Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Кандельпергер, Т. Гранду, О перенормировочных рядах некоторых интегральных уравнений, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 299–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:58:15

© 2010 г.

Б. Кандельпергер*, Т. Гранду†

О ПЕРЕНОРМИРОВОЧНЫХ РЯДАХ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются интегральные уравнения, для которых разложение в ряд теории возмущений приводит к степенным рядам по параметру h с коэффициентами, заданными расходящимися интегралами. К последним применяется процедура вычитаний с помощью введения перенормировочного $Z(t, h)$ -ряда в схеме минимальных вычитаний. Исследуется вопрос о сходимости формального ряда для Z в связи с ядрами интегральных уравнений. Найдена связь этого перенормировочного ряда со степенным рядом обратного преобразования Лагранжа, равно как и другие соотношения.

Ключевые слова: перенормировка, расходящийся интеграл, формула обращения Лагранжа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x, h) = 1 + h \int_0^{+\infty} \frac{f(y, h)}{y + x} dy$$

при $x > 0$. Если попробовать построить решение этого уравнения в виде ряда теории возмущений по параметру h , записав $f(x, h) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n f_n(x)$, то в результате естественным образом получится ряд из расходящихся интегралов

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{1}{y_n + y_{n-1}} \frac{1}{y_{n-1} + y_{n-2}} \cdots \frac{1}{y_1 + x} dy_1 \cdots dy_n,$$

расходимости в которых могут быть устранены с помощью некоторой процедуры регуляризации. Для этого можно начать рассмотрение с регуляризованного интегрального выражения

$$f(x, t, h) = 1 + h \int_0^{+\infty} f(y, t, h) \frac{y^{-t}}{y + x} dy, \quad \operatorname{Re} t > 0. \quad (1.1)$$

*Laboratoire J. Dieudonné, Université de Nice, Nice, France.
E-mail: Bernard.Candelpergher@unice.fr

†Institut Non Linéaire de Nice, Valbonne, France. E-mail: Thierry.Grandou@inln.cnrs.fr

Это уравнение задает модельную ситуацию, которая сходна со структурами, обычно возникающими в большинстве моделей квантовой теории поля (КТП) и связанных с ними моделях [1], [2]. Записав

$$b(t) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{-t}}{y+1} dy = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}, \quad (1.2)$$

получим, что разложение в ряд теории возмущений для решения интегрального уравнения (1.1), имеющего вид

$$f(x, t, h) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n f_n(x, t),$$

дает

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= \int_0^{+\infty} \frac{y^{-t}}{y+x} dy = b(t)x^{-t}, \\ f_2(x, t) &= \int_0^{+\infty} b(t)y^{-t} \frac{y^{-t}}{y+x} dy = b(2t)b(t)x^{-2t}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

так что по индукции получим

$$f_n(x, t) = A_n(t)x^{-nt}, \quad A_n(t) = b(t)b(2t) \dots b(nt). \quad (1.4)$$

При $t \rightarrow 0$ в членах f_n появляются полюсы старших порядков, которые можно устранить с помощью схемы минимальных вычитаний (МВ). Уравнение (1.1) при этом принимает перенормированный вид

$$f^R(x, t, h) = 1 + h \int_0^{+\infty} f^R(y, t, h) \frac{y^{-t}}{y+x} dy - Z(x, t, h), \quad (1.5)$$

где $Z(x, t, h) = \sum_{n \geq 1} h^n Z_n(x, t)$.

Записав $f^R(x, t, h) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n f_n^R(x, t)$, получим

$$f_n^R(x, t) = \int_0^{+\infty} f_{n-1}^R(y, t) \frac{y^{-t}}{y+x} dy - Z_n(x, t). \quad (1.6)$$

При $n = 1$ это выражение приводит к соотношению

$$f_1^R(x, t) = -Z_1(x, t) + b(t)x^{-t}, \quad (1.7)$$

и, обозначив через $\text{sing}(g(t))$ полюсную составляющую мероморфной функции g при $t = 0$, получим в схеме МВ, что

$$Z_1(x, t) = \text{sing}(b(t)x^{-t}) = \frac{1}{t}. \quad (1.8)$$

Сходным образом

$$\begin{aligned} f_2^R(x, t) &= -Z_2(x, t) + b(t)b(2t)x^{-2t} - \frac{1}{t}b(t)x^{-t}, \\ Z_2(x, t) &= \text{sing} \left(b(t)b(2t)x^{-2t} - \frac{1}{t}b(t)x^{-t} \right) = -\frac{1}{2t^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Тем самым мы приходим к рекуррентной процедуре вычисления Z_n . Отсюда, например,

$$\begin{aligned} Z_3(x, t) &= \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{18} \frac{\pi^2}{t}, \\ Z_4(x, t) &= -\frac{1}{24t^4} - \frac{1}{18} \frac{\pi^2}{t^2}, \\ Z_5(x, t) &= \frac{1}{120t^5} + \frac{1}{36} \frac{\pi^2}{t^3} + \frac{3}{200} \frac{\pi^4}{t}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из этих первых примеров можно предположить, что $Z_n(x, t)$ не должно зависеть от x , и это на самом деле оказывается справедливым, как будет показано ниже в теореме 1. (Стоит отметить, что в контексте КТП эквивалентное утверждение формулируется как свойство независимости перенормировочных констант от массовых параметров [3], [4].)

