Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Кулиш, Н. Манойлович, З. Надь, Жорданова
деформация открытой XXX -спиновой цепочки, *ТМФ*,
2010, том 163, номер 2, 288–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:52:35

© 2010 г. П. П. Кулиш*, Н. Манойлович†, З. Надь‡

ЖОРДАНОВА ДЕФОРМАЦИЯ ОТКРЫТОЙ XXX -СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Найдено общее решение уравнения отражения, связанного с жордановой деформацией $SL(2)$ -инвариантной R -матрицы Янга. Та же K -матрица получена посредством специального скейлингового предела XXZ -модели с общими граничными условиями. Гамильтониан с граничными членами получен явно, следуя формализму Склянина. Обсуждается также структура спектра деформированной XXX -модели и ее зависимость от граничных условий.

Ключевые слова: спиновые цепочки, граничные условия, квантовые группы, уравнение отражения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) [1]–[4] как метод построения и решения квантовых интегрируемых систем привел к созданию теории квантовых групп [5], [6]. Одной из интересных характеристик квантовых групп является наличие преобразования, называемого твист [7] и позволяющего строить новые квантовые группы по уже известным. Хотя твист-преобразования порождают соотношение эквивалентности в квантовых группах, они приводят к различным R -матрицам. Новые R -матрицы, в свою очередь, могут порождать новые интегрируемые системы [8].

Твист квантовой группы, или более обще алгебры Хопфа $\mathcal{A}$, состоит в преобразовании подобия копроизведения $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ посредством обратимого элемента твиста

$$\Delta(a) \rightarrow \Delta_t(a) = \mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}, \quad a \in \mathcal{A}. \quad (1.1)$$

Чтобы гарантировать свойство коассоциативности копроизведения, элемент $\mathcal{F}$ должен удовлетворять определенному соотношению совместности – так называемому уравнению твиста (или скручивания)

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes \text{id})\mathcal{F} = \mathcal{F}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{F}, \quad (1.2)$$

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: kulish@euclid.pdmi.ras.ru

†Departamento de Matemática, Universidade do Algarve, Campus de Gambelas, Faro, Portugal. E-mail: nmanoj@ualg.pt

‡Grupo de Física Matemática da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. E-mail: zoltan.nagy@m4x.org

где

$$(\Delta \otimes \text{id}) \sum_j f_j^{(1)} \otimes f_j^{(2)} = \sum_j \Delta(f_j^{(1)}) \otimes f_j^{(2)} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}.$$

Более того, закон преобразования копроизведения определяет также, как меняется соответствующая универсальная R -матрица:

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{(t)} = \mathcal{F}_{21} \mathcal{R} \mathcal{F}^{-1}, \quad \mathcal{F}_{21} = \sum_j f_j^{(2)} \otimes f_j^{(1)}. \quad (1.3)$$

Эта новая R -матрица позволяет нам строить и исследовать новые интегрируемые модели [9].

В частности, решение уравнения твиста дается жордановым элементом скручивания для обертывающей алгебры $sl(2)$ -алгебры Ли, который был введен в работах [10], [11], а его обобщение на случай $sl(N)$ было дано в работах [8], [12]. В нашей статье мы рассмотрим пример твистованной алгебры $sl(2)$ и соответствующую деформацию янгиана $\mathcal{Y}(sl(2))$ [9], [13]. Поскольку твист сохраняет свойство регулярности R -матрицы (т. е. $R(0) = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – перестановка соседних пространств), можно предъявить деформированную версию интегрируемой ХХХ-спиновой цепочки Гейзенберга с периодическими граничными условиями [9]

$$H = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + \theta (\sigma_j^+ - \sigma_{j+1}^+) + \theta^2 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ \right).$$

Отметим, что этот оператор неэрмитов, что приводит к дополнительным трудностям в применении к этой модели алгебраического анзаца Бете. Хотя можно показать, что дополнительные слагаемые в ХХХ-гамильтониане не меняют спектра модели [9], [14], точный вид состояний Бете не столь очевиден.

