Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Яковлев, З. Папп, Кулоновская трехчастичная задача рассеяния в представлении дискретного базиса в гильбертовом пространстве, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 314–327

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:19:44

© 2010 г.

С. Л. Яковлев^{*†}, З. Папп[†]

КУЛОНОВСКАЯ ТРЕХЧАСТИЧНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для решения квантовой трехчастичной кулоновской задачи рассеяния с начальным состоянием из двухчастичных асимптотических каналов предложены модифицированные интегральные уравнения Фаддеева–Меркурьева. Показано, что решение этих уравнений можно получить, используя дискретный базис гильбертова пространства. Доказано, что погрешность определения амплитуд рассеяния, вызванную обрезанием базиса, можно сделать сколь угодно малой. В результате этого обрезания кулоновская функция Грина также сужается на двухчастичный сектор трехчастичного конфигурационного пространства и в старшем порядке может быть построена с помощью свертки двухчастичных функций Грина. Для вычисления свертки предложен контур интегрирования, пригодный для всех энергий, включая энергии связанных состояний и энергии рассеяния ниже и выше трехчастичного порога развала.

Ключевые слова: кулоновская задача рассеяния, квантовая задача рассеяния, интегральные уравнения Фаддеева–Меркурьева.

*Посвящается памяти академика С. П. Меркурьева,
которому в 2010 году исполнилось бы 65 лет*

1. ВВЕДЕНИЕ

Трехчастичная кулоновская задача рассеяния является одной из наиболее трудных нерешенных задач нерелятивистской квантовой механики. Источник трудностей связан с дальнедействующим характером кулоновского потенциала. В стандартной теории рассеяния предполагается, что асимптотически частицы движутся свободно, а в случае кулоновского взаимодействия это не выполняется. В теории

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sl-yakovlev@yandex.ru

[†]Department of Physics and Astronomy, California State University, Long Beach, California, USA

Фаддеева–Меркурьева [1] данная задача была сформулирована математически корректно и изящно. Дальнейшее развитие теории шло по пути использования интегральных уравнений со связными (компактными) ядрами и одновременно по пути преобразования в дифференциальные уравнения с асимптотическими граничными условиями в конфигурационном пространстве. В практических вычислениях, однако, в основном использовалась только вторая версия теории, поскольку чрезвычайно сложная структура функций Грина в ядрах интегральных уравнений Фаддеева–Меркурьева пока не допускает прямого решения. Недавно был предложен новый метод анализа трехчастичной кулоновской задачи путем решения интегральных уравнений в представлении дискретного базиса в гильбертовом пространстве. В частности, были решены уравнения Фаддеева–Нобла [2] в представлении кулоновских штурмовских функций. Кулоновские функции Грина, входящие в интегральные уравнения Фаддеева–Нобла, связывались с помощью уравнения типа Липпманна–Швингера с искаженными канальными кулоновскими функциями Грина, которые затем можно было вычислить с помощью свертки двухчастичных кулоновских функций Грина. Этот метод был сначала разработан для задач со связанными состояниями [3] с (отталкивающими) кулоновскими и ядерными потенциалами, а затем обобщен на вычисление $(p-d)$ -рассеяния при энергиях ниже порога развала [4]. Эти вычисления отлично соответствовали результатам других принятых подходов, а также показали эффективность и точность нового метода. В работе [5] рассматривались задачи с атомными связанными состояниями для притягивающих кулоновских взаимодействий; среди прочего был получен неожиданный результат: для того чтобы добиться сходимости в этой схеме, требуется учесть значительно меньше каналов по угловому моменту, чем в предшествующих методах. Однако этот подход ограничен использованием случая уравнений Фаддеева–Нобла. Без наложения дополнительных условий на значения энергии он является в полной мере строгости верным только в случае отталкивающего кулоновского взаимодействия.

Теория Фаддеева–Меркурьева является более общей, так как включает все типы динамических ситуаций и применима как к отталкивающим, так и к притягивающим кулоновским взаимодействиям. Тем не менее в настоящей статье мы рассматриваем случай отталкивания и процессы рассеяния, начинающиеся с двухчастичных асимптотических каналов, т.е. $(2 \rightarrow 2)$ - и $(2 \rightarrow 3)$ -рассеяния. Мы модифицируем исходные интегральные уравнения Фаддеева–Меркурьева, чтобы обеспечить точную квадратичную интегрируемость решения. Затем мы адаптируем представление дискретного базиса гильбертова пространства к модифицированным интегральным уравнениям для $(2 \rightarrow 2)$ - и $(2 \rightarrow 3)$ -процессов. Мы приводим обоснование применимости метода разложения для всех энергий ниже и выше порога развала и для отталкивающих дальнodelствующих сил. Случай притягивающих дальнodelствующих сил, требующий особого обращения с бесконечным числом связанных состояний в двухчастичных подсистемах, будет рассмотрен в отдельной публикации. В разделе 2 мы напомним основные этапы формулировки теории рассеяния Фаддеева–Меркурьева для дальнodelствующих сил в терминах интегральных уравнений. В разделе 3 мы представляем наш метод решения этих уравнений и доказываем применимость используемых разложений. В разделе 4 мы подводим итоги и формулируем некоторые выводы.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА–МЕРКУРЬЕВА

Рассмотрим три частицы с массами $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma$, где (α, β, γ) – перестановка набора $(1, 2, 3)$. Обозначим через x_α, y_α обычные координаты Якоби, также будем использовать обозначение $X = \{x_\alpha, y_\alpha\} \in \mathbb{R}^6$. Трехчастичный оператор кинетической энергии задается следующей суммой двухчастичных операторов кинетической энергии: $H^0 = h_{x_\alpha}^0 + h_{y_\alpha}^0$. Предположим, что частицы взаимодействуют посредством (дальнодействующего) потенциала кулоновского типа

$$v_\alpha(x_\alpha) = \frac{e_\beta e_\gamma}{|x_\alpha|} + v_\alpha^{\text{sr}}(x_\alpha), \quad (1)$$

где e – электрический заряд. Требование, что потенциал кулоновского типа является отталкивающим, означает, что $e_\beta e_\gamma > 0$. Короткодействующий (short-range) потенциал $v_\alpha^{\text{sr}}(x_\alpha)$ предполагается квадратично-интегрируемым, $v_\alpha^{\text{sr}}(x_\alpha) \in L_2(\mathbb{R}^3)$, поэтому он должен при $|x_\alpha| \rightarrow \infty$ вести себя, как $v_\alpha^{\text{sr}}(x_\alpha) \sim O(|x_\alpha|^{-3/2-\epsilon})$, $\epsilon > 0$.