На основе этих нескольких первых членов Z_n можно определить перенормировочные составляющие для величин $f_n(x)$, определяемые как $f_n^R(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f_n^R(x, t)$, в виде

$$\begin{aligned} f_1^R(x, 0) &= -\ln x, \\ f_2^R(x, 0) &= \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{\pi^2}{4}, \\ f_3^R(x, 0) &= -\frac{1}{6} \ln^3 x - \frac{5\pi^2}{12} \ln x, \\ f_4^R(x, 0) &= \frac{1}{24} \ln^4 x + \frac{7\pi^2}{24} \ln^2 x + \frac{5\pi^4}{32}, \\ f_5^R(x, 0) &= -\frac{1}{120} \ln^5 x - \frac{131\pi^4}{480} \ln^3 x - \frac{\pi^2}{18} \ln^3 x. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом же семействе моделей (которое вскоре будет определено) из других примеров можно заметить, что величины $Z_n(x, t)$ связаны со значениями дзета-функции Римана целочисленного аргумента $\zeta(n)$, что является возможным проявлением так называемого *мотивного* числа модели [4]. Это видно на примере регуляризованного интегрального уравнения

$$f(x, t) = h \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/y}}{y} y^{-t} f(y, t) dy + 1, \quad (1.12)$$

которое задает функции

$$f_n(x, t) = A_n(t)x^{-nt}, \quad A_n(t) = \Gamma(t)\Gamma(2t) \dots \Gamma(nt). \quad (1.13)$$

В этом случае несколько первых коэффициентов перенормировочного ряда теории возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1(x, t) &= \frac{1}{t}, \\ Z_2(x, t) &= -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2t} \gamma, \\ Z_3(x, t) &= \frac{1}{6t^3} + \frac{\gamma}{4} \frac{1}{t^3} + \left(\frac{\zeta(2)}{6} + \frac{\gamma^2}{2} \right) \frac{1}{t}, \\ Z_4(x, t) &= -\frac{1}{24t^4} - \frac{\gamma}{4} \frac{1}{t^3} - \left(\frac{5\gamma^2}{8} + \frac{\zeta(2)}{6} \right) \frac{1}{t^2} - \left(\frac{2\gamma^3}{3} + \frac{\gamma\zeta(2)}{2} + \frac{\zeta(3)}{12} \right) \frac{1}{t}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где γ – постоянная Эйлера, а соответствующие перенормированные интегралы записываются как

$$\begin{aligned} f_1^R(x, 0) &= \ln x - \gamma, \\ f_2^R(x, 0) &= \frac{1}{2} \ln^2 x - 2\gamma \ln x + \frac{1}{8} \pi^2 + \frac{7}{4} \gamma^2, \\ f_3^R(x, 0) &= \frac{1}{6} \ln^3 x - \frac{3}{2} \gamma \ln^2 x + \left(\frac{17}{4} \gamma^2 + \frac{5}{4} \zeta(2) \right) \ln x - \left(\frac{43}{12} \gamma^3 + \frac{13}{4} \gamma \zeta(2) + \frac{2}{3} \zeta(3) \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

2. ПРОЦЕСС ПЕРЕНОРМИРОВКИ МВ

Обозначим через k непрерывную функцию на $[0, +\infty[$ такую, что функция $u \mapsto k(u)u^{-t}$ интегрируема на $[0, +\infty[$ при $0 < \operatorname{Re} t < 1$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x, h) = 1 + h \int_0^{+\infty} f(y, h) \frac{1}{x} k\left(\frac{y}{x}\right) dy,$$

в котором $x > 0$. При $0 < \operatorname{Re} t < 1$ зададим соответствующее регуляризованное интегральное уравнение, записав

$$f(x, t, h) = 1 + h \int_0^{+\infty} f(y, t, h) y^{-t} \frac{1}{x} k\left(\frac{y}{x}\right) dy. \quad (2.1)$$

При $0 < \operatorname{Re} t < 1$ определим

$$b(t) = \int_0^\infty k(u) u^{-t} du \quad (2.2)$$

и будем предполагать, что функция b допускает аналитическое продолжение в окрестность точки $t = 0$, обладая при этом простым полюсом в $t = 0$, т. е. предполагается, что $b(t)$ допускает разложение в ряд Лорана:

$$b(t) = \frac{b_{-1}}{t} + \sum_{p \geq 0} b_p t^p. \quad (2.3)$$

Уравнения (2.1), (2.2) задают семейство интегральных уравнений, каждое из которых определяется заданным ядром $k(u)$, совместным с разложением (2.3).

