_A^2 \right], \\ R_A &\equiv \frac{1}{n+p} \sum_{j=1}^n (p_j + 1) r_j, \quad C_A = \frac{1}{n+p} \left(\frac{1}{\pi r_P^2} \right)^{n+p-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для матрицы плотности налетающего адрона η_H (11) и сечения qq -взаимодействия σ_{qq} (5) мы используем те же приближения, что и в работе [7], где с целью фиксации параметров модели в рамках настоящего подхода была вычислена амплитуда упругого адрон-адронного сечения (детали см. в работе [10]).

Для η_H мы использовали квазиэйкональное приближение

$$\sum_{L \geq p} \frac{L!}{(L-p)!} \eta_H(b_1, \dots, b_p) = \xi^{(p-1)/2} \nu_H^p \prod_{i=1}^p \eta_H(b_i), \quad (25)$$

где ξ – квазиэйкональный дифракционный параметр, ν_H – среднее число партонов в налетающем адроне, а однопартонные распределения η_H нормированы на единицу:

$$\int d^2b \eta_H(b) = 1. \quad (26)$$

Отметим, что в приближении (25) мы уже учли часть комбинаторного множителя (6), относящуюся к налетающему адрону.

Для $\sigma_{qq}(b)$ согласно (4) мы имеем

$$\sigma_{qq}(b) \equiv \text{Disc } \tilde{a}_{qq}(b) \equiv \frac{1}{J_{qq}} \text{Disc } a_{qq}(b).$$

Обычно предполагают, что и η_H , и a_{qq} гауссовым образом зависят от прицельного параметра b :

$$\eta_H(b) = \frac{1}{\pi r_H^2} e^{-b^2/r_H^2}, \quad \tilde{a}_{qq}(b) = \frac{i\sigma}{2\pi r_0^2} e^{-b^2/r_0^2}. \quad (27)$$

Видно, что нормировочные условия (5) и (26) выполнены. Мы, как обычно, считаем амплитуду a_{qq} чисто мнимой.

Полезно ввести свертку η_{0H} величин η_H и σ_{qq} , которая, собственно, только и входит в ответ (17) для $O_{\perp}^{\text{diag}}$:

$$\eta_{0H}(r_j) \equiv \kappa^{-1} \int \left[\sum_{L \geq p} \frac{L!}{(L-p)!} \eta_H(\beta_i^{(j)}) \right] \prod_{j,i=1}^{p_j} \sigma_{qq}(r_j - \beta_i^{(j)}) d\beta_i^{(j)},$$

где $\kappa = \xi^{(p-1)/2} (\nu_H \sigma)^p$, а также ее трансляционно-инвариантный аналог

$$\rho_{0H}(r_j) \equiv \int \eta_{0H}(r_j + B) dB.$$

Множитель κ введен в определения η_{0H} и ρ_{0H} для стандартизации нормировки (см. приложение А). В гауссовом (27) и квазиэikonальном (25) приближении для них находим формулы, аналогичные (23) и (24):

$$\begin{aligned} \eta_{0H}(r_j) &= \left(\frac{1}{\pi r_{0H}^2} \right)^p \exp \left[-\frac{1}{r_{0H}^2} \sum_{j=1}^n p_j r_j^2 \right], \\ \rho_{0H}(r_j) &= C_{0H} \exp \left[-\frac{1}{r_{0H}^2} \sum_{j=1}^n p_j r_j^2 + \frac{p}{r_{0H}^2} R_H^2 \right], \\ R_H &\equiv \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n p_j r_j, \quad C_{0H} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\pi r_{0H}^2} \right)^{p-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $r_{0H}^2 = r_0^2 + r_H^2$.

Теперь мы можем представить результат для $O_{\perp}^{\text{diag}}$ в простой форме, в которую симметричным образом входят только трансляционно-инвариантные $\rho_A(r_j)$, $\rho_F(r_j)$ и $\rho_{0H}(r_j)$:

$$O_{\perp}^{\text{diag}} = \kappa \int \rho_A(r_j) \rho_F(r_j) \rho_{0H}(r_j) \delta^{(2)}(\dots) \prod_j dr_j, \quad (29)$$

где в качестве $\delta^{(2)}(\dots)$ можно использовать любую из следующего набора δ -функций:

$$\delta^{(2)}(R_A), \quad \delta^{(2)}(R_F), \quad \delta^{(2)}(R_H), \quad \delta^{(2)}(r_1), \quad \delta^{(2)}(r_2), \quad \dots$$