Интегральные уравнения Фаддеева представляют собой фундаментальные уравнения для задач трех тел. Изначально они формулировались для короткодействующих взаимодействий [6]. В этом случае после одной итерации они обладают связными ядрами и, следовательно, фактически являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Тот факт, что однородные уравнения допускают нетривиальные решения только для дискретного набора энергий трехчастичных связанных состояний, гарантирует существование и единственность решений неоднородных уравнений при энергиях рассеяния. Для дальнодействующих потенциалов, однако, интегральные ядра уравнений Фаддеева становятся сингулярными, и вышеуказанные свойства перестают выполняться. Поэтому потенциал кулоновского типа нельзя просто вставить в уравнения Фаддеева.

Естественным выходом из этой ситуации является разбиение взаимодействия кулоновского типа на короткодействующие и дальнодействующие слагаемые,

$$v_\alpha = v_\alpha^{(s)} + v_\alpha^{(l)},$$

и затем применение процедуры Фаддеева только к короткодействующей части. Здесь верхние индексы “s” и “l” относятся к коротко- и дальнодействию. Трехчастичный гамильтониан определяется формулой

$$H = H^0 + v_\alpha^{(s)} + v_\alpha^{(l)} + v_\beta^{(s)} + v_\beta^{(l)} + v_\gamma^{(s)} + v_\gamma^{(l)}.$$

Меркурьев ввел разбиение в трехчастичном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^6$ с помощью срезающей функции ζ_α :

$$v_\alpha^{(s)}(X) = v_\alpha(x_\alpha)\zeta_\alpha(x_\alpha, y_\alpha), \quad v_\alpha^{(l)}(X) = v_\alpha(x_\alpha)[1 - \zeta_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)],$$

где функция ζ_α определяется так, чтобы отделить асимптотический двухчастичный сектор Ω_α от остального конфигурационного пространства. В области Ω_α функция ζ_α асимптотически стремится к единице, а в дополнительной асимптотической

области конфигурационного пространства – к нулю. Математически строго Ω_α определяется как часть трехчастичного конфигурационного пространства, в которой выполняется условие

$$|x_\alpha| < a \left(1 + \frac{|y_\alpha|}{a} \right)^\nu, \quad a > 0, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Таким образом, в области Ω_α короткодействующая часть $v_\alpha^{(s)}$ совпадает с начальным потенциалом кулоновского типа v_α , а в дополнительной области обращается в нуль, тогда как для $v_\alpha^{(l)}$ выполняется противоположное.

Определим дальнедействующий и каналный дальнедействующий гамильтонианы формулами

$$H^{(l)} = H^0 + v_\alpha^{(l)} + v_\beta^{(l)} + v_\gamma^{(l)}, \quad H_\alpha^{(l)} = H^0 + v_\alpha^{(s)} + v_\alpha^{(l)} + v_\beta^{(l)} + v_\gamma^{(l)}$$

соответственно, а также их резольвенты

$$G^{(l)}(z) = (z - H^{(l)})^{-1}, \quad G_\alpha^{(l)}(z) = (z - H_\alpha^{(l)})^{-1}.$$

Гамильтониан $H^{(l)}$ строится как положительный оператор с непрерывным спектром $\sigma(H^{(l)}) = [0, \infty)$ [7], [8], и свойства его спектра аналогичны свойствам спектра трехчастичного оператора кинетической энергии. Резольвента $G^{(l)}(z)$ является аналитической операторнозначной функцией, которая задана на всей комплексной плоскости переменной z за исключением разреза, совпадающего с $\sigma(H^{(l)})$. Это очень важное свойство – им обеспечивается так называемая процедура Фаддеева асимптотической фильтрации [9] и, следовательно, гарантируется асимптотическая ортогональность компонент Фаддеева. В подходе Нобла [2] разбиение производится в двухчастичном конфигурационном пространстве, как в уравнении (1), таким образом, приведенное выше условие без каких-либо ограничений для значений энергии может выполняться только в случае отталкивающих кулоновских взаимодействий. Далее, если произвести фаддеевское разложение $|\psi_\alpha\rangle = G^{(l)}v_\alpha^{(s)}|\Psi\rangle$ трехчастичной волновой функции $|\Psi\rangle$, то оно будет выполнять роль асимптотической фильтрации. Это ведет к разложению волновой функции на три компоненты:

$$|\Psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle + |\psi_\beta\rangle + |\psi_\gamma\rangle,$$

каждая из которых описывает разные асимптотические каналы. Получающиеся уравнения для компонент задают набор интегральных уравнений Фаддеева–Меруева [8]

$$|\psi_\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha}|\Phi_{\beta i}^{(l)+}\rangle + G_\alpha^{(l)}(E + i0)v_\alpha^{(s)} \sum_{\gamma \neq \alpha} |\psi_\gamma\rangle, \quad (3)$$

где $|\Phi_{\beta i}^{(l)+}\rangle$ – собственное состояние оператора $H_\beta^{(l)}$ с энергией E . Поскольку мы рассматриваем здесь только $(2 \rightarrow 2, 3)$ -процессы, $|\Phi_{\beta i}^{(l)+}\rangle$ описывает асимптотически пары связанных состояний в двухчастичной подсистеме β с энергией связи $E_{\beta i}$.

В работах [7], [8] показано, что после некоторого числа итераций уравнения (3) редуцируются к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с компактными ядрами для всех энергий, в том числе энергий ниже ($E < 0$) и выше ($E > 0$) трехчастичного порога развала. Таким образом, основные свойства исходных уравнений Фаддеева, установленные для короткодействующих взаимодействий, становятся верными также и в случае потенциалов кулоновского типа.