В настоящей работе мы исследуем деформируемую посредством жорданова твиста ХХХ-модель с непериодическими граничными условиями. Последние описываются матрицами отражения $K^\pm(\lambda)$ [15]. Результатом является классификация матриц отражения, совместимых с твистованной жордановой R -матрицей. Общее решение получено непосредственным вычислением и подтверждено с помощью сингулярного скейлинга предела известной матрицы отражения анизотропной ХХЗ-модели. Используя общее решение $K(\lambda)$ и формализм Складина [15], мы строим гамильтониан с общими непериодическими граничными условиями. В заключение мы приводим ряд замечаний о влиянии этих граничных условий на спектр системы.

2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЯ

Основное соотношение КМОЗ [1], [3]

$$R_{12}(\lambda - \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) = T_2(\mu) T_1(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu) \quad (2.1)$$

может быть использовано для определения специальной бесконечномерной квантовой алгебры – янгиана. R -матрица Янга

$$R_{12}(\lambda) = \lambda I + \eta \mathcal{P} \in \text{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n) \quad (2.2)$$

определяет янгиан $\mathcal{Y}(sl(n))$ с матричными элементами $(n \times n)$ -матрицы $T(\lambda)$ в качестве производящих функций генераторов $\mathcal{Y}(sl(n))$ (см. работу [16]). Мы используем I и $\mathcal{P}$ тождественный оператор и перестановку в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$: $\mathcal{P}(v \otimes w) = w \otimes v$; $v, w \in \mathbb{C}^n$, а также стандартные обозначения КМОЗ: $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$. XXX -спиновая цепочка Гейзенберга связана с янгианом $\mathcal{Y}(sl(2))$, и универсальная обертывающая алгебра $sl(2)$ -алгебры Ли является подалгеброй Хопфа этого янгиана: $U(sl(2)) \subset \mathcal{Y}(sl(2))$. Два генератора h и $X^\pm$ алгебры $sl(2)$

$$[h, X^\pm] = \pm 2X^\pm, \quad [X^+, X^-] = h \quad (2.3)$$

порождают жорданов элемент твиста

$$\mathcal{F} = e^{h \otimes \ln(1 + \theta X^+)} \in U(sl(2)) \otimes U(sl(2)), \quad (2.4)$$

который удовлетворяет уравнению твиста Дринфельда (1.2). Матричная форма $\mathcal{F}$ в представлении ρ спина $1/2$ есть $F_{12} \in \text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$:

$$F_{12} = (\rho \otimes \rho)\mathcal{F} = e^{\sigma^z \otimes \theta \sigma^+} = \mathbf{1} + \theta \sigma^z \otimes \sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $\sigma^z, \sigma^\pm = (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$ – сигма-матрицы Паули.

Следовательно, R -матрица твистованного янгиана $\mathcal{Y}_\theta(sl(2))$ имеет вид [9]

$$R^{(j)}(\lambda) = F_{21}R_{12}(\lambda)F_{12}^{-1} = \lambda R^{(j)} + \eta \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \lambda + \eta & -\lambda\theta & \lambda\theta & \lambda\theta^2 \\ 0 & \lambda & \eta & -\lambda\theta \\ 0 & \eta & \lambda & \lambda\theta \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + \eta \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где $F_{21} = \mathcal{P}F_{12}\mathcal{P}$. Эта R -матрица также является решением уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}(\lambda - \mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda - \mu). \quad (2.7)$$

Твист не влияет на свойство унитарности R -матрицы

$$R_{12}(\lambda)R_{21}(-\lambda) = g(\lambda) \quad (2.8)$$

с $g(\lambda) = (-\lambda^2 + \eta^2)$, однако нарушается PT -симметрия:

$$R_{21}(\lambda) \neq R_{12}(\lambda)^{t_1 t_2}. \quad (2.9)$$

Здесь $R_{21}(\lambda) = \mathcal{P}R_{12}(\lambda)\mathcal{P}$, а индексы t_1, t_2 означают транспонирование в первом и втором пространстве тензорного произведения $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ соответственно. Преобразованная R -матрица также не имеет кроссинг-симметрии, однако удовлетворяет более слабому условию

$$\left\{ \left\{ \left\{ R_{12}(\lambda)^{t_2} \right\}^{-1} \right\}^{t_2} \right\}^{-1} = \frac{g(\lambda + \eta)}{g(\lambda + 2\eta)} M_2 R_{12}(\lambda + 2\eta) M_2^{-1} \quad (2.10)$$

с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Отметим, что более общая матрица

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

коммутирует с R -матрицей

$$[\widetilde{M} \otimes \widetilde{M}, R(\lambda)] = 0. \quad (2.13)$$

В качестве замечания общего характера отметим, что для наших целей достаточно существования матрицы $\{\{\{R_{12}(\lambda)^{t_2}\}^{-1}\}^{t_2}\}^{-1}$. Тот факт, что эта матрица может быть записана в виде (2.10), лишь позволит нам установить взаимно однозначное соответствие между решениями $K^-(\lambda)$ и $K^+(\lambda)$ уравнения отражения и дуального уравнения, как будет показано далее.