С использованием гауссова приближения для $\rho_F(r_j)$, $\rho_A(r_j)$ и $\rho_{0H}(r_j)$ (см. формулы (23), (24) и (28)) удастся провести аналитические вычисления до конца и получить выражение для $O_{\perp}^{\text{diag}}$ в явном виде:

$$O_{\perp}^{\text{diag}} = \kappa C_A C_F C_{0H} \frac{(p+n)^2}{\pi D} \prod_j (\pi d_j), \quad (30)$$

где

$$\frac{1}{d_j} = \frac{p_j + 1}{r_P^2} + \frac{1}{r_K^2} + \frac{p_j}{r_{0H}^2}$$

и

$$D = e_0 + 2e_1 + e_2 - (e_0 e_2 - e_1^2) \left(\frac{1}{nr_K^2} + \frac{1}{pr_{0H}^2} \right),$$

$$e_0 \equiv \sum_j d_j, \quad e_1 \equiv \sum_j p_j d_j, \quad e_2 \equiv \sum_j p_j^2 d_j.$$

Можно доказать (см. работу [12]), что всегда $D > 0$.

В однородном случае $p_j = p_0$, $d_j = d$, и формулы сильно упрощаются:

$$\frac{1}{d} = \frac{p_0 + 1}{r_P^2} + \frac{1}{r_K^2} + \frac{p_0}{r_{0H}^2}, \quad D = \frac{(p + n)^2}{n} d,$$

и мы имеем

$$O_{\perp \text{ homo}}^{\text{diag}} = \kappa C_A C_F C_{0H} n (\pi d)^{n-1}.$$

Итак, теперь мы вычислили все множители, входящие в выражения (12), (15) для инклюзивного сечения рождения кумулятивного адрона посредством механизма объединения кварков.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные общие формулы могут быть использованы для нахождения инклюзивных сечений рождения кумулятивных адронов, образование которых происходит как в рамках механизма, основанного на фрагментации одного быстрого кварка, так и в рамках механизма, основанного на объединении кварков. Формулы для некоторых практически интересных частных случаев (рождение на двунуклонном кластере ядра кумулятивных протонов за счет механизма объединения кварка и кумулятивных пионов за счет механизма фрагментации одного быстрого кварка) можно найти в работе [10].

Полученные общие формулы могут быть также использованы для нахождения характера зависимости сечений выхода от величины поперечного импульса $K_{\perp}$ для тех кумулятивных частиц, образование которых происходит за счет механизма объединения кварков, например, для кумулятивных протонов, подобно тому, как это было сделано в работе [9] для кумулятивных пионов, образующихся в результате фрагментации одного быстрого кварка.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приближения для матриц плотности η и ρ

Мы определяем матрицы плотности η и ρ следующим образом:

$$\eta(b_1, \dots, b_p) = \int |\psi_{\perp}(b_i)|^2 \delta^{(2)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) db_{p+1} \dots db_n,$$

$$\rho(b_1, \dots, b_p) = \int |\psi_{\perp}(b_i)|^2 db_{p+1} \dots db_n.$$

Очевидна связь

$$\rho(b_1, \dots, b_p) = \int \eta(b_1 + B, \dots, b_p + B) dB.$$

Если использовать трансляционно-инвариантное гауссово приближение для $\psi_\perp$

$$\begin{aligned} \psi_\perp(b_1, \dots, b_n) &= C_\perp \exp \left[-\frac{1}{2nb_0^2} \sum_{i < j} (b_i - b_j)^2 \right] = \\ &= C_\perp \exp \left[-\frac{1}{2b_0^2} \sum_{i=1}^n b_i^2 + \frac{1}{2nb_0^2} \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \right], \end{aligned}$$

где

$$C_\perp^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\pi b_0^2} \right)^{n-1},$$

то для η -матрицы при $p < n$ находим

$$\eta(b_1, \dots, b_p) = \frac{n}{n-p} \left(\frac{1}{\pi b_0^2} \right)^p \exp \left[-\frac{1}{b_0^2} \sum_{i=1}^p b_i^2 - \frac{1}{(n-p)b_0^2} \left(\sum_{i=1}^p b_i \right)^2 \right]$$