Здесь важно отметить, что резольвента $G_\alpha^{(1)}$ канального дальнодействующего гамильтониана $H_\alpha^{(1)}$ является оператором, который, в отличие от случая короткодействия, невозможно построить только из двухчастичных величин. Чтобы определить $G_\alpha^{(1)}$ однозначно, необходимо снова начать с уравнений для резольвенты фаддеевского типа или с триады уравнений Липпманна–Швингера [10], которая является, на самом деле, сопряженным представлением оператора Фаддеева [11]. У гамильтониана $H_\alpha^{(1)}$, однако, есть преимущество, заключающееся в том, что он обеспечивает связанные состояния только в двухчастичной подсистеме α , и, таким образом, возможен только один вид асимптотического канала – канал α . В таких системах для единственности решения достаточно иметь лишь одно уравнение Липпманна–Швингера, должным образом учитывающее дальнодействующую часть гамильтониана $H_\alpha^{(1)}$ [12]. Подходящее уравнение Липпманна–Швингера было предложено Меркурьевым, оно имеет вид

$$G_\alpha^{(1)}(z) = G_\alpha^{\text{as}}(z) + G_\alpha^{\text{as}}(z)V_\alpha^{\text{as}}G_\alpha^{(1)}(z), \quad (4)$$

где V^{as} – трехчастичный потенциал, убывающий при $|X| \rightarrow \infty$ во всех направлениях трехчастичного конфигурационного пространства $\mathbb{R}^6$ быстрее, чем кулоновский потенциал: $V^{\text{as}} \sim O(|X|^{-1-\epsilon})$, $\epsilon > 0$.

Операторы G_α^{as} и V_α^{as} – трехчастичные операторы со сложной структурой, однако в области Ω_α они принимают весьма простой вид. Потенциал V^{as} определяется как

$$V^{\text{as}} \equiv U^\alpha = v_\beta^{(1)} + v_\gamma^{(1)} - u_\alpha^{(1)}, \quad (5)$$

где вспомогательный двухчастичный потенциал $u_\alpha^{(1)}(y_\alpha)$ следует выбрать так, чтобы он имел асимптотику $u_\alpha^{(1)}(y_\alpha) \sim e_\alpha(e_\beta + e_\gamma)/|y_\alpha|$ при $|y_\alpha| \rightarrow \infty$. В этом случае U^α убывает при $|y_\alpha| \rightarrow \infty$ достаточно быстро, а именно

$$U^\alpha \sim O(|y_\alpha|^{-2+\nu}), \quad (6)$$

что с учетом условия (2) означает квадратичную интегрируемость. Таким образом, в двухчастичной области Ω_α вспомогательный дальнодействующий потенциал $u_\alpha^{(1)}$ асимптотически компенсирует дальнодействующий хвост $v_\beta^{(1)} + v_\gamma^{(1)}$.

В области Ω_α также принимает простой вид и функция Грина $G_\alpha^{\text{as}}(z)$, которая совпадает с искаженной канальной кулоновской функцией Грина $\tilde{G}_\alpha(z)$. Оператор $\tilde{G}_\alpha(z)$ оказывается резольвентой суммы двух коммутирующих двухчастичных гамильтонианов,

$$\tilde{G}_\alpha(z) = (z - h_{x_\alpha} - h_{y_\alpha})^{-1},$$

где $h_{x_\alpha} = h_{x_\alpha}^0 + v_\alpha$ и $h_{y_\alpha} = h_{y_\alpha}^0 + u_\alpha^{(1)}$, и поэтому его можно построить как свертку двухчастичных функций Грина:

$$G_\alpha^{\text{as}}(z) \equiv \tilde{G}_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' g_{x_\alpha}(z - z') g_{y_\alpha}(z'), \quad (7)$$

где $g_{x_\alpha}(z) = (z - h_{x_\alpha})^{-1}$ и $g_{y_\alpha}(z) = (z - h_{y_\alpha})^{-1}$. Контур C должен проходить против часовой стрелки вокруг непрерывного спектра оператора h_{y_α} так, чтобы оператор g_{x_α} был аналитичен в области, ограниченной контуром C .

Спектры операторов, порождающих резольвенты $G_\alpha^{(1)}$ и G_α^{as} , должны иметь одинаковую природу. Поэтому, если мы хотим использовать оператор $\tilde{G}_\alpha$ вместо оператора G_α^{as} при действии на функции, область определения которых ограничена на Ω_α , то у него должен быть спектр, аналогичный спектру оператора G_α^{as} . Поскольку $G_\alpha^{(1)}$ построен так, что пороги спектра даются двухчастичными связанными состояниями, порожденными $v_\alpha(x_\alpha)$, вспомогательный двухчастичный потенциал $u_\alpha^{(1)}(y_\alpha)$ следует выбрать так, чтобы он не поддерживал никаких связанных состояний. Если $e_\alpha(e_\beta + e_\gamma) \geq 0$, то это требование легко выполнить; если $e_\alpha(e_\beta + e_\gamma) < 0$, то необходимо использовать проектор на подпространство, ортогональное набору связанных состояний, что приведет к нелокальному потенциалу $u_\alpha^{(1)}$. Технические детали опираются на недавно развитый формализм [13], и мы не будем их обсуждать.