Способ введения непериодических граничных условий, совместимых с интегрируемостью основной модели, был разработан в работе [15]. Граничные условия в левом и правом узлах системы будут закодированы в соответствующих матрицах отражения K^- и K^+ . Условие согласованности между внутренней областью и границей системы имеет вид так называемого уравнения отражения [17], [18]. Для матрицы отражения в левом узле оно записывается в форме

$$R_{12}(\lambda - \mu)K_1^-(\lambda)R_{21}(\lambda + \mu)K_2^-(\mu) = K_2^-(\mu)R_{12}(\lambda + \mu)K_1^-(\lambda)R_{21}(\lambda - \mu). \quad (2.14)$$

Согласованность в правом узле модели выражается следующим дуальным уравнением отражения [15], [19]–[21]:

$$A_{12}(\lambda - \mu)K_1^{+t}(\lambda)B_{12}(\lambda + \mu)K_2^{+t}(\mu) = K_2^{+t}(\mu)C_{12}(\lambda + \mu)K_1^{+t}(\lambda)D_{12}(\lambda - \mu), \quad (2.15)$$

где матрицы A , B , C , D получаются из R -матрицы уравнения отражения (2.14):

$$A_{12}(\lambda) = (R_{12}(\lambda)^{t_{12}})^{-1} = D_{21}(\lambda), \quad (2.16)$$

$$B_{12}(\lambda) = ((R_{21}^{t_1}(\lambda))^{-1})^{t_2} = C_{21}(\lambda), \quad (2.17)$$

или в явном виде

$$A(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 - \eta^2} \begin{pmatrix} \lambda - \eta & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\theta & \lambda & -\eta & 0 \\ -\lambda\theta & -\eta & \lambda & 0 \\ \lambda\theta^2 & \lambda\theta & -\lambda\theta & \lambda - \eta \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda + 2\eta)} \begin{pmatrix} \lambda + \eta & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda\theta & \lambda + 2\eta & -\eta & 0 \\ \lambda\theta & -\eta & \lambda + 2\eta & 0 \\ -(3\lambda + 2\eta)\theta^2 & -\lambda\theta & \lambda\theta & \lambda + \eta \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Однако, используя свойство (2.10), дуальное уравнение отражения (2.15) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} R_{12}(-\lambda + \mu)K_1^+(\lambda)M_2R_{21}(-\lambda - \mu - 2\eta)M_2^{-1}K_2^+(\mu) = \\ = K_2^+(\mu)M_1R_{12}(-\lambda - \mu - 2\eta)M_1^{-1}K_1^+(\lambda)R_{21}(-\lambda + \mu). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Можно проверить, что отображение

$$K^+(\lambda) = K^-(-\lambda - \eta)M \quad (2.21)$$

является биекцией между решениями уравнения отражения и дуального уравнения.

Классификация решений получена согласно стандартному, хотя и несколько утомительному подходу.

Прежде всего отметим, что, очевидно, если $K(\lambda)$ – решение этого уравнения, то таковым является и $f(\lambda)K(\lambda)$. Мы используем эту свободу, фиксируя элемент $k_{11}(\lambda) = 1$ (можно легко проверить, что, полагая $k_{11}(\lambda) = 0$, мы получаем необратимое решение ранга 1). Ищем общее решение в виде

$$K^-(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & k_{12}(\lambda) \\ k_{21}(\lambda) & k_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Подставляя эту K -матрицу в уравнение (2.14) и записывая уравнения для матричных элементов, замечаем, что, сложив элементы 21 и 31 получившегося матричного уравнения, получаем

$$k_{21}(\lambda)(k_{22}(\mu) - 1) = k_{21}(\mu)(k_{22}(\lambda) - 1). \quad (2.23)$$

Это функциональное уравнение вида

$$f(\lambda)g(\mu) = f(\mu)g(\lambda). \quad (2.24)$$

Напомним его общее решение. Очевидно, что уравнение выполнено, если одна из функций тождественно равна нулю. Если одна из функций не равна тождественно нулю, то они пропорциональны.

