Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг, Об эквивалентности уравнений Даффина–Кеммера–Петью и Клейна–Гордона–Фока, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 445–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:45:16

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДАФФИНА–КЕММЕРА–ПЕТЬО И КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА

Дано строгое доказательство эквивалентности теорий Даффина–Кеммера–Петью и Клейна–Гордона–Фока для матричных элементов физической S -матрицы в случае минимального взаимодействия скалярных заряженных частиц с внешним или квантованным электромагнитным полем. Вначале развит канонический гамильтонов подход к теории Даффина–Кеммера–Петью как в компонентной, так и в матричной форме. Затем проводится квантование теории путем построения производящего функционала функций Грина и доказывается релятивистская инвариантность физических матричных элементов S -матрицы. Наконец, доказывается эквивалентность обеих теорий как для матричных элементов рассеяния скалярных частиц, с помощью редуционных формул Лемана–Симанзика–Циммермана, так и для многофотонных функций Грина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Более 60 лет назад Петью [1], Даффин [2] и Кеммер [3] предложили уравнение первого порядка (уравнение Даффина–Кеммера–Петью (ДКП)) для описания частиц спинов 0 и 1. Прошедшее с тех пор время можно условно разделить на три периода: первый период – с 1939 г. по 1970 г., второй – с 1970 г. по 1980 г., третий – с 1980 г. по настоящее время. В течение первого периода большинство работ в этой области было посвящено развитию формализма ДКП и исследованию взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем в рамках этого формализма. Для многих процессов и явлений, таких как квантовая электродинамика мезонов спина 0, мезоатом и др., вычисления, основанные на уравнениях ДКП и Клейна–Гордона–Фока (КГФ), приводили к одинаковым результатам, включая однопетлевые поправки [4–6]¹⁾. Очень важный вклад в понимание этого вопроса был сделан Вайтманом в его работе [9], посвященной 70-летию

¹⁾Обширный список ссылок с историческими комментариями можно найти в работе [7]. К сожалению, в этой работе отсутствуют ссылки на работы Гельфанда и Яглома, которые получили уравнения первого порядка для частиц произвольного фиксированного спина. Ссылки на эти и другие работы можно найти в работе [8].

*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brazil

†Физический институт им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия

Дирака, которое отмечалось в 1971 г. Вайтман показал, что в теории ДКП минимального взаимодействия с электромагнитным полем (вида $e\bar{\psi}\beta_\mu\psi A^\mu$) уравнение ДКП для частицы спина 0 устойчиво относительно гладких локальных возмущений внешнего поля; другими словами, подобно уравнению Дирака без аномального магнитного момента, запаздывающий характер решений уравнения ДКП сохраняется при таких возмущениях. Возможная неустойчивость подобного рода обсуждалась Вело и Цванцигером [10], они показали, что эта неустойчивость нарушает причинный характер уравнения Рариты–Швингера для частиц спина 3/2 (во внешнем поле). Центральный пункт доказательства Вайтмана составляет утверждение, что запаздывающий характер уравнения связан с перенормируемостью теории в случае взаимодействия с квантованным электромагнитным полем.

Второй период можно назвать периодом сомнений и разочарований. К этому времени были сделаны два великих открытия: установление факта несохранения четности и создание единой теории электрослабого взаимодействия (теория Салама–Вайнберга, или Стандартная модель). При попытках описать новые процессы опять возник вопрос об эквивалентности теорий ДКП и КГФ. Во многих работах (ссылки см. в [7]) формализм ДКП применялся к распаду K -мезонов и других нестабильных мезонов и к сильным взаимодействиям. Заключение, представленное в работе [7], не было оптимистическим: в некоторых случаях формализм ДКП приводил к результатам, *отличающимся* от результатов формализма второго порядка²⁾.

Третий период проходит под знаком сомнений: эквивалентны теории ДКП и КГФ или нет? На эту тему было опубликовано сравнительно мало работ. По нашему мнению, одной из главных причин падения интереса к формализму ДКП в последний период является заключение о неэквивалентности теорий ДКП и КГФ³⁾. Мы считаем, что эквивалентность этих теорий для описания нестабильных частиц можно доказать так же, как и их эквивалентность применительно ко всем процессам, которые описываются перенормируемыми теориями. Однако этот вопрос выходит за рамки настоящей статьи. Насколько нам известно, не существует также строгого доказательства эквивалентности теорий ДКП и КГФ для квантовой электродинамики частиц спина 0. Совпадающие результаты были получены для многих процессов в первом порядке теории возмущений, в однопетлевом приближении и в инфракрасной области [5–7].

Главной целью настоящей работы является строгое доказательство эквивалентности теорий ДКП и КГФ для физических матричных элементов S -матрицы (в любом порядке теории возмущений) в случае минимального взаимодействия скалярных заряженных частиц с внешним или квантованным электромагнитным полем. В разделе 2 развит канонический гамильтонов подход в компонентной и матричной формах. Построен производящий функционал функций Грина квантовой теории ДКП и доказывается релятивистская инвариантность физических матричных элементов S -матрицы. В разделе 3, используя связь функций Грина и матричных элементов S -матрицы, мы доказываем эквивалентность теорий ДКП и КГФ для матричных элементов физической S -матрицы,

²⁾ Более того, в работе [11] утверждалось, что теория ДКП дает для распада K -мезона качественно другие результаты по сравнению с формализмом КГФ.

³⁾ См. раздел 5, п. 5.

включая случай только многофотонных состояний. В разделе 4 эквивалентность двух теорий доказывается в более общем виде – на основе так называемых редукционных формул Леманна–Симанзика–Циммерманна (ЛСЦ) [13]. В разделе 5 мы кратко обсуждаем основные результаты и вопросы, касающиеся построения перенормируемой теории ДКП для частиц спина 0. В приложении содержатся некоторые доказательства.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

2.1. Гамильтонов подход в компонентной форме. Наша цель – построить гамильтониан теории ДКП, в которой имеются связи, обусловленные вырождением β -матриц. Сначала мы сделаем это в компонентном представлении. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\beta_\mu D^\mu - m)\psi, \quad (1)$$

где $D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$, $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$, $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$, поле A^μ будем рассматривать как внешнее электромагнитное поле. Мы выбираем β_μ -матрицы и ψ -функции в следующем виде:

$$\beta_0 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\alpha &= (\psi^* \eta)_\alpha = (\varphi^*, \varphi^{*0}, -\varphi^{*1}, -\varphi^{*2}, -\varphi^{*3}), \quad \eta = 2\beta_0^2 - 1, \\ \psi_\alpha &= (\varphi, \varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3). \end{aligned} \quad (3)$$

В компонентной форме лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\varphi^* D_\mu \varphi^\mu + \varphi^{*\mu} D_\mu \varphi - m(\varphi^* \varphi + \varphi^{*\mu} \varphi_\mu). \quad (4)$$