Все эти свойства уравнения (4) приводят к следующей асимптотике интеграла:

$$\begin{aligned} F_\alpha^{(1)}(X) &= \int dX' G_\alpha^{(1)}(X, X', E + i0) f(X') \sim \\ &\sim Q_0(X, E) \langle \Phi_{\alpha 0}^{(1)-} | f \rangle + \sum_j \phi_{\alpha j}(x_\alpha) Q_{\alpha j}(y_\alpha, E) \langle \Phi_{\alpha j}^{(1)-} | f \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})^6$. Здесь $\phi_{\alpha j}(x_\alpha)$ – волновая функция j -го связанного состояния пары α с энергией $E_{\alpha j}$. Состояние $|\Phi_{\alpha 0}^{(1)}\rangle$ – собственное состояние рассеяния гамильтониана $H_\alpha^{(1)}$, описывающее распространение трех частиц в конечном состоянии, искаженное кулоновским взаимодействием. Состояние $|\Phi_{\alpha j}^{(1)}\rangle$ описывает рассеяние третьей частицы на связанной паре. Его асимптотическая форма дается произведением двухчастичных волновых функций,

$$\Phi_{\alpha j}^{(1)}(X) = \langle x_\alpha y_\alpha | \Phi_{\alpha j}^{(1)} \rangle \sim \langle x_\alpha | \phi_{\alpha j} \rangle \langle y_\alpha | \chi_\alpha^{(1)} \rangle,$$

где $|\chi_\alpha^{(1)}\rangle$ – собственное состояние рассеяния гамильтониана h_{y_α} . Кулоновские сферические волновые функции имеют асимптотику $Q_0(X, E) \sim |X|^{-5/2}$ при $|X| \rightarrow \infty$ и асимптотику $Q_{\alpha j}(y_\alpha, E) \sim |y_\alpha|^{-1}$ при $|y_\alpha| \rightarrow \infty$ [1]. Из построения следует, что состояние $|F_\alpha^{\text{as}}\rangle = G_\alpha^{\text{as}}|f\rangle$ имеет асимптотику, подобную асимптотике $|F_\alpha^{(1)}\rangle$ в правой части соотношения (8).

Асимптотика (8) приводит к аналогичной асимптотической форме для решений уравнений Фаддеева–Меркурьева:

$$\psi_\alpha(X) \sim \delta_{\beta\alpha} \Phi_{\beta i}^{(1)}(X) + \sum_j \phi_{\alpha j}(x_\alpha) Q_{\alpha j}(y_\alpha, E) A_{\alpha j, \beta i} + Q_0(X, E) A_{\alpha 0, \beta i}, \quad (9)$$

где амплитуды рассеяния даются формулами

$$A_{\alpha j, \beta i} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle \Phi_{\alpha j}^{(1)-} | v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma} \rangle, \quad A_{\alpha 0, \beta i} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle \Phi_{\alpha 0}^{(1)-} | v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma} \rangle.$$

К концу раздела мы собрали все сведения, необходимые для того, чтобы показать квадратичную интегрируемость в трехчастичном гильбертовом пространстве членов $v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma} \rangle$, $\gamma \neq \alpha$, фигурирующих в правой части уравнения (3): $v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma} \rangle \in L_2(\mathbb{R}^6)$. Действительно, согласно формуле (9) нам нужно рассмотреть только члены, подобные $v_{\alpha}^{(s)} \phi_{\gamma j}(x_{\gamma})$ и $v_{\alpha}^{(s)} Q_0(X, E)$. Функция $v_{\alpha}^{(s)} \phi_{\gamma j}(x_{\gamma})$ квадратично-интегрируема благодаря быстрому убыванию потенциала $v_{\alpha}^{(s)}$ по координате x_{α} и быстрому убыванию волновой функции двухчастичного связанного состояния $\phi_{\gamma j}(x_{\gamma})$ по координате x_{γ} . В члене $v_{\alpha}^{(s)} Q_0(X, E)$ потенциал $v_{\alpha}^{(s)}$ содержит срезающую функцию ζ_{α} , ограничивающую область интегрирования до Ω_{α} . В этой области, однако, $Q_0(X, E)$ само квадратично-интегрируемо, если $\nu < 1/2$, поэтому $v_{\alpha}^{(s)} Q_0(X, E)$ тоже квадратично-интегрируемо на $\mathbb{R}^6$. Это главный результат для всего дальнейшего, и мы сформулируем его в виде теоремы.

ТЕОРЕМА. Если параметр ν срезающей функции ζ_{α} удовлетворяет неравенству $0 < \nu < 1/2$, то произведение $v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma} \rangle$, $\alpha \neq \gamma$, фигурирующее в правой части уравнений (3), квадратично-интегрируемо в $\mathbb{R}^6$.

3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим представление интегральных уравнений Фаддеева–Меркурьева в дискретном базисе гильбертова пространства. Покажем, что обрезание базиса при конечных N приводит к пренебрежимо малой ошибке в амплитудах рассеяния, если $N \rightarrow \infty$.

3.1. Представление интегральных уравнений Фаддеева–Меркурьева в дискретном базисе гильбертова пространства. Предположим, что состояния $\{|n\rangle\}$ вместе с их биортогональными партнерами $\{|\tilde{n}\rangle\}$ образуют базис в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ двухчастичного относительного движения. Поскольку трехчастичное гильбертово пространство – это тензорное произведение двух таких двухчастичных пространств, подходящим базисом $L_2(\mathbb{R}^6)$ будет прямое произведение

$$|nm\rangle_{\alpha} = |n\rangle_{\alpha} \otimes |m\rangle_{\alpha}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Полноту базиса трехчастичного гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R}^6)$ можно выразить с помощью соотношения

$$\mathbf{1} = \text{s.} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n, m=0}^N |\widetilde{nm}\rangle_{\alpha} \langle nm| = \text{s.} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\alpha}^N,$$

где $\text{s.} \lim$ обозначает сильный предел в L_2 . Заметим, что в трехчастичном гильбертовом пространстве возможны три эквивалентных базиса, при выборе по каждому из индексов α , β и γ .

Начнем с того, что, как мы заметили в предыдущем разделе, каждый член $v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle$, $\alpha \neq \gamma$, в уравнении (3) принадлежит $L_2(\mathbb{R}^6)$ и, следовательно, дается сходящимся рядом:

$$v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} |\widetilde{nm}\rangle_\alpha \langle nm|v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle = \mathbf{1}_\alpha^{N_1} v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle + |r_\alpha^{N_1}\rangle. \quad (11)$$

В правой части этого равенства мы оборвали ряд на N_1 -м слагаемом и представили остаток как $|r_\alpha^{N_1}\rangle = (\mathbf{1} - \mathbf{1}_\alpha^{N_1})v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle$. В силу квадратичной интегрируемости $v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle$ предел последнего равен нулю,

$$\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \|r_\alpha^{N_1}\| = 0, \quad (12)$$