В соответствии с этим решение (2.23) распадается на два случая:

- 1) $k_{22}(\lambda) = \phi k_{21}(\lambda) + 1$, $\phi \in \mathbb{C}$;
- 2) $k_{21}(\lambda) = 0$.

Начнем со случая 1 и сделаем замену $k_{22}(\lambda) = \phi k_{21}(\lambda) + 1$. Тогда элемент 21 уравнения (2.14) дает

$$k_{21}(\lambda)(2\eta\mu + \eta\phi\mu k_{21}(\mu) + 2\theta\mu^2 k_{21}(\mu)) = k_{21}(\mu)(2\eta\lambda + \eta\phi\lambda k_{21}(\lambda) + 2\theta\lambda^2 k_{21}(\lambda)), \quad (2.25)$$

что является алгебраическим уравнением для $k_{21}(\lambda)$:

$$k_{21}(\lambda) = \frac{2\eta\lambda}{\xi - \eta\phi\lambda - 2\theta\lambda^2}, \quad (2.26)$$

где $\xi \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная.

Таким образом, мы получили выражения двух матричных элементов:

$$k_{22}(\lambda) = 1 + \frac{2\phi\eta\lambda}{\xi - \eta\phi\lambda - 2\theta\lambda^2}. \quad (2.27)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.14), мы получаем уравнение для $k_{12}(\lambda)$:

$$\lambda k_{12}(\mu)(\xi - (\eta\phi + 2\theta\mu)\mu) = \mu k_{12}(\lambda)(\xi - (\eta\phi + 2\theta\lambda)\lambda), \quad (2.28)$$

решением которого является

$$k_{12}(\lambda) = \frac{\psi\lambda}{\xi - \eta\phi\lambda - 2\theta\lambda^2} \quad (2.29)$$

с произвольной постоянной $\psi \in \mathbb{C}$.

Вернемся теперь к случаю 2, где $k_{21}(\lambda) = 0$. Подстановка этого предположения в уравнение (2.14) ведет к уравнению

$$\lambda(1 + k_{22}(\lambda))(k_{22}(\mu) - 1) = \mu(1 + k_{22}(\mu))(k_{22}(\lambda) - 1). \quad (2.30)$$

Не умаляя общности, можно предположить, что $k_{22} \neq 1$. Тогда общее решение зависит от одного произвольного параметра ξ :

$$k_{22}(\lambda) = \frac{\xi + \lambda}{\xi - \lambda}. \quad (2.31)$$

Подстановка этого выражения в уравнение отражения ведет к соотношению

$$\lambda k_{12}(\mu)(\mu - \xi) - \mu k_{12}(\lambda)(\lambda - \xi) = 0, \quad (2.32)$$

решение которого зависит от одной произвольной постоянной ψ :

$$k_{12}(\lambda) = \frac{\psi\lambda}{\xi - \lambda}. \quad (2.33)$$

Таким образом, мы выделили два семейства матриц отражения, совместимых с жордановой R -матрицей основной модели. Первое семейство зависит от трех произвольных параметров:

$$K^-(\lambda, \psi, \phi, \xi) = \begin{pmatrix} \xi - \phi\eta\lambda - 2\theta\lambda^2 & \psi\lambda \\ 2\eta\lambda & \xi + \phi\eta\lambda - 2\theta\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

второе – от двух:

$$K^-(\lambda, \psi, \xi) = \begin{pmatrix} \xi - \lambda & \psi\lambda \\ 0 & \xi + \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Полученная форма решений может быть преобразована после скейлинга и переопределения параметров в одно семейство более привычного вида, который напоминает общий вид ХХХ-решения:

$$\begin{aligned} K^-(\lambda, \xi_-, \phi_-, \psi_-) &= K_{XX}^-(\lambda, \xi_-, \phi_-, \psi_-) - \phi_- \theta \lambda^2 \mathbf{1} = \\ &= \begin{pmatrix} \xi_- - \lambda - \phi_- \theta \lambda^2 & \psi_- \lambda \\ \eta \phi_- \lambda & \xi_- + \lambda - \phi_- \theta \lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Как упоминалось ранее, из-за соотношения (2.10) общее решение дуального уравнения получается посредством биекции (2.21):

$$K^+(\lambda, \xi_+, \phi_+, \psi_+) = K^-(-\lambda - \eta, \xi_+, \phi_+, \psi_+)M. \quad (2.37)$$