Из лагранжиана (4) находим все связи первого этапа:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \varphi^{*0}, \quad p^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = 0, \quad (5)$$

$$p_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^0} = -\varphi^*, \quad p_0^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^{*0}} = 0, \quad (6)$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^i} = 0, \quad p_i^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^{*i}} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Построим начальный гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \{p_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{L}\} = \\ &= \int d^3x \{ \varphi^* \partial_i \varphi^i - \varphi^{*i} \partial_i \varphi + m(\varphi^* \varphi + \varphi^{*\mu} \varphi_\mu) + ie(\varphi^{*\mu} A_\mu \varphi - \varphi^* A_\mu \varphi^\mu) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $p_a = \{p, p^*, p_0, p_0^*, p_i, p_i^*\}$ и мы воспользовались равенствами (5)–(7). Из формул (5)–(7) получаем связи первого этапа⁴⁾:

$$\theta = p - \varphi^{*0}, \quad \theta^* = p^*, \quad \theta_0 = p_0 + \varphi^*, \quad \theta_0^* = p_0^*, \quad (9)$$

$$\theta_i = p_i, \quad \theta_i^* = p_i^*. \quad (10)$$

Таким образом, можно сказать, что начальный гамильтониан H есть гамильтониан на поверхности связей:

$$H = \int d^3x \{p_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{L}\}_{\theta_a=0}. \quad (11)$$

Легко проверить, что ненулевые скобки Пуассона для связей θ_a имеют вид⁵⁾

$$\{\theta, \theta_0^*\} = -1, \quad \{\theta^*, \theta_0\} = -1. \quad (12)$$

Все прочие скобки равны нулю. Связи (9) являются связями второго рода, так как их скобки не исчезают на поверхности связей $\theta_a = 0$.

Из равенств (12) следует, что

$$\text{rank } \|\theta_a, \theta_b\| = 4. \quad (13)$$

Это означает, что если для определения множителей Лагранжа λ_a мы введем новый гамильтониан вне поверхности связей

$$H_2^{(1)} = H + \int d^3x \lambda_a(\mathbf{x}) \theta^a(\mathbf{x}) \quad (14)$$

и потребуем, чтобы все связи сохранялись во времени:

$$\dot{\theta}^a = \{\theta^a, H_2^{(1)}\} = 0, \quad (15)$$

то сможем определить не все множители λ_a , а только $\lambda, \lambda^*, \lambda_0, \lambda_0^*$.

Согласно (15) мы получаем шесть связей второго этапа:

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, H_2^{(1)}\} = \{\theta_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi^i} = D_i^* \varphi^* - m \varphi_i^* \equiv \theta_i^2, \quad (16)$$

$$\dot{\theta}_i^* = \{\theta_i^*, H_2^{(1)}\} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi^{*i}} = D_i \varphi - m \varphi_i \equiv \theta_i^{*2}. \quad (17)$$

⁴⁾Мы следуем терминологии книги [14].

⁵⁾Все переменные p_a, φ_a зависят от $\mathbf{x}$, поэтому правые части равенств (12) должны содержать функцию $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, которую мы опускаем.

Для полной системы связей

$$\theta_a = \{\theta, \theta^*, \theta_0, \theta_0^*, \theta_i, \theta_i^*, \theta_i^2, \theta_i^{*2}\}, \quad (18)$$

включающей десять связей первого этапа и шесть связей второго этапа, можно проверить, что

$$\text{rank } \|\theta_a, \theta_b\| = 16 \quad (19)$$

и

$$\det \|\theta_a, \theta_b\| = 1. \quad (20)$$

Таким образом, все эти связи являются связями второго рода. Согласно общей схеме [14] мы можем найти все множители λ_a из условий

$$\dot{\theta}_a = \{\theta_a, H_2^{(1)}\} = 0. \quad (21)$$

Из формул (9), (10), (14), (17), (18) и (21) получаем

$$\lambda = m\varphi_0 + ieA_0\varphi, \quad \lambda^* = m\varphi_0^* - ieA_0\varphi^*; \quad (22)$$

$$\lambda_0 = -\frac{1}{m}(D_i D^i \varphi + m^2 \varphi) + ie\varphi_0 A_0, \quad (23)$$

$$\lambda_0^* = -\frac{1}{m}(D_i^* D^{*i} \varphi^* + m^2 \varphi^*) - ie\varphi_0^* A_0;$$

$$\lambda_i = -\frac{1}{m}D_i(m\varphi_0 + ieA_0\varphi), \quad \lambda_i^* = -\frac{1}{m}D_i^*(m\varphi_0^* + ieA_0\varphi^*). \quad (24)$$

Равенства (24) являются следствием сохранения связей второго этапа

$$\dot{\theta}_i^2 = \{\theta_i^2, H_2^{(1)}\} = 0, \quad \dot{\theta}_i^{*2} = \{\theta_i^{*2}, H_2^{(1)}\} = 0. \quad (25)$$

Главным критерием правильности канонического, или гамильтонова (H) подхода к лагранжевой ($\mathcal{L}$) теории является совпадение лагранжевых и гамильтоновых уравнений движения.

Чтобы получить H -уравнения движения, мы должны подставить найденные лагранжевы множители (22)–(24) в гамильтониан (14) и рассмотреть следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \{\varphi(\mathbf{x}), H_2^{(1)}\} = \int d^3y \{\varphi(\mathbf{x}), \lambda^a(\mathbf{y})\theta_a(\mathbf{y})\} = \\ &= \int d^3y \lambda(\mathbf{y})\{\varphi(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{y})\} = \lambda(\mathbf{x}) = m\varphi_0 + ieA_0\varphi \end{aligned} \quad (26)$$

или

$$D_0\varphi - m\varphi_0 = 0, \quad (27)$$

и аналогично

$$D_0^*\varphi^* - m\varphi_0^* = 0. \quad (28)$$

Из сохранения связей θ_i ($\dot{\theta}_i = \{\theta_i, H_2^{(1)}\} = 0$) следует

$$D^i\varphi - m\varphi^i = 0, \quad D^{*i}\varphi^* - m\varphi^{*i} = 0. \quad (29)$$

Объединив уравнения (27)–(29), получаем

$$D^\mu \varphi - m\varphi^\mu = 0, \quad D^{*\mu} \varphi^* - m\varphi^{*\mu} = 0. \quad (30)$$

Далее, воспользовавшись уравнениями (29), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0(\mathbf{x}) &= \{\varphi_0, H_2^{(1)}\} = \int d^3 y \lambda^0(\mathbf{y}) \{\varphi_0(\mathbf{x}), \theta_0(\mathbf{y})\} = \\ &= \lambda^0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{m} (D_i D^i \varphi + m^2 \varphi) + ie\varphi_0 A^0 = \\ &= -\frac{1}{m} D^i (D_i \varphi - m\varphi_i) - (D_i \varphi^i + m\varphi) + ie\varphi_0 A^0 = \\ &= -(D_i \varphi^i + m\varphi) + ie\varphi_0 A^0, \end{aligned}$$

или в ковариантной форме

$$D_\mu \varphi^\mu + m\varphi = 0. \quad (31)$$

Мы получили все лагранжевы $\mathcal{L}$ -уравнения, отвечающие лагранжиану (4).