где $\|f\| = \langle f|f\rangle^{1/2}$ обозначает норму в гильбертовом пространстве. Теперь интегральное уравнение Фаддеева–Меркурьева (3) принимает вид

$$|\psi_\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}|\Phi_{\beta i}^{(1)+}\rangle + G_\alpha^{(1)}(E + i0)\mathbf{1}_\alpha^{N_1}v_\alpha^{(s)}\sum_{\gamma \neq \alpha}|\psi_\gamma\rangle + G_\alpha^{(1)}(E + i0)|r_\alpha^{N_1}\rangle. \quad (13)$$

Чтобы двигаться дальше, рассмотрим члены $\alpha\langle nm|v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle$, фигурирующие в $\mathbf{1}_\alpha^{N_1}$ во втором слагаемом правой части равенства (13). Этот матричный элемент в явном виде записывается как интеграл:

$$\alpha\langle nm|v_\alpha^{(s)}|\psi_\gamma\rangle = \int dx_\alpha dy_\alpha \alpha\langle nm|X\rangle v_\alpha^{(s)}(X)\psi_\gamma(X). \quad (14)$$

Произведение $\alpha\langle nm|X\rangle v_\alpha^{(s)}(X)$ в интеграле квадратично-интегрируемо и опять же разлагается в ряд в пространстве $L_2(\mathbb{R}^6)$ с использованием базиса (10) в фрагментации пространства, отвечающей индексу γ :

$$\begin{aligned} \alpha\langle nm|X\rangle v_\alpha^{(s)}(X) &= \sum_{n',m'}^{\infty} \alpha\langle nm|v_\alpha^{(s)}|n'm'\rangle_\gamma \gamma\langle \widetilde{n'm'}|X\rangle = \\ &= \alpha\langle nm|v_\alpha^{(s)}\mathbf{1}_\gamma^{N_2}|X\rangle + \alpha\langle nm|v_\alpha^{(s)}(\mathbf{1} - \mathbf{1}_\gamma^{N_2})|X\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы вновь оборвали разложение на конечном N_2 , но N_2 выбирается так, чтобы для любых $n, m \leq N_1$ остаток был сколь угодно малым:

$$\|\alpha\langle nm|v_\alpha^{(s)}(\mathbf{1} - \mathbf{1}_\gamma^{N_2})\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (16)$$

Подставляя разложение (15) в уравнение (13), приходим к следующему представлению:

$$|\psi_\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}|\Phi_{\beta i}^{(1)+}\rangle + G_\alpha^{(1)}(E + i0)\mathbf{1}_\alpha^{N_1}v_\alpha^{(s)}\sum_{\gamma \neq \alpha}\mathbf{1}_\gamma^{N_2}|\psi_\gamma\rangle + G_\alpha^{(1)}(E + i0)(|r_\alpha^{N_1}\rangle + |r_\alpha^{N_1 N_2}\rangle), \quad (17)$$

где $|r_\alpha^{N_1 N_2}\rangle = \mathbf{1}_\alpha^{N_1}v_\alpha^{(s)}\sum_{\gamma \neq \alpha}(\mathbf{1} - \mathbf{1}_\gamma^{N_2})|\psi_\gamma\rangle$.

Покажем, что последнее слагаемое в правой части равенства (17) вносит пренебрежимо малый вклад в амплитуды рассеяния, если N_1 и N_2 стремятся к бесконечности. Действительно, из соотношений (12) и (16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют N_1 и N_2 такие, что для любых $N \geq \max\{N_1, N_2\}$ выполняется неравенство $\|r_\alpha^N + r_\alpha^{NN}\| < \varepsilon$. Теперь можно рассматривать последнее слагаемое в правой части равенства (17) как дополнительный свободный член. Тогда решение уравнений (17) можно представить как сумму двух слагаемых,

$$|\psi_\alpha\rangle = |\psi_\alpha^N\rangle + |R_\alpha^N\rangle, \quad (18)$$

удовлетворяющих интегральным уравнениям Фаддеева–Меркурьева ранга N с вырожденными ядрами:

$$|\psi_\alpha^N\rangle = \delta_{\alpha\beta} |\Phi_{\beta i}^{(1)+}\rangle + G_\alpha^{(1)}(E + i0) \mathbf{1}_\alpha^N v_\alpha^{(s)} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathbf{1}_\gamma^N |\psi_\gamma^N\rangle, \quad (19)$$

$$|R_\alpha^N\rangle = G_\alpha^{(1)}(E + i0) (|r_\alpha^N\rangle + |r_\alpha^{NN}\rangle) + G_\alpha^{(1)}(E + i0) \mathbf{1}_\alpha^N v_\alpha^{(s)} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathbf{1}_\gamma^N |R_\gamma^N\rangle. \quad (20)$$

Вследствие вырожденности ядра этих уравнений автоматически оказываются компактными. На самом деле для практических вычислений нужно только первое из них, потому что решение второго можно сделать сколь угодно малым, подходящим образом выбрав параметр N . Чтобы показать это, перепишем уравнение (20) в дифференциальной форме

$$(E - H_\alpha^{(1)})|R_\alpha^N\rangle - \mathbf{1}_\alpha^N v_\alpha^{(s)} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathbf{1}_\gamma^N |R_\gamma^N\rangle = |r_\alpha^N\rangle + |r_\alpha^{NN}\rangle$$

и выразим его решение через резольвенту матричного оператора Фаддеева [11]:

$$|R_\alpha^N\rangle = \sum_\gamma G_{\alpha\gamma}^N(E + i0) (|r_\gamma^N\rangle + |r_\gamma^{NN}\rangle).$$

Компоненты резольвенты $G_{\alpha\gamma}^N$ определяются как решения интегральных уравнений Фаддеева–Меркурьева

$$G_{\beta\alpha}^N(z) = G_\beta^{(1)}(z) \delta_{\beta\alpha} + G_\beta^{(1)}(z) \mathbf{1}_\beta^N v_\beta^{(s)} \sum_{\gamma \neq \beta} \mathbf{1}_\gamma^N G_{\gamma\alpha}^N(z),$$