(отметим противоположный знак перед вторым членом в экспоненте по сравнению со знаком в исходном выражении для $\psi_\perp$). При $p = n$ для η -матрицы имеем

$$\begin{aligned} \eta(b_1, \dots, b_p) &= |\psi_\perp(b_1, \dots, b_n)|^2 \delta^{(2)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\pi b_0^2} \right)^{n-1} \exp \left[-\frac{1}{b_0^2} \sum_{i=1}^n b_i^2 \right] \delta^{(2)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right). \end{aligned}$$

Видно, что η -матрица зависит от n и p , и что она факторизуется лишь при условии $n \gg p$. В этом случае

$$\eta(b_1, \dots, b_p) = \prod_{i=1}^p \eta(b_i), \quad \eta(b) = \frac{1}{\pi b_0^2} e^{-b^2/b_0^2}. \quad (31)$$

Используя данное трансляционно-инвариантное гауссово приближение для $\psi_\perp$, мы находим для ρ -матрицы

$$\begin{aligned} \rho(b_1, \dots, b_p) &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\pi b_0^2} \right)^{p-1} \exp \left[-\frac{1}{b_0^2} \sum_{i=1}^p b_i^2 + \frac{1}{pb_0^2} \left(\sum_{i=1}^p b_i \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\pi b_0^2} \right)^{p-1} \exp \left[-\frac{1}{pb_0^2} \sum_{i < j} (b_i - b_j)^2 \right]. \end{aligned}$$

Видно, что ρ -матрица не зависит от n и является трансляционно-инвариантной, как и сама $\psi_\perp$. Для нее нельзя использовать приближение типа (31), которое нарушает трансляционную инвариантность.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Оценка продольной части интеграла перекрытия $J_{\parallel}$

Проведем оценку продольной части интеграла перекрытия $J_{\parallel}$ для случая реального порога, когда все кварки-спектаторы являются донорами ($M = 0$, $N = n + p$) и кумулятивный адрон (F) уносит практически весь продольный импульс ядерного кластера ($x_K \rightarrow x_P$, см. замечание после формулы (2)). В этом случае интеграл перекрытия (13) факторизуется: $J_{\parallel} = |O_{\parallel}|^2$, где

$$O_{\parallel} = \sqrt{2x_K} \int \psi_{\parallel P}(x_i^{(j)'}) \prod_j \frac{1}{x^{(j)}} \psi_{\parallel K}^*(x^{(j)}) \delta\left(\sum_{j,i} x_i^{(j)'} - x_P\right) \prod_{j,i} \frac{dx_i^{(j)'}}{2x_i^{(j)'}}$$

и

$$x^{(j)} = \sum_{i=1}^{p_j+1} x_i^{(j)'}$$

Для продольной части волновой функции мы будем использовать приближение

$$\psi_{\parallel}(x_i) = C_{\parallel} (x_1 \dots x_n)^{\omega} = C_{\parallel} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\omega}.$$

Оно имеет пик в центральной точке $x_1 = \dots = x_n = x/n$, причем его ширина тем меньше, чем больше безразмерный параметр ω . Все вычисления в рамках этого приближения удается аналитически провести до конца и получить ответ в явном виде. Так, для константы нормировки

$$C_{\parallel}^2 = \frac{(2n\omega - 1)! 2^n}{[(2\omega - 1)!]^n x^{2n\omega - 1}}.$$

Для $O_{\parallel}$ находим ($x \equiv x_P = x_K$):

$$\begin{aligned} O_{\parallel} &= \sqrt{2x} \frac{1}{2^N} C_{\parallel P} C_{\parallel K} \frac{[(\omega_P - 1)!]^N x^{n(\omega_K - 1) + N\omega_P - 1}}{[n(\omega_K - 1) + N\omega_P - 1]!} \times \\ &\times \prod_{j=1}^n \frac{[(\omega_K - 1) + (p_j + 1)\omega_P - 1]!}{[(p_j + 1)\omega_P - 1]!}, \end{aligned}$$

и нормировочные константы для $\psi_{\parallel P}$ и $\psi_{\parallel K}$ соответственно равны

$$\begin{aligned} C_{\parallel P}^2 &= \frac{(2N\omega_P - 1)! 2^N}{[(2\omega_P - 1)!]^N x^{2N\omega_P - 1}}, \\ C_{\parallel K}^2 &= \frac{(2n\omega_K - 1)! 2^n}{[(2\omega_K - 1)!]^n x^{2n\omega_K - 1}}. \end{aligned}$$

Детали вычислений и изучение предельных случаев можно найти в работе [10].