Таким образом, следуя каноническому формализму, мы получаем *на классическом уровне* из уравнений (30) и (31) уравнение КГФ для поля φ

$$D_\mu D^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0. \quad (32)$$

Очевидно, что этот результат также следует из компонентной формы лагранжиана $\mathcal{L}$ (4).

2.2. Квантование. Производящий функционал. Для канонического квантования теории со связями второго рода⁶⁾ перейдем к новым каноническим переменным:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \varphi, & \omega^{(2)} &= p, & \Omega^{(1)} &= -\theta = \varphi^0 - p, & \Omega^{(2)} &= \theta_0 = p_0, \\ \omega_0^{(1)} &= \varphi_0, & \omega_0^{(2)} &= p_0, & \Omega_0^{(1)} &= \theta_0 = \varphi^* + p_0, & \Omega_0^{(2)} &= \theta^* = p^*, \\ \Omega_i^{(1)} &= -\theta_i^{(2)} = \varphi_i - \frac{D_i \varphi}{m}, & \Omega_i^{(1)} &= \theta_i = p_i, \\ \Omega_i^{(2)} &= -\theta_i^{*(2)} = \varphi_i^* - \frac{D_i^* \varphi^*}{m}, & \Omega_i^{*(1)} &= \theta_i^* = p_i^*. \end{aligned} \quad (33)$$

В данном случае мы имеем четыре физические переменные $\omega^{(k)}$ и $\omega_0^{(k)}$, $k = 1, 2$, и шестнадцать связей $\Omega_a^{(k)} = 0$, которые позволяют выразить остальные переменные через $\omega^{(k)}$, $\omega_0^{(k)}$. Правила квантования записываются теперь очень просто [14, 15]:

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{p}(\mathbf{y})] &= i\{\varphi(\mathbf{x}), p(\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\hat{\varphi}_0(\mathbf{x}), \hat{p}_0(\mathbf{y})] &= i\{\varphi_0(\mathbf{x}), p_0(\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \hat{\Omega}_a^{(k)} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

⁶⁾ Квантованию теории со связями второго рода посвящены многие работы начиная с классической работы Дирака [15], см. также [14, 16]; последним шагом в развитии этого направления является метод Баталина–Вилковского–Фрадкина (ссылки см. в [14]).

Для $\hat{p}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{p}_0$ и $\hat{\varphi}_0$ скобки Дирака совпадают со скобками Пуассона.

Тогда для гейзенбергова оператора $\hat{\varphi}$ мы получаем уравнение (32), а для гамильтониана H – то же выражение, что и в теории КГФ. Однако чтобы доказать эквивалентность физических матричных элементов S -матрицы для скалярных частиц и многофотонных функций Грина в обеих теориях, проще рассмотреть сначала не гамильтониан $\hat{H}$, а производящий функционал функций Грина теории ДКП, который также следует из канонического квантования.

Производящий функционал теории ДКП в компонентной форме имеет вид

$$\mathcal{Z}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \mathcal{J}_\mu, \mathcal{J}_\mu^*) = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\varphi_a \mathcal{D}p_a \mu(\theta^a) \exp \left\{ i \int d^4x (p_a \dot{\varphi}_a - \mathcal{H}_2^{(1)} + \varphi_a \mathcal{J}^a) \right\}, \quad (35)$$

где

$$\mu(\theta^a) = \prod_a \delta(\theta_a) (\det \|\theta_a, \theta_b\|)^{1/2}, \quad \mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}(0, 0, 0, 0) \quad (36)$$

и $\mathcal{H}_2^{(1)}$ – плотность гамильтониана $H_2^{(1)}$. Учитывая формулы (9), (10), (14), (16), (17), (36) и интегрируя по всем импульсам p_a , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \mathcal{J}_\mu, \mathcal{J}_\mu^*) &= \mathcal{Z}_0^{-1} \prod_a \int \mathcal{D}\varphi_a \prod_{i=1}^3 \delta(D^i \varphi - m \varphi^i) \delta(D^{*i} \varphi^* - m \varphi^{*i}) \times \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x (\varphi^{*\mu} D_\mu \varphi - \varphi^* D_\mu \varphi^\mu - m(\varphi^* \varphi + \varphi^{*\mu} \varphi_\mu) + \right. \\ &\left. + \mathcal{J}^* \varphi + \mathcal{J} \varphi^* + \mathcal{J}_\mu \varphi^{*\mu} + \mathcal{J}_\mu^* \varphi^\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Разница между H -квантованием теории ДКП и формальным $\mathcal{L}$ -квантованием состоит в появлении двух функциональных δ -функций в формуле (37), что отражает наличие связей второго этапа (16) и (17) в H -подходе к теории ДКП.

После интегрирования в формуле (37) по φ_a с учетом δ -функций получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \mathcal{J}_\mu, \mathcal{J}_\mu^*) &= \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \left(m \mathcal{J}^*(x) G(x, y) \mathcal{J}(y) - \right. \right. \\ &- \mathcal{J}^*(x) G(x, y) D_\mu \mathcal{J}^\mu(y) - \mathcal{J}(x) (D_\mu^* \mathcal{J}^{*\mu}(y)) G(x, y) - \\ &\left. \left. - \frac{1}{m} \mathcal{J}^\mu(x) D_\mu G(x, y) D_\nu \mathcal{J}^\nu(y) - \frac{1}{m} \mathcal{J}_0(x) \delta^4(x - y) \mathcal{J}_0(y) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$G(x, y) = (D_\mu D^\mu + m^2)^{-1} \delta^4(x - y) \quad (39)$$

есть функция Грина заряженного скалярного поля φ во внешнем электромагнитном поле. Если в выражении (38) положить $\mathcal{J}_\mu = \mathcal{J}_\mu^* = 0$, то получим производящий функционал функций Грина теории КГФ.

В общем случае, как будет видно ниже (см. формулу (51)), производящий функционал (38) в точности совпадает с производящим функционалом, вычисленным в матричной форме, где

$$\bar{I}_\alpha = (\mathcal{J}^*, \mathcal{J}^{*0}, -\mathcal{J}^{*1}, -\mathcal{J}^{*2}, -\mathcal{J}^{*3}), \quad I_\alpha = (\mathcal{J}, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}^1, \mathcal{J}^2, \mathcal{J}^3). \quad (40)$$

Подчеркнем, что в правой части выражения (38) отсутствует $\det(D_\mu D^\mu + m^2)^{-1}$ (см. п. 2 после формулы (52)).