интегральные операторы в которых, как и выше, автоматически компактны из-за вырожденности ядра. Те же аргументы, которые позволили нам получить асимптотику интеграла (8), приводят к аналогичной асимптотической форме для ядра $G_{\beta\alpha}^N(X, X', E + i0)$. Надо только заменить состояния $|\Phi_{\alpha j}^{(1)-}\rangle$ и $|\Phi_{\alpha 0}^{(1)-}\rangle$ трехчастичными волновыми функциями $|\Psi_{\alpha j}^-\rangle$ и $|\Psi_{\alpha 0}^-\rangle$ соответственно. Здесь появляется асимптотическая форма для R_α^N того же вида, что для ψ_α в формуле (9), с амплитудами

$$B_{\alpha j}^N = \sum_\gamma \langle \Psi_{\alpha j}^- | (|r_\gamma^N\rangle + |r_\gamma^{NN}\rangle), \quad B_{\alpha 0}^N = \sum_\gamma \langle \Psi_{\alpha 0}^- | (|r_\gamma^N\rangle + |r_\gamma^{NN}\rangle).$$

Из соотношения унитарности для трехчастичных волновых функций получаем неравенство

$$\sum_{\alpha j} |B_{\alpha j}^N|^2 + \sum_{\alpha} |B_{\alpha 0}^N|^2 = \sum_{\gamma} \|r_{\gamma}^N + r_{\gamma}^N\|^2 < 3\varepsilon^2.$$

Это означает, что при подходящем выборе N модули амплитуд можно сделать сколь угодно малыми, и отбрасывание слагаемого $|R_{\alpha}^N\rangle$ в (18) приводит к пренебрежимо малой ошибке в амплитудах рассеяния.

До сих пор мы сводили решение уравнений (3) к решению уравнений (19) с вырожденным ядром для $|\psi_{\alpha}^N\rangle$. Асимптотика решения в точности та же, что в исходном соотношении (9), только надо заменить амплитуды $A_{\alpha j, \beta i}$ и $A_{\alpha 0, \beta i}$ на

$$A_{\alpha j, \beta i}^N = \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle \Phi_{\alpha j}^{(1)-} | v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma}^N \rangle \quad \text{и} \quad A_{\alpha 0, \beta i}^N = \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle \Phi_{\alpha 0}^{(1)-} | v_{\alpha}^{(s)} | \psi_{\gamma}^N \rangle$$

соответственно. Таким образом, в терминах амплитуд A и A^N можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N_0 такое, что для любого $N > N_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{\alpha j} |A_{\alpha j, \beta i} - A_{\alpha j, \beta i}^N|^2 + \sum_{\alpha} |A_{\alpha 0, \beta i} - A_{\alpha 0, \beta i}^N|^2 < 3\varepsilon^2,$$

т.е. $A_{\alpha j, \beta i}^N$ и $A_{\alpha 0, \beta i}^N$ при $N \rightarrow \infty$ стремятся к $A_{\alpha j, \beta i}$ и $A_{\alpha 0, \beta i}$ соответственно.

Вычисляя $A_{\alpha j, \beta i}^N$ и $A_{\alpha 0, \beta i}^N$, можно снова сделать приближение. Вспомнив, что $v_{\alpha}^{(s)} |\psi_{\gamma}^N\rangle$ квадратично-интегрируема, как и в формулах (11) и (15), мы строим асимптотики амплитуд рассеяния

$$A_{\alpha j, \beta i}^{NM} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle \Phi_{\alpha j}^{(1)-} | \mathbf{1}_{\alpha}^M v_{\alpha}^{(s)} \mathbf{1}_{\gamma}^M | \psi_{\gamma}^N \rangle, \quad A_{\alpha 0, \beta i}^{NM} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle \Phi_{\alpha 0}^{(1)-} | \mathbf{1}_{\alpha}^M v_{\alpha}^{(s)} \mathbf{1}_{\gamma}^M | \psi_{\gamma}^N \rangle, \quad (21)$$

которые при $M \rightarrow \infty$ стремятся к $A_{\alpha j, \beta i}^N$, $A_{\alpha 0, \beta i}^N$ соответственно. Резюмируя наши результаты, можно заключить, что

$$\sum_{\alpha j} |A_{\alpha j, \beta i} - A_{\alpha j, \beta i}^{NM}|^2 + \sum_{\alpha} |A_{\alpha 0, \beta i} - A_{\alpha 0, \beta i}^{NM}|^2 \rightarrow 0, \quad N, M \rightarrow \infty.$$

Таким образом, сведение интегральных уравнений Фаддеева–Меркурьева к матричным уравнениям и использование получившегося представления компонент Фаддеева в конечном базисе при вычислении амплитуд рассеяния по формулам (21) являются обоснованными: ошибка, вносимая использованием конечных значений N и M при обрезании ряда, может быть сделана сколь угодно малой.

В практических вычислениях все, что нам нужно, – это решить матричные уравнения для $\underline{\psi}_{\alpha} = {}_{\alpha} \langle \widetilde{nm} | \psi_{\alpha} \rangle$:

$$\underline{\psi}_{\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \underline{\Phi}_{\beta i}^{(1)+} + \underline{G}_{\alpha}^{(1)} \sum_{\gamma \neq \alpha} \underline{v}_{\alpha\gamma}^{(s)} \underline{\psi}_{\gamma},$$

где $\underline{G}_{\alpha}^{(1)} = {}_{\alpha} \langle \widetilde{nm} | G_{\alpha}^{(1)} | \widetilde{n'm'} \rangle_{\alpha}$, $\underline{v}_{\alpha\gamma}^{(s)} = {}_{\alpha} \langle nm | v_{\alpha}^{(s)} | n'm' \rangle_{\gamma}$ и $\underline{\Phi}_{\alpha}^{(1)} = {}_{\alpha} \langle \widetilde{nm} | \Phi_{\alpha}^{(1)} \rangle$, и вычислить амплитуды рассеяния по формулам

$$A_{\alpha j, \beta i} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \underline{\Phi}_{\alpha j}^{(1)-} \underline{v}_{\alpha\gamma}^{(s)} \underline{\psi}_{\gamma}, \quad A_{\alpha 0, \beta i} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \underline{\Phi}_{\alpha 0}^{(1)-} \underline{v}_{\alpha\gamma}^{(s)} \underline{\psi}_{\gamma}.$$

3.2. Вычисление матричных элементов $\underline{G}_\alpha^{(l)}$ и $\underline{\Phi}_\alpha^{(l)}$. Хотя матричные элементы потенциала $v_\alpha^{(s)}$ всегда можно вычислить, по крайней мере, численно, нам необходимы дальнейшие приближения, чтобы найти в пространстве $L_2(\mathbb{R}^6)$ матричные элементы $\underline{G}_\alpha^{(l)}$ и $\underline{\Phi}_\alpha^{(l)}$.