Благодарности. Авторы выражают благодарность региональному бюро ЮНЕСКО по научному сотрудничеству в Европе за поддержку Международной школы физики им. В. А. Фока и РФФИ за поддержку в рамках гранта № 01-02-17137-а.

Список литературы

- [1] *А. М. Балдин.* Краткие сообщения по физике. 1971. Т. 18. С. 465; *А. М. Балдин, Н. Гиордэнеску, В. Н. Зубарев и др.* Наблюдение пионов высокой энергии при столкновении релятивистских дейтронов с ядрами. Препринт ОИЯИ Р1-5819. Дубна: ОИЯИ, 1971; *А. М. Балдин, С. Б. Герасимов, Н. Гиордэнеску и др.* ЯФ. 1973. Т. 18. С. 79.
- [2] *А. В. Ефремов.* ЯФ. 1976. Т. 24. С. 1208; ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 613.
- [3] *S. J. Brodsky, B. T. Chertok.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 3003; Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 269; *I. A. Schmidt, R. Blankenbecler.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 3321.
- [4] *L. L. Frankfurt, M. I. Strikman.* Phys. Rep. 1981. V. 76. P. 215.
- [5] *В. В. Буров, В. К. Лукьянов, А. И. Титов.* ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1249; *Л. А. Кондратюк, М. Ж. Шматиков.* ЯФ. 1985. Т. 41. С. 498; *А. В. Ефремов, А. Б. Кайдалов, В. Т. Кум, Г. И. Лыкасов, Н. В. Славин.* ЯФ. 1988. Т. 47. С. 1364; 1994. Т. 57. С. 932.
- [6] *M. Braun, V. Vechernin.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 427. P. 614.
- [7] *М. Браун, В. Вечернин.* ЯФ. 1997. Т. 60. С. 506.
- [8] *M. A. Braun, V. V. Vechernin.* Cumulative phenomena through the quark-parton diagram summation at thresholds. In: Quantum Theory; in honour of Vladimir A. Fock (ed. Yu. V. Novozhilov), Proceedings of the VIII UNESCO International School of Physics. V. 1, UNESCO – St. Petersburg University – Euro-Asian Physical Society. St. Petersburg, 1998. P. 159.
- [9] *М. Браун, В. Вечернин.* ЯФ. 2000. Т. 63. С. 1920.
- [10] *M. A. Braun, V. V. Vechernin.* Coalescence of quarks and the cumulative baryon production. Preprint SPbU-IP-1998/22. S.-Petersburg; V. A. Fock Inst. for Phys. of S.-PbU, 1998.
- [11] *M. A. Braun, V. V. Vechernin.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 92. P. 156.
- [12] *M. A. Braun, V. V. Vechernin.* On quarks coherent coalescence near threshold. Preprint SPbU-IP-2003/5. S.-Petersburg; V. A. Fock Inst. for Phys. of S.-PbU, 2003.
- [13] *M. Lavelle, D. MacMullan.* Phys. Rep. 1997. V. 279. P. 1.
- [14] *S. J. Brodsky, J. F. Gunion, D. E. Soper.* Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 2710.
- [15] *R. Vogt, S. J. Brodsky, P. Hoyer.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 383. P. 643; *R. Vogt, S. J. Brodsky.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 438. P. 261.
- [16] *Д. И. Блохинцев.* ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1295; *М. А. Браун, В. В. Вечернин.* ЯФ. 1980. Т. 31. С. 602.
- [17] *S. J. Brodsky, P. Hoyer.* Nucl. Phys. A. 1991. V. 532. P. 79; *S. J. Brodsky, P. Hoyer, A. Mueller, W.-K. Tang.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 369. P. 519.
- [18] *М. А. Браун, В. В. Вечернин.* ЯФ. 1982. Т. 36. С. 614; 1986. Т. 44. С. 784; 1988. Т. 47. С. 1452; 1990. Т. 51. С. 873; J. Phys. G. 1990. V. 16. P. 1615.
- [19] *V. A. Matveev, R. M. Muradyan, A. N. Tavkhelidze.* Nuovo Cimento. Lett. 1973. V. 7. P. 719; *S. J. Brodsky, G. R. Farrar.* Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1153; *R. Blankenbecler, S. J. Brodsky.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 2973.