2.3. Гамильтонов подход. Матричная форма. Определим канонические импульсы, отвечающие лагранжиану (1):

$$p^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i(\psi^* \beta_0)_\alpha, \quad p^{*\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha^*} = 0, \quad (41)$$

$$p^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (42)$$

Начальный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \{p^\alpha \dot{\psi}_\alpha + p^{*\alpha} \dot{\psi}_\alpha^* - \mathcal{L}\} = \int d^3x (-i\bar{\psi}\beta_k D^k \psi + \bar{\psi}m\psi - e\bar{\psi}\beta_0 A^0 \psi) = \\ &= \int d^3x (-i\bar{\psi}\beta_k \partial^k \psi + m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\beta_\mu A^\mu \psi), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (43)$$

Он в точности совпадает с гамильтонианом (8), если правую часть выражения (43) записать в компонентной форме.

Запишем теперь, опуская выкладки, все связи первого и второго этапов и лагранжевы множители в матричной форме:

а) связи первого этапа

$$\theta_\alpha = p_\alpha - i(\bar{\psi}\beta_0)_\alpha, \quad (44)$$

$$\theta_\alpha^* = p_\alpha^*; \quad (45)$$

б) связи второго этапа

$$\begin{aligned} \theta_2^\alpha &= [(1 - \beta_0^2)(i\beta_k D^k - m)\psi]^\alpha, \\ \theta_2^{*\alpha} &= [\bar{\psi}(i\beta_k \overleftarrow{D}^{*k} + m)(1 - \beta_0^2)]^\alpha; \end{aligned} \quad (46)$$

в) лагранжевы множители

$$(\beta_0^2 \lambda)_\alpha = [i\beta_0(i\beta_k D^k - m)\psi]_\alpha, \quad (\lambda^* \beta_0^2)_\alpha = -[\bar{\psi}(i\beta_k \overleftarrow{D}^{*k} + m)\beta_0]_\alpha, \quad (47)$$

$$[(1 - \beta_0^2)(m - i\beta_k D^k)\eta]_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 0, \quad \lambda^{*\beta} [\eta(i\beta_k \overleftarrow{D}^{*k} + m)(1 - \beta_0^2)]_{\beta\alpha} = 0. \quad (48)$$

Все множители $\lambda_\alpha, \lambda_\alpha^*$, выраженные через компоненты, совпадают с соответствующими множителями λ_a в формулах (22)–(24).

2.4. Квантование. Производящий функционал. Матричная форма. Аналогично компонентному представлению (35) матричное представление производящего функционала теории ДКП во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(I, \bar{I}) &= \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta((1 - \beta_0^2)(i\beta_k D^k - m)\psi) \times \\ &\times \delta(\bar{\psi}(i\beta_k \overleftarrow{D}^{*k} + m)(1 - \beta_0^2)) \exp \left\{ i \int d^4x (\bar{\psi}(i\beta_\mu D^\mu - m)\psi + \bar{I}\psi + \bar{\psi}I) \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Вводя вспомогательные поля C и $\bar{C}$ вместо функциональных δ -функций в выражении (49) и используя равенство $\beta_0(1 - \beta_0^2) = 0$, получаем

$$\mathcal{Z}(I, \bar{I}) = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp \left\{ i \int d^4x \left(\bar{\psi}(i\beta_\mu D^\mu - m)\psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{C}(1 - \beta_0^2)(i\beta_\mu D^\mu - m)\psi \bar{\psi}(i\beta_\mu \overleftarrow{D}^{*\mu} + m)(1 - \beta_0^2)C + \bar{I}\psi + \bar{\psi}I \right) \right\}. \quad (50)$$

Интегрируя последовательно по полям ψ , $\bar{\psi}$ и C , $\bar{C}$, получаем окончательно

$$\mathcal{Z}(I, \bar{I}) = \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y I(x) \left(S(x, y, A) + \frac{1}{m}(1 - \beta_0^2)\delta^4(x - y) \right) I(y) \right\}, \quad (51)$$

где

$$S(x, y, A) = (i\beta_\mu D^\mu - m)^{-1}\delta^4(x - y) \quad (52)$$

есть функция Грина частицы ДКП во внешнем электромагнитном поле A_μ .

Относительно выражения (51) можно сделать следующие замечания.

1. Если записать выражение (51) в компонентной форме, получится выражение (38).
2. При интегрировании по ψ , $\bar{\psi}$, C и $\bar{C}$ появляются расходящиеся множители вида $\det(i\beta_\mu D^\mu - m)^{-1}$. Все эти множители присутствуют также в $\mathcal{Z}_0$, так что окончательное выражение (51) их не содержит.
3. В выражении (51) имеется релятивистски-неинвариантное слагаемое, пропорциональное $(1 - \beta_0^2)$, которое возникает из-за наличия связей второго этапа (θ_i^2 , θ_i^{*2} в формулах (16) и (17)) при исключении нефизических компонент ψ . Мы покажем ниже, что это слагаемое (которое не зависит от заряда) не дает вклада в физические матричные элементы S -матрицы (см. приложение, п. 1).
4. При обобщении формул (49)–(52) на случай взаимодействия частиц ДКП с квантованным электромагнитным полем получается следующее выражение для производящего функционала всех функций Грина теории (в α -калибровке):

$$\mathcal{Z}(I, \bar{I}, \mathcal{J}_\mu) = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ -i \int d^4x \left(\text{Tr} \ln \frac{S(x, x, A)}{S(x, x, 0)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{J}_\mu A^\mu - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \int d^4y \bar{I}(x) \left(S(x, y, A) + \frac{1}{m}(1 - \beta_0^2)\delta^4(x - y) \right) I(y) \right) \right\}. \quad (53)$$

Хорошо известно, что член, пропорциональный $\text{Tr} \ln S(x, x, A)$ в выражении (53), отвечает за появление всех вакуумных поляризационных диаграмм (см. раздел 3).

3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ S -МАТРИЦЫ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИЯХ ДКП И КГФ

1. Выпишем физическое операторное решение уравнения ДКП для *свободной* частицы, оно потребуется для доказательства эквивалентности обеих теорий. Это решение

можно записать в следующей форме (см. [5]):

$$\psi_{\alpha}^{(0)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \{ a^{-}(\mathbf{p}) e^{-ipx} \psi_{\alpha}^a(p) + b^{+}(\mathbf{p}) e^{ipx} \psi_{\alpha}^b(p) \}, \quad (54)$$

$$\bar{\psi}_{\alpha}^{(0)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \{ a^{+}(\mathbf{p}) e^{ipx} \bar{\psi}_{\alpha}^a(p) + b^{-}(\mathbf{p}) e^{-ipx} \bar{\psi}_{\alpha}^b(p) \}, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m) \psi^{a,b} &= 0, & \bar{\psi}^{a,b} (\hat{p} - m) &= 0, & \hat{p} &\equiv \beta_{\mu} p^{\mu}, \\ (i\beta_{\mu} \partial^{\mu} - m) \psi^0(x) &= 0, & p_0 &= \omega(\mathbf{p}) = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} = \omega. \end{aligned} \quad (56)$$

Операторы a^{+} , a^{-} , b^{+} и b^{-} подчиняются обычным коммутационным соотношениям, а

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}^a(p) &= \sqrt{\frac{m}{2\omega}} \left(1, -\frac{i\omega}{m}, -\frac{ip^1}{m}, -\frac{ip^2}{m}, -\frac{ip^3}{m} \right), \\ \psi_{\alpha}^b(p) &= \sqrt{\frac{m}{2\omega}} \left(1, \frac{i\omega}{m}, +\frac{ip^1}{m}, +\frac{ip^2}{m}, +\frac{ip^3}{m} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Легко вычислить следующие скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (\psi^a(p), \psi^a(p)) &\equiv \psi_{\alpha}^{*a}(p) (\beta_0)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}^a(p) = \bar{\psi}^a(p) \beta_0 \psi^a(p) = 1, \\ (\psi^b(p), \psi^b(p)) &\equiv \psi_{\alpha}^{*b}(p) (\beta_0)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}^b(p) = \bar{\psi}^b(p) \beta_0 \psi^b(p) = -1, \\ (\psi^a(p), \psi^b(p)) &\equiv \bar{\psi}^a(p) \beta_0 \psi^b(p) = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Таким образом, существуют только два линейно независимых (физических) решения свободного уравнения ДКП.