Будем искать решение интегрального уравнения (2.1) методами теории возмущений в виде разложения

$$f(x, t, h) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n f_n(x, t),$$

получим по индукции

$$f_n(x, t) = A_n(t)x^{-nt}, \quad A_n(t) = b(t)b(2t) \dots b(nt). \quad (2.4)$$

При $t \rightarrow 0$ функции f_n явно содержат полюсы старших порядков. Эти полюсы вычитаются с помощью схемы МВ, в результате чего уравнение (2.1) принимает перенормированный вид

$$f^R(x, t, h) = 1 + h \int_0^{+\infty} f^R(y, t, h) y^{-t} \frac{1}{x} k\left(\frac{y}{x}\right) dy - Z(x, t, h), \quad (2.5)$$

где $Z(x, t, h) = \sum_{n \geq 1} h^n Z_n(x, t)$. Записав $f^R(x, t, h) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n f_n^R(x, t)$, получим

$$f_n^R(x, t) = \int_0^{+\infty} f_{n-1}^R(y, t) y^{-t} \frac{1}{x} k\left(\frac{y}{x}\right) dy - Z_n(x, t). \quad (2.6)$$

При $n = 1$ эта форма записи приводит к соотношению

$$f_1^R(x, t) = -Z_1(x, t) + b(t)x^{-t}, \quad (2.7)$$

так что

$$Z_1(x, t) = \text{sing}(b(t)x^{-t}), \quad (2.8)$$

и, похожим образом,

$$Z_n(x, t) = \text{sing}\left(\int_0^{+\infty} f_{n-1}^R(y, t) y^{-t} \frac{1}{x} k\left(\frac{y}{x}\right) dy\right). \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – функция, непрерывная на $[0, +\infty[$ и такая, что функция $u \mapsto k(u)u^{-t}$ интегрируема на $[0, +\infty[$ при $0 < \text{Re } t < 1$. Если функция

$$b(t) = \int_0^\infty k(u)u^{-t} du$$

может быть аналитически продолжена в окрестность точки $t = 0$ с простым полюсом в $t = 0$, то применение схемы МВ для перенормировки интегрального уравнения

$$f(x, h) = h \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} k\left(\frac{y}{x}\right) f(y, h) dy + 1 \quad (2.10)$$

задает перенормировочный ряд $Z(t, h) = \sum_{n \geq 1} h^n Z_n(t)$, в котором $Z_n(t)$ представляют собой многочлены степени n по переменной $1/t$, не зависящие от x . Величины $Z_n(t)$ могут быть вычислены по индукции:

$$Z_n(t) = \text{sing}\left(A_n(t) - \sum_{k=1}^{n-1} Z_{n-k}(t)A_k(t)\right), \quad (2.11)$$

где

$$A_n(t) = b(t)b(2t) \dots b(nt). \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив $Z_0 = -1$, можно по индукции получить следующие утверждения:

- 1) Z_n не зависит от x ;
- 2) $f_n^R(x, t) = -\sum_{k=0}^n Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt}$;
- 3) Z_n имеет полюсы порядка не более n при $t = 0$.

Эти утверждения очевидно справедливы при $n = 0$, и по предположению индукции будем считать, что они выполнены вплоть до порядка $n - 1$.

Так как $f_n^R(x, t) = -\sum_{k=0}^n Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt}$, в соответствии с формулой (2.6) имеем

$$\begin{aligned} f_n^R(x, t) &= -Z_n(t) - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t)A_k(t)y^{-kt} \right) y^{-t} k \left(\frac{y}{x} \right) \frac{1}{x} dy = \\ &= -Z_n(t) - \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-(1+k)}(t)A_k(t)b((k+1)t)x^{-(k+1)t} = \\ &= -Z_n(t) - \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-(k+1)}(t)A_{k+1}(t)x^{-(k+1)t} = \\ &= -Z_n(t) - \sum_{k=1}^n Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt} \end{aligned} \quad (2.13)$$

и, таким образом,

$$f_n^R(x, t) = -\sum_{k=0}^n Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt}. \quad (2.14)$$

Функция Z_n имеет полюсы порядка не более n при $t = 0$, поэтому

$$-Z_n(t) = +\sum_{k=1}^n Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt} + f_n^R(x, t), \quad (2.15)$$

где $f_n^R(x, t)$ регулярны в точке $t = 0$ при всех x . Тогда в схеме МВ получаем

$$Z_n(t) = -\text{sing} \left(\sum_{k=1}^n Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt} \right). \quad (2.16)$$

По предположению индукции при всех $n-k \leq n-1$ величины $Z_{n-k}(t)$ имеют полюсы порядка не более $n-k$ в точке $t = 0$. Величины $A_k(t)$ при этом имеют полюсы порядка не более k в точке $t = 0$, а величины $Z_n(t)$ – полюсы порядка не более n в $t = 0$.