Для вычисления $\underline{G}_\alpha^{(l)}$ мы воспользуемся уравнением Липпманна–Швингера (4) и покажем, что это интегральное уравнение для матричных элементов можно свести к интегральному уравнению с вырожденным ядром. Уравнение (4) для $\underline{G}_\alpha^{(l)}$ принимает вид

$$\underline{G}_\alpha^{(l)} = \langle \widetilde{nm} | G_\alpha^{\text{as}} | \widetilde{n'm'} \rangle + \langle \widetilde{nm} | G_\alpha^{\text{as}} V_\alpha^{\text{as}} G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle. \quad (22)$$

Рассмотрим типичный интеграл, фигурирующий во втором слагаемом в правой части этого уравнения:

$$\langle f | G_\alpha^{\text{as}} V_\alpha^{\text{as}} G_\alpha^{(l)} | f' \rangle = \int dy''_\alpha dx''_\alpha F_\alpha^{\text{as}}(X'') V_\alpha^{\text{as}}(X'') F_\alpha^{(l)}(X''), \quad (23)$$

где $f, f' \in L_2(\mathbb{R}^6)$, а $F_\alpha^{(l)}$ и F_α^{as} определены в соотношении (8). Разобьем область интегрирования $\mathbb{R}^6$ на две части: $|x''_\alpha| \leq \xi$ и $|x''_\alpha| > \xi$. Старший член в интеграле по второй области в силу (8) для больших ξ принимает вид

$$I(\xi) \sim \int_0^\infty dy y^2 \int_\xi^\infty dx x^2 \frac{e^{2i\sqrt{E}\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^{(6+\epsilon)/2}}.$$

Асимптотический анализ, включающий интегрирование по частям, дает $I(\xi) \sim O(\xi^{-1-\epsilon})$. Другими словами, интеграл (23) можно сузить на асимптотическую двухчастичную область Ω_α конфигурационного пространства. При этом можно воспользоваться явными выражениями (7) и (5) для G_α^{as} и V_α^{as} , верными в этой области, а вместо (22) использовать

$$\underline{G}_\alpha^{(l)} = \langle \widetilde{nm} | \widetilde{G}_\alpha | \widetilde{n'm'} \rangle + \langle \widetilde{nm} | \widetilde{G}_\alpha U^\alpha G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle,$$

где неявно предполагается ограничение интегрирования на область Ω_α . Далее, в силу квадратичной интегрируемости функции U^α по переменной y_α (см. условие (6)) и с учетом соотношения (8) можно записать

$$U^\alpha G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle = \mathbf{1}_\alpha^N U^\alpha G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle + (\mathbf{1} - \mathbf{1}_\alpha^N) U^\alpha G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle.$$

Повторив рассуждения, которые привели к формуле (17), получаем

$$\begin{aligned} \underline{G}_\alpha^{(l)} &= \widetilde{\underline{G}}_\alpha + \widetilde{\underline{G}}_\alpha U^\alpha \underline{G}_\alpha^{(l)} + \langle \widetilde{nm} | \widetilde{G}_\alpha (\mathbf{1} - \mathbf{1}_\alpha^N) U^\alpha G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle + \\ &+ \langle \widetilde{nm} | \widetilde{G}_\alpha \mathbf{1}_\alpha^N U^\alpha (\mathbf{1} - \mathbf{1}_\alpha^N) G_\alpha^{(l)} | \widetilde{n'm'} \rangle. \end{aligned}$$

С помощью тех же рассуждений, что и выше, легко показывается, что вклад последних двух членов в решение $\underline{G}_\alpha^{(l)}$ можно сделать сколь угодно малым с помощью подходящего выбора параметра разложения N . Таким образом, мы свели задачу решения уравнения (22) к чисто алгебраической задаче

$$\underline{G}_\alpha^{(l)} = \widetilde{\underline{G}}_\alpha + \widetilde{\underline{G}}_\alpha U^\alpha \underline{G}_\alpha^{(l)}.$$

Аналитическая структура $g_{x_\alpha}(z - z')$ и $g_{y_\alpha}(z')$ как функций z' при $z = E + i\varepsilon$, $E > 0$, $\varepsilon > 0$. Контур C окружает непрерывный спектр оператора g_{y_α} и не захватывает сингулярностей оператора g_{x_α} . Штриховая кривая – часть контура, принадлежащая второму листу римановой поверхности g_{y_α} .

Похожее уравнение оказывается верным для матричных элементов волновой функции:

$$\underline{\Phi}_\alpha^{(1)} = \underline{\tilde{\Phi}}_\alpha + \underline{\tilde{G}}_\alpha \underline{U}_\alpha \underline{\Phi}_\alpha^{(1)},$$

где $\underline{\tilde{\Phi}}_\alpha = \langle \tilde{n} | \phi_\alpha \rangle \otimes \langle \tilde{m} | \chi_\alpha^{(1)} \rangle$ – прямые произведения матричных элементов двухчастичной волновой функции.

Для вычисления матричных элементов $\underline{\tilde{G}}_\alpha$ можно воспользоваться представлением в виде контурного интеграла (7):

$$\underline{\tilde{G}}_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' {}_\alpha \langle \tilde{n} | g_{x_\alpha}(z - z') | \tilde{n}' \rangle {}_\alpha \langle \tilde{m} | g_{y_\alpha}(z') | \tilde{m}' \rangle {}_\alpha.$$

Контур C следует выбрать так, чтобы он охватывал разрез оператора g_{y_α} и не захватывал сингулярностей оператора g_{x_α} . Для энергий связанных состояний разрезы двух функций Грина хорошо разделены, и это условие легко можно выполнить [3]. Также для энергий рассеяния ниже порога развала, на котором соответствующий связанному состоянию полюс g_{x_α} может попасть на разрез оператора g_{y_α} , все еще можно произвести контурное интегрирование [4]. Для других задач рассеяния с положительной энергией, однако, непрерывные спектры перекрываются, и поэтому необходимый контур не существует.