Определим

$$\psi_p^{a,b}(x) = \pm (2\pi)^{-3/2} e^{\mp ipx} \psi^{a,b}(p), \quad p_0 = \omega. \quad (59)$$

Тогда, используя формулы (54)–(58), получим

$$a^{-}(\mathbf{p}) = \int d^3 x \psi_p^{*a}(x) \beta_0 \psi^0(x), \quad b^{+}(\mathbf{p}) = \int d^3 x \psi_p^{*b}(x) \beta_0 \psi^0(x) \quad (60)$$

и $a^{+} = (a^{-})^{*}$, $b^{-} = (b^{+})^{*}$.

2. Выпишем теперь общее соотношение между функциями Грина и матричными элементами S -матрицы.

По определению, согласно (53) n -частичные функции Грина частиц ДКП без внешних фотонов можно записать в виде

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) &= (-1)^n \frac{\delta^{2n} \ln \mathcal{Z}(I, \bar{I}, \mathcal{J}_{\mu} = 0)}{\delta \bar{I}(x_1) \dots \delta \bar{I}(x_n) \delta I(y_1) \dots \delta I(y_n)} \Big|_{I, \bar{I}=0} = \\ &= \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (61)$$

где мы опустили несвязные функции Грина.

С другой стороны, функции Грина (61) можно (формально) выразить через матричные элементы S -матрицы следующим образом:

$$G_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \int dx'_i dy'_i S(x_i - x'_i) \times \\ \times \Gamma_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) S(y'_i - y_i), \quad (62)$$

где $S(x - y)$ есть точная одночастичная функция Грина, а Γ_n — так называемые вершинные функции, которые в импульсном представлении совпадают с n -частичными матричными элементами S -матрицы $S_n(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ для физических состояний на массовой оболочке:

$$\Gamma_n(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = S_n(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n), \\ p_{i0} = (\mathbf{p}_i^2 + m^2)^{1/2}, \quad q_{i0} = (\mathbf{q}_i^2 + m^2)^{1/2}, \quad \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) = 0. \quad (63)$$

Хорошо известно, что одночастичная функция Грина после перенормировки имеет полюс вида $(m - \hat{p} - i\varepsilon)^{-1}$ с вычетом, равным единице, и сингулярность вида $\delta^4(x - y)$ (см. (52)). Таким образом, если рассмотреть физический матричный элемент

$$A \equiv \lim_{\substack{p_{i0} \rightarrow (\mathbf{p}_i^2 + m^2)^{1/2} \\ q_{i0} \rightarrow (\mathbf{q}_i^2 + m^2)^{1/2}}} \prod_{i=1}^n \bar{\psi}^{a,b}(p_i) (\vec{\hat{p}}_i - m) G_n(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) (\vec{\hat{q}}_i - m) \psi^{a,b}(q_i) \quad (64)$$

и использовать соотношения (63), то получим n -частичный матричный элемент S -матрицы для физических состояний на массовой оболочке⁷⁾

$$A \equiv \prod_{i=1}^n \bar{\psi}_{\alpha_i}^{a,b}(p_i) S^{\alpha_1 \dots \alpha_n; \beta_1 \dots \beta_n}(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) \psi_{\beta_i}^{a,b}(q_i), \quad (65)$$

где $p_i^0 = (\mathbf{p}_i^2 + m^2)^{1/2}$ и $q_i^0 = (\mathbf{q}_i^2 + m^2)^{1/2}$.

В приложении, п. 1 мы показываем, что все слагаемые в $S(x - y)$, пропорциональные $\delta^4(x - y)(1 - \beta_0^2)$, не дают вклада в матричные элементы на массовой оболочке.

Та же ситуация возникает, если рассмотреть матричные элементы для физических состояний со многими фотонами *в присутствии* частиц ДКП.

Таким образом, мы приходим к очень важному заключению: можно начать с $\mathcal{L}$ -формулировки теории ДКП, забыть о связях, использовать вместо (53) следующее выражение для производящего функционала:

$$\mathcal{Z}(I, \bar{I}, \mathcal{J}_\mu) = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ -i \int d^4x \left(\bar{\psi}(i\beta_\mu D^\mu - m)\psi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi} I + \bar{I} \psi + \mathcal{J}_\mu A^\mu \right) \right\}, \quad (66)$$

⁷⁾ Для простоты мы не выписываем симметризованные выражения для всех матричных элементов, что необходимо из-за тождественности частиц.

и получить для физических матричных элементов S -матрицы правильный результат. Другими словами, для S -матрицы можно использовать выражение (91) (см. ниже) с релятивистски-инвариантным определением T -произведения операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(y)$ в представлении взаимодействия [5, 6]:

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle = \frac{i}{(2\pi)^4 m} \int d^4 p e^{-ipx} \left\{ \frac{\hat{p}(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} - 1 \right\}. \quad (67)$$

3. Докажем равенство матричного элемента (64) соответствующему матричному элементу S -матрицы в теории КГФ.

Используя определение (61) функций Грина в теории ДКП, запишем выражение (64) в виде (несущественные множители опускаем)

$$A \equiv \lim_{\substack{p_0 \rightarrow (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \\ q_0 \rightarrow (\mathbf{q}^2 + m^2)^{1/2}}} \int \prod_{i=1}^n dx_i dy_i \bar{\psi}_p^a(x_i) (i\beta_\mu \vec{\partial}_i^\mu - m) \times \\ \times \langle 0|T\psi(x_1) \dots \psi(x_n) \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n)|0\rangle (i\beta_\mu \overleftarrow{\partial}_j^\mu - m) \psi_q^b(y_j), \quad (68)$$

где $\psi(x_j)$ и $\bar{\psi}(y_i)$ – гейзенберговы операторы, $\psi_p^a(x)$ и $\bar{\psi}_q^b(y)$ определены выражением (59).