Так как Z_n не зависит от x , имеем

$$Z_n(t) = -\text{sing} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t)A_{k+1}(t)x^{-(k+1)t} \right). \quad (2.17)$$

Поскольку $A_{k+1} = b((k+1)t)A_k$, получим

$$Z_n(t) = -\text{sing} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t)A_k(t)b((k+1)t)x^{-(k+1)t} \right). \quad (2.18)$$

В окрестности точки $t = 0$ функция $b(t)$ допускает лорановское разложение (2.3), и, таким образом, член $b((k+1)t)x^{-(k+1)t}$ можно разложить в ряд:

$$b((k+1)t)x^{-(k+1)t} = \sum_{m \geq -1} \alpha_m(x)(k+1)^m t^m, \quad (2.19)$$

где

$$\alpha_m(x) = \sum_{p+l=m} b_p \frac{(-1)^l}{l!} (\ln x)^l. \quad (2.20)$$

Поскольку произведения $Z_{n-1-k}A_k$ имеют полюсы порядка не более $n-1$ в точке $t = 0$, можно записать (обозначив $\alpha_{-1}(x) = b_{-1}$)

$$\begin{aligned} Z_n(t) = & -\operatorname{sing} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) \frac{1}{(k+1)t} \right) - \\ & -\operatorname{sing} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) \left[\sum_{m=0}^{n-2} \alpha_m(x)(k+1)^m t^m \right] \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как по предположению Z_{n-1-k} не зависят от x при $k = 0, \dots, n-1$, то это же свойство имеет место для первого члена в правой части выражения (2.21). Докажем теперь следующее утверждение:

$$-\operatorname{sing} \left(\sum_{m=0}^{n-2} \alpha_m(x) \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) (k+1)^m t^m \right) = 0. \quad (2.22)$$

Оно выполняется в силу следующей леммы.

ЛЕММА. При всех $m \geq 0$ имеем

$$\operatorname{sing} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) (k+1)^m t^m \right) = 0. \quad (2.23)$$

По предположению индукции имеем, что

$$f_{n-1}^R(t) = - \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) x^{-kt} \quad (2.24)$$

регулярна при $t = 0$ для всех x . Таким образом, опять-таки при всех x выполнено соотношение

$$0 = \operatorname{sing}(f_{n-1}^R) = \operatorname{sing} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) \left(\sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m k^m t^m (\ln x)^m}{m!} \right). \quad (2.25)$$

Это выражение представляет собой многочлен от $\ln x$, тождественно равный нулю при всех x . Тем самым все его коэффициенты обращаются в нуль, и

$$\operatorname{sing} \left(t^m \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t) A_k(t) k^m \right) = 0 \quad (2.26)$$

при всех $m = 0, \dots, n-2$, а потому и при всех $m \geq 0$, так как при $t = 0$ произведение $Z_{n-1-k}A_k$ допускает полюсы порядка не более $n-1$.

Наконец, лемма выполняется в силу справедливости тождества

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t)A_k(t)(k+1)^m t^m &= \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t)A_k(t) \sum_{i=0}^m C_m^i k^i t^i t^{m-i} = \\ &= \sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-1-k}(t)A_k(t)k^i t^i \right) C_m^i t^{m-i}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Теорема доказана.

Из вышеприведенных соображений также следует, что коэффициент

$$Z_n(t) = -\text{sing} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t)A_{n-k}(t) \right) \quad (2.28)$$

ввиду (2.16) представляет собой выражение (2.11), взятое в точке $x = 1$.

СЛЕДСТВИЕ. В схеме перенормировки МВ расходящиеся интегралы

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} k \left(\frac{y_n}{y_{n-1}} \right) \frac{1}{y_{n-1}} \dots k \left(\frac{y_1}{x} \right) \frac{1}{x} dy_1 \dots dy_n$$

имеют перенормировочные члены, определяемые как

$$f_n^R(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(A_n(t)x^{-nt} - \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt} \right) \quad (2.29)$$

и имеющие вид $f_n^R(x, 0) = P_n(\ln x)$, где P_n суть многочлены степени n .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из выражения (2.14) имеем

$$f_n^R(x, t) = A_n(t)x^{-nt} - \sum_{k=0}^{n-1} Z_{n-k}(t)A_k(t)x^{-kt} \quad (2.30)$$

и, производя формальное суммирование, получаем

$$\begin{aligned} f^R(x, t) &= \sum_{n \geq 0} h^n f_n^R(x, t) = \sum_{n \geq 0} h^n A_n(t)x^{-nt} - \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} h^k A_k(t)x^{-kt} h^{n-k} Z_{n-k}(t) = \\ &= \sum_{n \geq 0} h^n A_n(t)x^{-nt} - \sum_{n \geq 0} h^n A_n(t)x^{-nt} \sum_{n \geq 1} h^n Z_n(t), \end{aligned} \quad (2.31)$$