Многие соотношения XXZ -спиновой цепочки можно получить из XXZ -модели простым скейлингом, т. е. вырождением тригонометрических функций в рациональные. Известно, что жорданова деформация XXZ -цепочки также может быть получена в скейлинговом пределе с дополнительным (сингулярным) преобразованием подобия XXZ -модели [9]. Для этого начнем с R -матрицы, связанной с квантовой алгеброй $U_q(sl(2))$:

$$\check{R}(u, q) = u\check{R}(q) - \frac{1}{u}\check{R}^{-1}(q), \quad \check{R}(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \omega(q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где мы используем мультипликативный параметр $u = e^\lambda$ в уравнении Янга–Бакстера (2.7) и в уравнении отражения (2.14). После преобразования

$$\check{R}(u, q) \rightarrow \text{Ad } J(x) \otimes J(x)\check{R}(u, q) \quad (2.39)$$

с (2×2) -матрицей

$$J(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

рассмотрим скейлинговый предел

$$u = e^{\epsilon\lambda}, \quad q = e^{\epsilon\eta}, \quad x = \frac{\theta}{\eta\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.41)$$

Предел преобразованной R -матрицы (2.39) пропорционален R -матрице твистованного янгiana $\mathcal{Y}_\theta((2))$ [13]:

$$\check{R}(\lambda, \eta, \theta) = \lambda\check{R}^{(j)}(\theta) + \eta\mathbf{1}, \quad (2.42)$$

и, следовательно, дает деформированную XXZ -модель [9], [14].

Интересуясь решением уравнения отражения (2.14), естественно применить этот скейлинг также и к матрице K . Хотя K -матрица для XXZ -модели хорошо известна [22]–[24], решение, соответствующее R -матрице $\check{R}(u, q)$, отлично от этой матрицы (см. работы [25], [26])

$$K(u) = \begin{pmatrix} f + u^2a & (u^2 - u^{-2})b \\ (u^2 - u^{-2})c & f + u^{-2}a \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

с произвольными параметрами a, b, c, f . Чтобы получить конечное решение после сингулярного преобразования с матрицей (2.40)

$$K(u) \rightarrow \text{Ad } J(x)K(u), \quad (2.44)$$

нужно преобразовать параметры следующим образом:

$$f = -a + \epsilon\zeta, \quad c = \eta\epsilon c_0, \quad b = \frac{\theta}{\eta\epsilon}(a + \theta c_0) + b_0. \quad (2.45)$$

Тогда предельное решение равно

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \zeta + 2\lambda(a + 2\theta c_0) & 4\lambda b_0 \\ 0 & \zeta - 2\lambda(a + 2\theta c_0) \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Сравнивая его с найденным ранее решением (2.34), можно заметить, что отсутствуют еще три члена. Однако скейлинговый подход позволяет заключить, что в этом случае спектр деформированной модели с (редуцированной) K -матрицей (2.46) совпадает со спектром соответствующей недеформированной ХХХ-модели.

Чтобы получить полную K -матрицу (2.36), нужно использовать следующий скейлинг:

$$f = -a + \epsilon\zeta, \quad a = a_0 - \frac{2\theta c}{\eta\epsilon}, \quad b = b_0 + \frac{\theta}{\eta\epsilon}\left(a_0 - \frac{\theta}{\eta\epsilon}c\right), \quad (2.47)$$

а также рассматривать три первых слагаемых разложения $u = e^{\epsilon\lambda}$. В результате получаем

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \zeta + 2a_0\lambda - (4\theta c/\eta)\lambda^2 & 4b_0\lambda \\ 4c\lambda & \zeta - 2a_0\lambda - (4\theta c/\eta)\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

в качестве предельной K -матрицы. Очевидно, что две K -матрицы (2.36) и (2.48) совпадают, если $\zeta = \xi_-$, $2a_0 = -1$, $4c = \eta\phi_-$, $4b_0 = \psi_-$.