Используя компонентные представления (3) и (57) для оператора $\psi(x)$ и функции $\bar{\psi}^a(p)$, соответственно, рассмотрим следующее выражение:

$$\int d^4 x e^{ipx} \bar{\psi}^a(p) (i\beta_\mu \partial^\mu - m) \psi(x) = \\ = \int d^4 x e^{ipx} \left[\left(-m + \frac{i}{m} p^\mu \partial_\mu \right) \varphi(x) - (\partial^\mu + ip^\mu) \varphi_\mu \right]. \quad (69)$$

Так как $ip_\mu e^{ipx} = (\partial/\partial x^\mu) e^{ipx}$, формулу (69) можно переписать в виде

$$\int d^4 x e^{ipx} \bar{\psi}^a(p) (i\beta_\mu \partial^\mu - m) \psi(x) = \\ = \int d^4 x e^{ipx} \frac{(-1)}{m} (\vec{\square} + m^2) \varphi(x) + \int d^4 x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[e^{ipx} \left(\frac{\partial^\mu}{m} \varphi - \varphi^\mu \right) \right]. \quad (70)$$

В приложении показано, что второе слагаемое в правой части выражения (70) равно нулю, и, таким образом, физические матричные элементы рассеяния заряженных скалярных частиц в теориях ДКП и КГФ совпадают⁸⁾.

Теперь докажем равенство многофотонных функций Грина в обеих теориях.

Легко показать, что производящий функционал функций Грина в теории КГФ имеет вид

$$\mathcal{Z}(\mathcal{J}^*, \mathcal{J}, \mathcal{J}_\mu) = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ -i \int d^4 x \operatorname{Tr} \left(\ln \frac{G(x, x, A)}{G(x, x, 0)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathcal{J}_\mu A^\mu - \int d^4 y \mathcal{J}^*(x) G(x, y, A) \mathcal{J}(y) \right) \right\}, \quad (71)$$

⁸⁾ Рассеяние заряженных частиц внешним электромагнитным полем является частным случаем, и эквивалентность обеих теорий следует из формулы (97) (см. приложение).

где функция Грина $G(x, y, A)$ определена формулой (39).

Чтобы получить производящий функционал фотонных функций Грина, нужно положить $\mathcal{J}^* = \mathcal{J} = 0$ в (71) и $I = \bar{I} = 0$ в (53). Равенство получающихся выражений будет установлено, если доказать, что

$$\mathcal{Z}_A \equiv \det \frac{S(x, y, A)}{S(x, y, 0)} = \exp \left\{ \text{Tr} \ln \frac{S(x, x, A)}{S(x, x, 0)} \right\} = \det \frac{G(x, y, A)}{G(x, y, 0)}. \quad (72)$$

С другой стороны,

$$\mathcal{Z}_A = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi} (i\hat{D} - m) \psi \right\}, \quad (73)$$

где

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi} (i\hat{\partial} - m) \psi \right\}. \quad (74)$$

В компонентной форме выражение (73) имеет вид

$$\mathcal{Z}_A = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\varphi_\mu \mathcal{D}\varphi_\mu^* \exp \left\{ i \int d^4x (\varphi^{*\mu} D_\mu \varphi - \varphi^* D_\mu \varphi^\mu - m(\varphi^* \varphi + \varphi^{*\mu} \varphi_\mu)) \right\},$$

После интегрирования по φ_μ^* и φ^μ получаем

$$\mathcal{Z}_A = \tilde{\mathcal{Z}}_0^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \exp \left\{ -\frac{i}{m} \int d^4x \varphi^* (D^\mu D_\mu + m^2) \varphi \right\}, \quad (75)$$

где

$$\tilde{\mathcal{Z}}_0^{-1} = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \exp \left\{ -\frac{i}{m} \int d^4x \varphi^* (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi \right\}. \quad (76)$$

После подстановки $\varphi/\sqrt{m} \rightarrow \varphi$ выражение (75) для детерминанта совпадает с правой частью равенств (72).

Эквивалентность доказана.

4. РЕДУКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В ФОРМАЛИЗМЕ ДКП И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТЕОРИИ КГФ

Напишем уравнения Янга–Фельдмана для гейзенберговских операторов в формализме ДКП:

$$\psi(x) = \psi_{\text{in}}(x) + \int S_R(x-y) j(y) d^4y, \quad (77)$$

$$\psi(x) = \psi_{\text{out}}(x) + \int S_A(x-y) j(y) d^4y. \quad (78)$$

Здесь $\psi_{\text{in}}(x)$ и $\psi_{\text{out}}(x)$ удовлетворяют свободному уравнению ДКП

$$(i\beta_\mu \partial^\mu - m) \psi_{\text{in, out}}(x) = 0, \quad (79)$$

$S_{R,A}$ — соответственно запаздывающая и опережающая функции Грина свободного уравнения

$$(i\beta_\mu \partial^\mu - m)S_{R,A}(x) = \delta^4(x), \quad (80)$$

$$S_{R,A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 m} \int d^4 p e^{-ipx} \left(\frac{\hat{p}(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 \pm i\varepsilon p_0} - 1 \right). \quad (81)$$

Функции Грина $S_{R,A}$ отличны от нуля соответственно в верхнем и нижнем световом конусах. Из формул (77)–(81) получаем

$$(i\beta_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = j(x). \quad (82)$$

Выбирая для $\psi_{\text{in,out}}$ ($\bar{\psi}_{\text{in,out}}$) два линейно независимых решения (54) и (55), имеем (мы опускаем аргумент x и выражение для $\bar{\psi}_{\text{in,out}}$)

$$\psi_{\text{in,out}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \{ a_{\text{in,out}}^-(\mathbf{p}) e^{-ipx} \psi^a(\mathbf{p}) + b_{\text{in,out}}^+(\mathbf{p}) e^{ipx} \psi^b(\mathbf{p}) \}. \quad (83)$$

Аналогично, используя формулы (59) и (60), можно выразить $a_{\text{in,out}}^\pm(\mathbf{p})$ и $b_{\text{in,out}}^\pm(\mathbf{p})$ через скалярные произведения:

$$a_{\text{in,out}}^-(\mathbf{p}) = \int d^3 x \psi_p^{*a}(x) \beta_0 \psi_{\text{in,out}}(x) \quad (84)$$

и т. д. По определению

$$a_{\text{out}}^\pm = S^\dagger a_{\text{in}}^\pm S. \quad (85)$$

Определим гейзенберговы операторы рождения и уничтожения

$$a^-(\mathbf{p}, x_0) = \int d^3 x \psi_p^{*a}(x) \beta_0 \psi(x), \quad (86)$$

$$b^+(\mathbf{p}, x_0) = \int d^3 x \psi_p^{*b}(x) \beta_0 \psi(x) \quad (87)$$

и т. д., где $\psi(x)$ — решение уравнения (82).