или в очевидных обозначениях

$$f^R(x, t, h) = (1 - Z(t, h))f(x, t, h). \quad (2.32)$$

Процедура перенормировки при этом сведется к умножению перенормированного формального ряда на перенормировочный ряд Z (это обычная процедура в пертурбативной КТП).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Может показаться странным, что доказательство независимости $Z_n(x, t)$ от “параметра массы” x потребовало столь длительных рассуждений. На самом деле можно найти разницу между $Z_n(x, t)$ и $Z_n(1, t)$ при произвольном $x > 0$ и $x \neq 1$, записав

$$\begin{aligned} Z_n(x, t) - Z_n(1, t) &= \text{sing} \left(\int_0^{+\infty} dy f_{n-1}^R(y, t) y^{-t} \left(\frac{1}{y+x} - \frac{1}{y+1} \right) \right) = \\ &= (1-x) \text{sing} \left(\int_0^{+\infty} dy f_{n-1}^R(y, t) \frac{y^{-t}}{(y+x)(y+1)} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

После этого можно использовать тот факт, что f_{n-1} регулярны (при $t = 0$) и интегрируемы, и получить

$$\text{sing} \left(\int_0^{+\infty} dy f_{n-1}^R(y, t) \frac{y^{-t}}{(y+x)(y+1)} \right) = 0, \quad (2.34)$$

откуда уже можно заключить, что $Z_n(x, t)$ в свою очередь не зависят от x . Но, несмотря на интуитивную значимость этого рассуждения, нам не удалось подкрепить его достаточно строгими вычислениями. Напротив, можно привести контрпример, показывающий, насколько эти операции могут быть неправомерными.

Пусть m представляет собой функцию от t , определенную следующим образом:

$$m: t \mapsto m(t) = \int_0^{+\infty} dy \frac{\sin(ty) + e^{-y}}{(1+ty)^2}. \quad (2.35)$$

Она задана при всех $t \geq 0$ в силу того, что $m(0) = 1$, в то время как при $t > 0$ имеем

$$m(t) = \frac{C}{t} + \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-y}}{(1+ty)^2}, \quad (2.36)$$

где C – строго положительная постоянная, задаваемая выражением

$$C = \int_0^{+\infty} dy \frac{\sin y}{(1+y)^2} = 0.3433779610. \quad (2.37)$$

В формуле (2.36) второй член в правой части задает функцию от t , которая регулярна в точке $t = 0$, что можно легко доказать с помощью *теоремы об ограничении сверху сходящимся рядом*; это завершает построение контрпримера.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно рассмотреть функции $Z_n(t)$, полученные в разделе 2, с вычислительной точки зрения. Например, записав

$$Z_n(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{Z_n^{(k)}}{t^k}, \quad (2.38)$$

можно перейти к численному анализу коэффициентов $Z_n^{(k)}$ и определить радиус сходимости конечных сумм $\sum_{n \geq 1} h^n Z_n^{(k)}$. При $k = 1$ получим ряд по нечетным слагаемым $\sum_{n \geq 1} Z_{2n+1}^{(1)} h^{2n+1}$. Применяя алгоритм сходимости к частным $Z_{2n+1}^{(1)} / Z_{2n-1}^{(1)}$, получим, что это частное стремится к предельному значению 9.86960439, что даст для ряда $\sum_{n \geq 1} h^{2n+1} Z_{2n+1}^{(1)}$ радиус сходимости $R^{(1)} \simeq 1/\sqrt{9.86960439} = 1/3.1416$. Тем самым радиус сходимости этого частного ряда равен $1/\pi$. Заметим, что это утверждение получит неожиданную поддержку в разделе 4.

3. ОБРАТНЫЙ РЯД ЛАГРАНЖА КАК ПЕРЕНОРМИРОВОЧНЫЙ РЯД

Как мы только что показали, $Z_n(t)$ -ряд полностью определяется $A_n(t)$ -рядом. Отсюда можно ожидать, что нашу задачу можно переформулировать в чисто алгебраическом виде.

Пусть задан рассмотренный выше $A_n(t)$ -ряд; в рамках схемы МВ будем искать $Z_n(t)$ -ряд такой, что функция

$$f_n^R(t) = A_n(t) - \sum_{k=1}^{n-1} Z_{n-k}(t)A_k(t) - Z_n(t)$$

аналитична при $t = 0$, и это эквивалентно тому, что разложение в ряд теории возмущений для

$$\left(1 - \sum_{n \geq 1} h^n Z_n(t)\right) \left(1 + \sum_{n \geq 1} h^n A_n(t)\right)$$

должно иметь вид $f^R(t, h) = 1 + \sum_{n \geq 1} h^n f_n^R(t)$ с коэффициентами $f_n^R(t)$, которые в свою очередь аналитичны при $t = 0$. Определив

$$c(t, h) = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} h^n A_n(t)} = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} h^n b(t)b(2t) \dots b(nt)},$$