К счастью, существует контур, подходящий для любых z , представляющих физический интерес. Кроме положительных вещественных значений z , возникающих при рассеянии выше порога развала, этот контур позволяет рассмотреть комплексные значения z с отрицательными мнимыми частями, необходимые для вычислений резонансных состояний. В этом случае надо сначала сдвинуть разрез оператора $g_{x_\alpha}(z)$, взяв $z = E + i\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$. В результате два разреза хорошо разделяются, и разрез оператора $g_{y_\alpha}(z)$ можно охватить. Затем контур C аналитически деформируется так, что верхняя часть переходит на второй лист римановой поверхности $g_{y_\alpha}(z)$, тогда как нижнюю часть C можно повернуть в другую сторону от разреза (см. рисунок). Контур по-прежнему будет охватывать точку ветвления римановой поверхности оператора $g_{y_\alpha}(z)$, но в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ он теперь не захватывает сингулярностей оператора $g_{x_\alpha}(z)$. Более того, при продолжении на отрицательные значения ε точка ветвления и полюсы $g_{x_\alpha}(z)$ сдвигаются на второй лист римановой поверхности

$g_{y_\alpha}(z)$, и в то же время разрез римановой поверхности $g_{y_\alpha}(z)$ сдвигается на второй лист $g_{x_\alpha}(z)$. Таким образом, необходимые условия для представления $\tilde{G}_\alpha(z)$ в виде контурного интеграла в уравнении (7) можно выполнить при любых энергиях. В этом отношении нет качественной разницы между вычислениями для связанных и резонансных состояний, также как для рассеяний ниже и выше порога развала.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы показали, что ядра интегральных уравнений Фаддеева–Меркурьева для $(2 \rightarrow 2, 3)$ -рассеяния можно аппроксимировать с помощью дискретного базиса гильбертова пространства. Для нахождения амплитуд рассеяния необходимы только матричные элементы канальной дальнедействующей функции Грина между базисными состояниями. Для вычисления этих матричных элементов мы использовали определенное уравнение Липпманна–Швингера и показали, что в этом особом случае ядро тоже можно аппроксимировать, используя конечный базис. Это обрезание включает сужение асимптотической канальной дальнедействующей функции Грина на двухчастичный сектор трехчастичного конфигурационного пространства, где ее можно представить в старшем порядке с помощью свертки двухчастичных функций Грина. Для вычисления свертки мы предлагаем контур, применимый при всех энергиях, представляющих физический интерес.

В принципе можно было взять любой дискретный базис гильбертова пространства, но мы полагаем, что базис кулоновских штурмовских функций [14] имеет преимущества при практических вычислениях. Причина этого состоит в том, что такой базис допускает точное аналитическое вычисление двухчастичных функций Грина и других двухчастичных величин [15]. В результате контурный интеграл тоже можно вычислить. Практичность этого подхода уже была продемонстрирована в работах [3]–[5]. В настоящей статье представлен формализм, позволяющий использовать подобный подход в задачах рассеяния при энергиях выше порога развала, а также для отталкивающих притягивающих взаимодействий кулоновского типа.

Благодарности. Работа С. Л. Яковлева была частично поддержана NSF (грант Phy-0243740) и РФФИ (грант № 08-02-01115).

Список литературы

- [1] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [2] J. V. Noble, *Phys. Rev.*, **161**:4 (1967), 945–955.
- [3] Z. Papp, W. Plessas, *Phys. Rev. C*, **54**:1 (1996), 50–56.
- [4] Z. Papp, *Phys. Rev. C*, **55**:3 (1997), 1080–1087.
- [5] Z. Papp, *Few-Body Systems*, **24**:4 (1998), 263–270.
- [6] Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН СССР, **69**, ред. И. Г. Петровский, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963.
- [7] С. П. Меркурьев, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **77**, 1978, 148–187.
- [8] S. P. Merkuriev, *Ann. Phys.*, **130**:2 (1980), 395–426; *Acta Phys. Austriaca*, **23** (1981), 65–110.

- [9] V. Vanzani, *Few-Body Nuclear Physics*, Lectures presented at the Workshop on Few-Body Problems in Nuclear Physics (Trieste, 13–16 March 1978), eds. G. Pisent, V. Vanzani, L. Fonda, IAEA, Vienna, 1978, 57.
- [10] W. Glöckle, *Nucl. Phys. A*, **141**:3 (1970), 620–630; **158**:1 (1970), 257–277.
- [11] С.Л. Яковлев, *ТМФ*, **107**:3 (1996), 531–528.
- [12] W. Sandhas, *Few-Body Nuclear Physics*, Lectures presented at the Workshop on Few-Body Problems in Nuclear Physics (Trieste, 13–16 March 1978), eds. G. Pisent, V. Vanzani, L. Fonda, IAEA, Vienna, 1978, 3.
- [13] O.M. Deryuzhkova, S.B. Levin, S.L. Yakovlev, *J. Phys. B*, **39**:22 (2006), 4767–4773; S.B. Levin, S.L. Yakovlev, *Few-Body Systems*, **44**:1–4 (2008), 249–251.
- [14] M. Rotenberg, *Ann. Phys.*, **19**:2 (1962), 262–278; “Theory and Application of Sturmian Functions”, *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.*, **6**, 1970, 233–268.
- [15] Z. Papp, *J. Phys. A*, **20**:1 (1987), 153–162; *Phys. Rev. C*, **38**:5 (1988), 2457–2460; *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 4437–4439; *Comput. Phys. Comm.*, **70**:2 (1992), 426–434; B. Kónya, G. Lévai, Z. Papp, *J. Math. Phys.*, **38**:9 (1997), 4832–4844.

Поступила в редакцию 1.10.2009,
после доработки 17.11.2009