Теперь исходя из выражений (77), (78), (86) и (87) можно доказать [13], что операторы $a^\pm(\mathbf{p}, x_0)$ и $b^\pm(\mathbf{p}, x_0)$ имеют пределы (в слабом смысле) для любых матричных элементов по полной системе физических состояний $|n_{\text{in}}\rangle$, $|m_{\text{out}}\rangle$:

$$\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} \langle m_{\text{out}} | a^\pm(\mathbf{p}, x_0) | n_{\text{in}} \rangle = \langle m_{\text{out}} | a_{\text{out,in}}^\pm(\mathbf{p}) | n_{\text{in}} \rangle, \quad (88)$$

аналогичные пределы можно записать для операторов $b^\pm(\mathbf{p}, x_0)$.

Для простоты мы докажем эквивалентность двух теорий для матричных элементов рассеяния скалярной частицы (положительно заряженной) из произвольного начального состояния $|n_{\text{in}}\rangle$ в произвольное конечное состояние $\langle m_{\text{out}}|$. Используя формулу (88), имеем

$$\begin{aligned}
 \langle m_{\text{out}}|a_{\text{out}}^-(\mathbf{q})a_{\text{in}}^+(\mathbf{p})|n_{\text{in}}\rangle &= \langle m_{\text{out}}|a_{\text{in}}^-Sa_{\text{in}}^+|n_{\text{in}}\rangle = \\
 &= \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \langle m_{\text{out}}|a_{\text{out}}^-(\mathbf{q}) \int d\vec{x} \psi_p^{*a}(x) \beta_0 \psi(x) |n_{\text{in}}\rangle = \\
 &= \langle m_{\text{out}}|a_{\text{out}}^-(\mathbf{q})(-i) \int d\vec{x} dx_0 i \frac{\partial}{\partial x_0} (\bar{\psi}_p^a(x) \beta_0 \psi(x)) |n_{\text{in}}\rangle = \\
 &= \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{ipx} \bar{\psi}_\alpha^a(p) (i\beta_\mu \vec{\partial}_x^\mu - m)_{\alpha\beta} \langle m_{\text{out}}|a_{\text{out}}^-(\mathbf{q}) \psi_\beta(x) |n_{\text{in}}\rangle = \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x d^4y e^{ipx} \bar{\psi}_\alpha^a(p) (i\beta_\mu \vec{\partial}_x^\mu - m)_{\alpha\beta} \langle m_{\text{out}}|T(\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\delta(y)) |n_{\text{in}}\rangle \times \\
 &\quad \times (i\beta_\mu \overleftarrow{\partial}_y^\mu + m)_{\delta\gamma} \psi_\gamma^b(q) e^{-ipy} \equiv \langle m_{\text{out}}, \mathbf{q}|\mathbf{p}, n_{\text{in}}\rangle. \tag{89}
 \end{aligned}$$

Если воспользоваться методом ЛСЦ для всех частиц в состояниях $|n_{\text{in}}\rangle$ и $\langle m_{\text{out}}|$, то можно получить выражение (68).

Дальнейшее доказательство эквивалентности теорий ДКП и КГФ проводится так же, как это было сделано в конце раздела 3 (см. формулы (70)–(75) и приложение).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Применив канонический подход к теории ДКП взаимодействия заряженных скалярных частиц с квантованным электромагнитным полем и построив производящий функционал функций Грина этой теории, мы строго доказали полную эквивалентность физических матричных элементов S -матрицы в теориях ДКП и КГФ, а также эквивалентность многофотонных функций Грина обеих теорий. При доказательстве эквивалентности двух теорий был использован наиболее общий подход, основанный на редукционных формулах ЛСЦ. Эквивалентность обеих теорий также была доказана исходя из лагранжева подхода к теории ДКП без обращения к связям.

2. Вообще говоря, как теория ДКП, так и теория КГФ неперенормируемы даже для скалярных частиц из-за логарифмической расходимости однопетлевых диаграмм рассеяния двух частиц с обменом двумя фотонами [5]. Хорошо известно, что теория КГФ становится перенормируемой, если ввести член самодействия вида $\lambda(\varphi^*\varphi)^2$. В теории ДКП эта проблема может быть решена тем же способом: необходимо добавить к лагранжиану (1) слагаемое вида

$$\lambda(\bar{\psi}P\psi)^2 = \lambda(\varphi^*\varphi)^2, \tag{90}$$

где $P = \prod_\mu \beta_\mu^2$ – проектор на скалярную часть функции ψ , P является псевдоскаляром.

3. В рамках метода, который использовался в разделах 3 и 4, формально можно доказать эквивалентность теории ДКП и теории Прока для частиц спина 1, если отвлечься от неперенормируемости этих теорий.

4. Мы хотели бы подчеркнуть, что до сих пор теория ДКП не нашла широкого применения, хотя она имеет некоторые преимущества благодаря вырожденности β_μ -матриц (легко вычислять следы таких матриц) и минимальному характеру взаимодействия с электромагнитным полем. Достаточно сравнить выражения для S -матрицы в теориях ДКП и КГФ:

$$S_{\text{ДКП}} = T \exp \left\{ i \int e \bar{\psi} \beta_\mu A^\mu \psi d^4 x \right\}, \quad (91)$$

$$S_{\text{КГФ}} = T \exp \left\{ i \int i e (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \varphi - i e \varphi^* A_\mu \varphi) A^\mu d^4 x \right\}. \quad (92)$$

В последнем случае взаимодействие содержит члены, пропорциональные e и e^2 . По этой причине в высших приближениях (две и более петли) комбинаторные коэффициенты для вкладов от членов взаимодействия порядка e^2 оказываются сложными.

5. По вопросу об эквивалентности теорий ДКП и КГФ при описании нестабильных частиц мы хотели бы заметить, что если для некоторых таких частиц можно использовать понятие асимптотических состояний и, следовательно, к физическим матричным элементам S -матрицы приложимы методы, изложенные в разделах 3 и 4, то доказательство эквивалентности очевидно. Например, для распада K_l -мезона можно вычислить мнимую часть функции Грина K_l -мезона и увидеть эквивалентность двух теорий после переопределения φ -компоненты ψ -функции ДКП: $i\varphi_{\text{КГФ}} = \varphi_{\text{ДКП}}/m$ (см. формулу (70)).

Благодарности. Мы хотим поблагодарить И. В. Тютютина за предложение использовать редукционные формулы ЛСЦ для доказательства эквивалентности двух теорий и Д. М. Гитмана за стимулирующую критику. В. Я. Ф. благодарит FAPESP за финансовую поддержку (грант № 98/06237-0) и РФФИ за частичную финансовую поддержку (гранты № 99-01-00376 и № 00-15-96566). Б. М. П. благодарен CNPq за частичную финансовую поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Покажем, что все слагаемые вида $(1 - \beta_0^2) \delta^4(x - y)$ в функциях Грина скалярных частиц (см. (53)) не дают вклада в физические матричные элементы. Вначале рассмотрим простейший случай: пусть функция Грина во внешнем электромагнитном поле A_μ имеет вид

$$i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = S(x, y, A) + \frac{1}{m} (1 - (\beta_0)^2) \delta^4(x - y), \quad (93)$$

где $S(x, y, A) = (i\beta_\mu D^\mu - m)^{-1} \delta^4(x - y)$.