алгебраическую постановку задачи можно представить в виде уравнения

$$f^R(t, h) = c(t, h)f^R(t, h) + 1 - Z(t, h),$$

где $Z(t, h) = \sum_{n \geq 1} h^n Z_n(t)$. Введем теперь *упрощенную алгебраическую модель*, получаемую при приведении $c(t, h)$ к функции

$$c(t, h) \rightarrow 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} h^n (b(t))^n} = hb(t).$$

Можно записать $b(t) = a(t)/t$, где функция $a(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ при $a_0 \neq 0$ аналитична в окрестности V точки 0 и рассмотреть уравнение

$$f^R(t, h) = h \frac{1}{t} a(t) f^R(t, h) + 1 - Z(t, h). \quad (3.1)$$

Решения (3.1) теперь можно искать в виде формального ряда

$$f^R(t, h) = \sum_{n \geq 0} f_n^R(t) h^n, \quad Z(t, h) = \sum_{n \geq 1} Z_n(t) h^n, \quad (3.2)$$

коэффициенты которого $f_n^R(t)$ предполагаются аналитическими функциями в точке $t = 0$. Налагая это ограничение на f_n^R , получим

$$f_{n+1}^R(t) = \frac{1}{t} a(t) f_n^R(t) - Z_{n+1}(t), \quad (3.3)$$

а полученные таким образом $Z_n(t)$ будут иметь простой полюс в начале координат:

$$Z_n(t) = \frac{Z_n^1}{t}, \quad (3.4)$$

так что в итоге

$$\frac{Z_n^1}{t} = \text{sing} \left(\frac{a^n(t)}{t^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k(t)}{t^k} \frac{Z_{n-k}^1}{t} \right). \quad (3.5)$$

Эта структура намного проще исследованной ранее, в которой члены Z_n имели полюсы порядка n , но даже и в этом случае свойства сходимости перенормированных рядов нетривиально связаны с сингулярным ядром $a(t)/t$ выражения (3.1). Результаты можно объединить в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ – аналитическая в окрестности V точки 0 функция с $a_0 \neq 0$. Уравнение $f = h(a/t)f + 1 - Z$ задает перенормировочный ряд $Z(t, h) = (1/t) \sum_{n \geq 1} h^n Z_n^1$ со строго положительным радиусом сходимости R . Внутри диска $D(0, R)$ перенормировочный ряд задает функцию $Z^1(h) = \sum_{n \geq 1} Z_n^1 h^n$, которая в окрестности точки 0 обратна к функции $t \mapsto t/a(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$Z_n^1 = \text{Res}_{t=0} \left(\frac{a^n(t)}{t^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k(t)}{t^k} \frac{Z_{n-k}^1}{t} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \left(\frac{a^n(t)}{t^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k(t)}{t^k} \frac{Z_{n-k}^1}{t} \right) dt. \quad (3.6)$$

Пусть число $R > 0$ таково, что диск $D(0, R)$, граница которого представляет собой круг C_R , лежит внутри V . Определив $M_R = \sup_{|t|=R} |a(t)|$, легко получить, что

$$|Z_n^1| \leq \frac{M_R^n}{R^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_R^k}{R^k} |Z_{n-k}^1|, \quad (3.7)$$

и по индукции

$$|Z_n^1| \leq 2^n \frac{M_R^n}{R^{n-1}}. \quad (3.8)$$

Из этого неравенства следует, что ряд $\sum Z_n^1 h^n$ имеет строго положительный радиус сходимости ρ . Хотя закон образования Z_n^1 может быть получен с помощью классической формулы обращения Лагранжа (см. ниже замечание 4), величину ρ можно эффективно определить следующим образом.

Выберем h такое, что

$$0 < |h| < \frac{R}{2M_R} = \inf_{|t|=R} \frac{|t|}{2|a(t)|} < \inf_{|t|=R} \frac{|t|}{|a(t)|}. \quad (3.9)$$

Тогда ряд $\sum_{n \geq 1} Z_n^1 h^n$ сходится, а ряд $\sum_{n \geq 1} (a^n(t)/t^n) h^n$ сходится абсолютно на круге C_R . Соответственно имеем

$$Z(t, h) = \frac{Z^1(h)}{t} = \frac{1}{t} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a^n(z)}{z^n} h^n - \sum_{n \geq 1} h^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k(z)}{z^k} \frac{Z_{n-k}^1}{z} \right) dz. \quad (3.10)$$

Теперь в силу того, что

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k(z)}{z^k} \frac{Z_{n-k}^1}{z} h^n = \sum_{n \geq 1} \frac{a^n(z)}{z^n} h^n \sum_{n \geq 1} \frac{Z_n^1}{z} h^n = \frac{(a/z)h}{1 - (a/z)h} \frac{1}{z} Z^1(h), \quad (3.11)$$