3. КОНСТРУКЦИЯ ОТКРЫТЫХ СПИНОВЫХ ЦЕПОЧЕК

Для построения деформируемых интегрируемых открытых спиновых цепочек мы следуем методу, предложенному Складниным [15]. Используя два произвольных решения $K^-(\lambda)$, $K^+(\lambda)$ уравнений отражения (2.14), (2.20), мы получим трансфер-матрицу открытой цепочки

$$t(\lambda) = \text{tr}_0 K_0^+(\lambda) T_0(\lambda) K_0^-(\lambda) \widehat{T}_0(\lambda), \quad (3.1)$$

где матрицы монодромии даются формулами

$$T_0(\lambda) = R_{0N}(u) \dots R_{01}(\lambda), \quad \widehat{T}_0(\lambda) = R_{10}(\lambda) \dots R_{N0}(\lambda). \quad (3.2)$$

Индекс “0” обозначает вспомогательное пространство $\mathbb{C}^2$, в то время как индексы $j = 1, 2, \dots, N$ обозначают пространства спина $1/2$ в узлах цепочки.

Трансфер-матрицы при различных значениях спектрального параметра коммутируют друг с другом:

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0, \quad (3.3)$$

и гамильтониан открытой спиновой цепочки можно получить из $t'(0) = dt(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$. Нормируя матрицу $K^-(0) = 1$, мы записываем производную трансфер-матрицы в виде (все аргументы равны нулю)

$$t'(0) \propto (tr_0 K_0^{+'}) + (tr_0 K_0^+) K_1^{-'} + \frac{2}{\eta} tr_0 (K_0^+ \check{R}'_{N0}) + \frac{2}{\eta} tr_0 K_0^+ \sum_{j=1}^{N-1} \check{R}'_{j,j+1}. \quad (3.4)$$

Отсюда извлекается гамильтониан [15]

$$H = \sum_{j=1}^{N-1} \check{R}'_{j,j+1} + \frac{tr_0 K_0^{+'} \check{R}'_{N0}}{tr_0 K_0^+} + \frac{\eta}{2} K_1^{-'}. \quad (3.5)$$

После подстановки в это выражение граничных матриц общего вида получаем следующий гамильтониан открытой цепочки:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + \theta (\sigma_j^+ - \sigma_{j+1}^+) + \theta^2 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \\ & + \frac{\eta}{2} (-\sigma_1^z + \psi_- \sigma_1^+ + \phi_- \sigma_1^-) + \\ & + \frac{\eta}{2\xi_+} ((1 - \theta\psi_+) \sigma_N^z - (\theta(2 - \theta\phi_+) + \psi_+) \sigma_N^+ - \phi_+ \sigma_N^-). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Этот гамильтониан имеет набор граничных параметров общего типа, совместимый со свойством интегрируемости $XX\bar{X}_\theta$ -модели во внутренней области.

Благодаря преобразованиям подобия (2.39) и (2.44) основных объектов КМОЗ условия квантования (уравнения Бете) и спектр периодического гамильтониана не изменяются. Следовательно, после перехода к пределу в рациональной $XX\bar{X}$ -модели спектр периодической деформируемой модели не изменится. Однако это неверно для соответствующих собственных векторов, часть из которых преобразуется в присоединенные векторы.

Полученная матрица отражения (2.36) может быть преобразована к диагональной форме. Ее собственные значения равны

$$\epsilon_{1,2}(\lambda) = \xi - \phi_- \theta \lambda^2 \pm \lambda \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad \gamma^2 = \eta \psi_- \phi_-, \quad (3.7)$$

а матрица соответствующих собственных векторов не зависит от λ :

$$K(\lambda)U = U \operatorname{diag}(\epsilon_1(\lambda), \epsilon_2(\lambda)), \quad (3.8)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ (x+1)/\psi_- & (x-1)/\psi_- \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где $x = \sqrt{1 + \gamma^2}$. Однако метод, использованный, например, в работе [27] для получения уравнений Бете, определяющих параметры собственных векторов спинного

гамильтониана, не применим в случае деформируемой модели. Даже постоянная матрица K^+ равна не единице, а треугольной матрице M (2.11), и R -матрица не является $SL(2)$ -инвариантной.