По определению матричный элемент рассеяния положительно заряженной частицы внешним электромагнитным полем есть

$$\lim_{\substack{p_0 \rightarrow \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \\ q_0 \rightarrow \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}} \frac{(-1)}{(2\pi)^3} \int d^4 x d^4 y \bar{\psi}_p^a(x) (i\beta_\mu \vec{\partial}_x^\mu - m) \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle (i\beta_\mu \overleftarrow{\partial}_y^\mu + m) \psi_q^b(y). \quad (94)$$

Подставив выражение (93) в формулу (94), мы видим, что слагаемое, пропорциональное $\delta^4(x - y)$, не дает вклада, так как согласно определению δ -функции можно изменить направление стрелок на обратное, что дает нуль:

$$\bar{\psi}_p^a(x)(i\beta_\mu \overleftarrow{\partial}_x^\mu + m) = 0, \quad (i\beta_\mu \overrightarrow{\partial}_y^\mu - m)\psi_q^b(y) = 0. \quad (95)$$

В случае квантованного электромагнитного поля следует исходить из выражения (53). Поскольку наличие внешних фотонов не приводит к появлению слагаемых, пропорциональных $\delta^4(x - y)$, достаточно рассматривать случай $\mathcal{J}_\mu = 0$ в выражении (53)⁹⁾.

Любая функция Грина скалярных частиц выражается через симметризованное произведение одночастичных функций Грина (93), стоящее под знаком интеграла по A_μ в выражении (71):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n) | 0 \rangle = \\ = Z_0^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ -i \int d^4x \left(\det \ln \frac{S(x, x, A)}{S(x, x, 0)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) \right\} \times \\ \times \sum_{p_{i,j}} \prod_{i,j=1}^n \left(S(x_i, y_j, A) - \frac{1}{m} (1 - \beta_0^2) \delta^4(x_i - y_j) \right), \end{aligned} \quad (96)$$

где $\sum_{p_{i,j}}$ означает суммирование по всем перестановкам x_i и y_j , все δ -функции $\delta^4(x_i - y_j)$ можно вынести из-под знака интеграла $\int \mathcal{D}A_\mu$. При переходе к матричным элементам S -матрицы мы применяем к этим членам ту же процедуру, что и в формуле (94), и получаем нуль.

Таким образом, мы доказали, что члены вида $(1 - \beta_0^2) \delta^4(x_i - y_j)$ не дают вклада в физические матричные элементы S -матрицы и не нарушают релятивистскую инвариантность и микропричинность для физических наблюдаемых.

2. Докажем, что имеющее вид полной производной второе слагаемое в правой части (70), которое может содержать квазилокальный член, равно нулю. Запишем все вклады в матричный элемент (89) в *компонентной* форме. Используя формулу (70) и опуская несущественные множители, получим

$$\begin{aligned} \langle m_{\text{out}}, \mathbf{q} | \mathbf{p}, n_{\text{in}} \rangle \cong \int d^4x d^4y \langle m_{\text{out}} | e^{i(p x - q y)} (\square_x + m^2) (\square_y + m^2) T(\varphi(x) \varphi^*(y)) - \\ - \partial_\mu \left[e^{i p x} (\square_y + m^2) \left(\frac{x}{m} T(\varphi(x) \varphi(y)) - T(\varphi^\mu(x) \varphi^*(y)) \right) \right] e^{-i q y} + \\ + \partial_\mu \left[e^{-i q y} (\square_x + m^2) \left(\frac{y}{m} T(\varphi(x) \varphi^*(y)) - T(\varphi(x) \varphi^{*\mu}(y)) \right) \right] e^{i p x} + \\ + \partial_\mu \partial_\nu \left[e^{i p x - i q y} \left(T(\varphi^\mu(x) \varphi^{*\nu}(y)) - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} T(\varphi(x) \varphi^*(y)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x}{m} T(\varphi(x) \varphi^{*\nu}(y)) \frac{\partial^\nu}{m} T(\varphi^\mu(x) \varphi^{*\nu}(y)) \right) \right] | \vec{p}, n_{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (97)$$

⁹⁾ Этому случаю отвечают формулы (71)–(76).

Квазилокальный член, содержащий $\delta^4(x-y)$, возникает только из седьмого слагаемого:

$$\partial_x^\mu \partial_y^\nu T(\varphi(x)\varphi^*(y)) = T(\partial^\mu \varphi(x) \partial^\nu \varphi^*(y)) - ig^{0\mu} g^{0\nu} \delta^4(x-y).$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\delta(x_0 - y_0) [\varphi(x), \dot{\varphi}^*(y)] = -i\delta^4(x-y)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y \partial_x^\mu \partial_y^\nu \left(e^{ipx - iqu} \frac{\partial_x^\mu \partial_y^\nu}{m^2} T(\varphi(x)\varphi^*(y)) \right) = \\ = -\frac{i}{m^2} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \int dx_0 dy_0 \partial_x^0 \partial_y^0 (\exp(ip_0 x_0 - iq_0 y_0) \delta(x_0 - y_0)) = 0. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *G. Petiau.* Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect. 1936. V. 16. № 2. P. 1.
- [2] *R. Y. Duffin.* Phys. Rev. 1938. V. 54. P. 1114.
- [3] *N. Kemmer.* Proc. Roy. Soc. A. 1939. V. 173. P. 91.
- [4] *H. Umezawa.* Quantum Field Theory. Amsterdam: North-Holland, 1956.
- [5] *А. И. Ахуезер, В. Б. Берестецкий.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
- [6] *T. Kinoshita.* Progr. Theor. Phys. 1950. V. 5. P. 473; *T. Kinoshita, Y. Nambu.* Progr. Theor. Phys. 1950. V. 5. P. 749.
- [7] *R. A. Krajcik, M. M. Nieto.* Am. J. Phys. 1977. V. 45. P. 818.
- [8] *V. L. Ginzburg.* Quantum field theory and quantum statistics. In: Essays in Honor of the Sixtieth Birthday of E. S. Fradkin. V. 2. Eds. I. A. Batalin, C. J. Isham, G. A. Vilkovisky. Bristol: Adam Hilger, 1987. P. 15.
- [9] *A. Wightman.* The Dirac equation. In: Aspects of Quantum Theory. Eds. A. Salam, E. P. Wigner. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. P. 95.
- [10] *G. Velo, D. Zwanziger.* Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1337; 1969. V. 188. P. 2218.
- [11] *E. Fischbach, F. Iachello, A. Lande, M. Nieto, C. Scott.* Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26. P. 1200.
- [12] *B. M. Pimentel, J. L. Tomazelli.* Progr. Theor. Phys. 1995. V. 45. P. 1105.
- [13] *H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann.* Nuovo Cimento. 1955. V. 1. P. 425.
- [14] *Д. М. Гитман, И. В. Тютин.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986; *D. M. Gitman, I. V. Tyutin.* Quantization of Fields with Constraints. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [15] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. A. 1958. V. 246. P. 326.
- [16] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 21.XII.1999 г.