получим для $Z^1(h)$ соотношение

$$Z^1(h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{(a/z)h}{1 - (a/z)h} dz - Z^1(h) \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{(a/z)h}{1 - (a/z)h} \frac{dz}{z}. \quad (3.12)$$

Задав функции

$$F(h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{(a/z)h}{1 - (a/z)h} dz, \quad G(h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{(a/z)h}{1 - (a/z)h} \frac{1}{z} dz, \quad (3.13)$$

получим в итоге выражение, определяющее перенормировочную константу Z :

$$Z(t, h) = \frac{Z^1(h)}{t} = \frac{F(h)}{1 + G(h)} \frac{1}{t}, \quad (3.14)$$

равно как и сингулярности по переменной h в выражении для $Z^1(h)$, т.е. свойства сходимости ряда $\sum Z_n^1(t)h^n$. Эти свойства оказываются связанными с $A_1 \equiv a(t)/t$ нетривиальным функциональным соотношением, заданным уравнениями (3.13) и (3.14).

Перейдем теперь к вычислению интегралов от (3.14) с помощью теоремы о вычетах. Внутри диска $D(0, R)$ необходимо определить решения $z(h)$ уравнения

$$1 - \frac{a(z)}{z} h = 0. \quad (3.15)$$

По теореме об инверсии для переменной h в окрестности нуля получим, что уравнение $z/a(z) = h$ имеет единственное решение $z(h)$ такое, что $z(0) = 0$. Это решение можно получить, если сжать исходный диск $D(0, R)$ до меньшего диска. Полюсы в выражениях для F и G оказываются простыми, поскольку $a(0) = a_0 \neq 0$; при этом

$$\text{Res} \left(a(z) \frac{z}{h} - a(z); z(h) \right) = a(z(h)) \frac{1}{h} - a'(z(h)). \quad (3.16)$$

Дифференцируя (3.15), получаем

$$a'(z(h)) = \frac{1}{h} - \frac{z(h)}{h^2 z'(h)}, \quad (3.17)$$

так что, выбрав достаточно малые значения радиуса R и h в выражении (3.9), приходим к

$$F(h) = \text{Res} \left(\frac{a(z)}{z/h - a(z)}; z(h) \right) = h z'(h), \quad (3.18)$$

$$1 + G(h) = 1 + \text{Res} \left(\frac{a(z)}{z/h - a(z)} \frac{1}{z}; z(h) \right) = \frac{h z'(h)}{z(h)}. \quad (3.19)$$

В конечном итоге получим

$$Z(t, h) = \frac{Z^1(h)}{t} = z(h) \frac{1}{t}, \quad (3.20)$$

где $Z^1(h)$ задается уравнением (3.15) и удовлетворяет условию $Z^1(0) = 0$. Разложение в ряд по h для обратной функции $Z^1(h)$ такой, что $Z^1(0) = 0$, отвечает тем самым ряду $\sum_{n \geq 1} Z_n^1 h^n$, а его радиус сходимости ρ определяется ближайшей к нулю сингулярностью функции $Z^1(h)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Классическая формула обращения Лагранжа задает разложение функции $Z^1(h)$, которое в окрестности нуля обратно к функции $t \mapsto t/a(t)$. Имеем $Z^1(h) = \sum_{n \geq 1} Z_n^1 h^n$, где коэффициенты Z_n^1 выражаются как [5]

$$Z_n^1 = \frac{1}{n!} \partial_t^{n-1} (a^n(t))|_{t=0}. \quad (3.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Заметим, что перенормированное уравнение $f = h(a/t)f + 1$ допускает тривиальное решение $f(t, h) = t/(t - ha(t))$. При $h \neq 0$ это решение имеет сингулярности в точках z таких, что $z = ha(z)$. Решение перенормированного уравнения (3.1) имеет вид

$$f^R(t, h) = \frac{t - Z^1(h)}{t - ha(t)}, \quad (3.22)$$

и в силу выполнения соотношения эквивалентности

$$t - ha(t) = 0 \iff t - Z^1(h) = 0 \quad (3.23)$$

функция $t \mapsto f^R(t, h)$ не имеет сингулярностей, если t находится в окрестности нуля. Следует отметить, что для рассматриваемого в данной работе уравнения перенормировка, переводящая “голое решение” в перенормированное, мультипликативна, так что в определенном смысле можно записать $f^R(t, h) = (1 - Z^1(h)/t)f(t, h)$.