Спектр деформированной модели со свободными концами и постоянными матрицами отражения $K^-(\lambda) = 1$ и $K^+(\lambda) = M$ совпадает со спектром ХХХ-спиновой цепочки со свободными концами в силу связи соответствующих гамильтонианов преобразованием подобия.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели ХХХ-спиновую цепочку с непериодическими граничными условиями, деформируемую посредством жорданова твиста. Найденные решения $K^\pm(\lambda)$ уравнения отражения и дуального уравнения с жордановой R -матрицей оказались явно зависящими от параметра деформации θ . Решение $K^+(\lambda)$ дуального уравнения получено с помощью обобщенной кроссинг-симметрии жордановой R -матрицы и соотношения $K^+(\lambda) = K^-(-\lambda - \eta)M(\theta)$. Таким образом, получена трансфер-матрица модели, производящая функцию интегралов движения. Явно выписан гамильтониан открытой спиновой цепочки с граничными членами общего вида в первом и последнем узлах цепочки. Используя эти матрицы отражения, можно исследовать граничную алгебру и возможные симметрии модели.

Благодарности. Эта работа была поддержана грантами РФФИ 07-02-92166-НЗНИ_а, 09-01-00504 и FCT-проектом РТДС/МАТ/69635/20006, РТДС/МАТ/099880/2008.

Список литературы

- [1] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [2] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [3] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries Quantiques*, eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219; [arXiv: hep-th/9605187](https://arxiv.org/abs/hep-th/9605187).
- [4] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories*, Lecture Notes in Phys., **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin–New York, 1982, 61–119.
- [5] В. Г. Дринфельд, “Квантовые группы”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. 8, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **155**, ред. Л. Д. Фаддеев, Наука, Л., 1986, 18–49; V. G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proc. Intern. Congress Math.*, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [6] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**:1 (1985), 63–69.
- [7] В. Г. Дринфельд, *Алгебра и анализ*, **1**:6 (1989), 114–148.
- [8] P. P. Kulish, “Twisting of quantum groups and integrable systems”, *Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years After NEEDS ’79* (Gallipoli, 1999), eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari, G. Soliani, World Sci., Singapore, 2000, 304–310.
- [9] P. P. Kulish, A. A. Stolin, *Czech. J. Phys.*, **47**:12 (1997), 1207–1212.
- [10] M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, S. D. Schack, “Quantum symmetry”, *Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1510**, ed. P. P. Kulish, Springer, Berlin, 1992, 9–46.

- [11] O. V. Ogievetsky, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), Suppl. no 37 (1993), 185–199; Preprint MPI-Ph/92-99, Munich, 1992.
- [12] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, A. I. Mudrov, *J. Math. Phys.*, **40**:9 (1999), 4569–4586; [arXiv: math/9806014](#).
- [13] S. M. Khoroshkin, A. A. Stolin, V. N. Tolstoy, *Comm. Algebra*, **26**:4 (1998), 1041–1055.
- [14] M. Henkel, “Reaction-diffusion processes and their connection with integrable quantum spin chains”, *Classical and Quantum Nonlinear Integrable Systems: Theory and Applications*, ed. A. Kundu, Institute of Physics, Bristol, 2003, 256–287; [arXiv: cond-mat/0303512](#).
- [15] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **21**:10 (1988), 2375–2389.
- [16] V. Chari, A. N. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [17] И. В. Чередник, *ТМФ*, **61**:1 (1984), 35–44.
- [18] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **25**:22 (1992), 5963–5975.
- [19] L. Freidel, J.-M. Maillet, *Phys. Lett. B*, **262**:2–3 (1991), 278–284.
- [20] P. P. Kulish, R. Sasaki, *Progr. Theoret. Phys.*, **89**:3 (1993), 741–761.
- [21] Z. Nagy, J. Avan, A. Doikou, G. Rollet, *J. Math. Phys.*, **46**:8 (2005), 083516.
- [22] S. Ghoshal, A. B. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:21 (1994), 3841–3885.
- [23] T. Inami, H. Konno, *J. Phys. A*, **27**:24 (1994), L913–L918.
- [24] H. J. de Vega, A. González-Ruiz, *J. Phys. A*, **27**:18 (1994), 6129–6137.
- [25] A. Doikou, *Nucl. Phys. B*, **725**:3 (2005), 493–530; [arXiv: math-ph/0409060](#).
- [26] P. P. Kulish, A. I. Mudrov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 151–170.
- [27] D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat, E. Ragoucy, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2004**:8 (2004), 08005.

Поступила в редакцию 11.11.2009