4. ИНТЕРЕСНОЕ СООТНОШЕНИЕ

В качестве примера применения процедуры, представленной в предыдущем разделе, рассмотрим случай

$$\frac{a(t)}{t} = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}.$$

Из теоремы 2 при этом следует, что функция $Z^1(h)$ обратна к функции $t \mapsto \sin(\pi t)/\pi$. Теперь это просто дает

$$Z^1(h) = \frac{1}{\pi} \arcsin(\pi h) = \int_0^h \frac{dt}{\sqrt{(1 - \pi^2 t^2)}}, \quad (4.1)$$

что показывает, что радиус сходимости ряда, отвечающего $Z^1(h)$, равен $1/\pi$. Более того, с применением программы Maple можно выписать первые несколько значений Z_n^1 в разложении $Z^1(h)$:

$$Z^1(h) = h + \left(\frac{1}{6}\pi^2\right)h^3 + \left(\frac{3}{40}\pi^4\right)h^5 + \left(\frac{5}{112}\pi^6\right)h^7 + \left(\frac{35}{1152}\pi^8\right)h^9 + \dots \quad (4.2)$$

Соответствующее разложение для частного ряда $Z^{(1)}$, введенное в замечании 3, можно получить аналогично. Результат имеет вид

$$Z^{(1)}(h) = h + \left(\frac{1}{6}\pi^2\right)\frac{h^3}{3} + \left(\frac{3}{40}\pi^4\right)\frac{h^5}{5} + \left(\frac{5}{112}\pi^6\right)\frac{h^7}{7} + \left(\frac{35}{1152}\pi^8\right)\frac{h^9}{9} + \dots, \quad (4.3)$$

откуда явно следует, что

$$Z_n^{(1)} = \frac{1}{n} Z_n^1 \quad (4.4)$$

и, следовательно, в этом примере

$$Z^{(1)}(h) = \int_0^h \frac{\arcsin(\pi t)}{\pi t} dt. \quad (4.5)$$

Это подтверждает величину радиуса сходимости $1/\pi$, предположенную ранее на основе численного анализа, представленного в замечании 3. Дело в том, что свойство (4.4) справедливо для всех интегральных уравнений из семейства, задаваемого формулами (2.1) и (2.2), если только ядра этих уравнений удовлетворяют условию (2.3). На самом деле из теоремы 1 вытекает, что коэффициенты $Z_n(t)$ можно вычислить по индукции:

$$Z_n(t) = \text{sing} \left(A_n(t) - \sum_{k=1}^{n-1} Z_{n-k}(t) A_k(t) \right),$$

где $A_n(t) = b(t)b(2t)\dots b(nt)$ при $Z_n^{(1)}$ и $A_n(t) = b(t)^n$ в Z_n^1 . Тогда для любой функции b , удовлетворяющей (2.3), с помощью формального вычисления с применением программы Maple можно проверить выполнение соотношения (4.4). Например, вернувшись к случаю (1.12), получим, что в этом примере имеют место функции

$$A_n(t) = \Gamma(t)\Gamma(2t)\dots\Gamma(nt) \equiv A_1(t)A_1(2t)\dots A_1(nt), \quad (4.6)$$

где $A_1(t)$ удовлетворяет (2.3) и имеет вид

$$A_1(t) = \int_0^\infty dy K(x, y) y^t = \int_0^\infty dy \frac{e^{-y/x}}{y} y^t = \frac{a-1}{t} + a_0 + a_1 t + \dots \quad (4.7)$$

Если теперь обратиться к вопросу о сходимости частного ряда, введенного в замечании 3, а именно ряда $\sum_n h^n Z_n^{(1)}$, то в силу соотношения (4.4) получим, что свойства его сходимости будут теми же самыми, что и для функции $A_n(t) = A_1(t)^n = \Gamma(t)^n$, которая сама по себе отвечает упрощенной (перенормированной) форме представления для выражения (1.12):

$$f^R(t, h) = h\Gamma(t)f^R(t, h) + 1 - Z(t, h). \quad (4.8)$$

Наконец, получим, что из теоремы 2 следует, что эти свойства содержатся в функции $Z^1(h)$, которая представляет собой достаточно нетривиальную функцию, обратную к $t \mapsto t/a(t) = 1/\Gamma(t)$. Таким образом, видно, как рекуррентные построения для

перенормирующих рядов даже в случае достаточно простых семейств интегральных уравнений приводят к построению в высшей степени нетривиальных функций, что и было одним из побуждающих мотивов наших исследований. Вышеприведенные результаты и их непосредственные обобщения (например, на случай старших значений параметра k в формуле (2.38) и т. д.) дают лишь намек на то огромное количество соотношений, которое можно получить при исследовании этих достаточно простых моделей, но это продолжение исследований лежит за пределами настоящей работы.

Список литературы

- [1] D. Kreimer, *Knots and Feynman Diagrams*, Cambridge Lecture Notes Phys., **13**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [2] A. Connes, D. Kreimer, *Comm. Math. Phys.*, **199**:1 (1998), 203–242.
- [3] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monogr Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [4] I. Bierenbaum, R. Kreckel, D. Kreimer, *J. Math. Phys.*, **43**:10 (2002), 4721–4740.
- [5] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Ч. 1, 2, Наука, М., 1963.

Поступила в редакцию 15.10.2009,
после доработки 6.11.2009