Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Й. Х. Брауэрс, Уравнение Ланжевена для частицы
жидкости в потоке с вызванной наличием стенок турбу-
лентностью, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 2, 328–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 09:57:47

© 2010 г.

Й. Й. Х. Брауэрс*

УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ ЖИДКОСТИ В ПОТОКЕ С ВЫЗВАННОЙ НАЛИЧИЕМ СТЕНОК ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Приведен вывод уравнения Ланжевена, описывающего стохастический процесс движения частиц жидкости в потоке с турбулентностью, вызванной наличием стенок (поток в трубах, каналах и граничных слоях, включая атмосферный поверхностный слой). Анализ основан на асимптотике больших чисел Рейнольдса. Используется лагранжева теория Колмогорова, недавно полученные асимптотические выражения для пространственного распределения турбулентной диссипации энергии, а также заново, с учетом недавних результатов измерений, выведенные соотношения двойственности, аналогичные соотношениям Онзагера. Применяемый для вывода уравнения Ланжевена предел больших времен приводит к уравнению диффузии для дисперсии примеси в потоке с турбулентностью, вызванной наличием стенок.

Ключевые слова: турбулентность, дисперсия, уравнение Ланжевена, двойственность Онзагера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поток жидкости, ограниченный стенками, подобными земной поверхности или стенкам трубы, часто имеет турбулентную природу. Скорость и давление в жидкости случайным образом изменяются во времени и пространстве. Несмотря на многочисленные усилия, прилагаемые в течение последних ста лет, не существует общего математического описания стохастического процесса турбулентности. Лучшее из достигнутого – это асимптотические формулы для некоторых статистических параметров, выполненные в пределе больших значений числа Рейнольдса $Re = u_* L \nu^{-1}$, где u_* – сдвиговая скорость ($u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, τ_0 – среднее сдвиговое напряжение, передаваемое стенке со стороны жидкости, ρ – плотность жидкости), ν – кинематическая вязкость жидкости, а L – внешняя длина: радиус трубы, полуширина канала, толщина турбулентного граничного слоя вдоль стенки или вдоль земной поверхности.

К настоящему моменту выведены несколько асимптотических выражений, пригодных при $Re \gg 1$, например знаменитое описание мелкомасштабной турбулентности Колмогорова [1] и логарифмический закон для средних скоростей потока вдоль

*Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands.
E-mail: J.J.H.Brouwers@tue.nl

стенки [2]. Но классическая задача расчета турбулентной дисперсии остается нерешенной. Заслуживающая уважения теория существует только для однородной изотропной турбулентности, являющейся теоретической абстракцией, и уходит корнями в работу [3], написанную в 1922 г. Турбулентность, однако, представляет собой неоднородный анизотропный процесс. Во всех важных случаях турбулентных потоков статистические средние скорости жидкости в выбранной точке (т. е. эйлеровы средние) значительно изменяются в зависимости от положения в пространстве и от направления.

До сих пор не появилось теории, которая убедительным образом учитывала бы дисперсию примеси в случае неоднородной анизотропной турбулентности. Стандартный подход состоит в использовании гипотезы Буссинеска, что приводит к полуэмпирическому уравнению для турбулентной дисперсии [2]. Выражения для коэффициентов диффузии, используемые в этом уравнении, носят приближенный характер; они опираются на аналогию Рейнольдса и подгонку к результатам измерений.

Более фундаментальным является подход, исходный пункт которого – уравнение Ланжевена для скорости частицы жидкости; этот подход аналогичен описанию релеевской частицы в молекулярной динамике [4]. Важное преимущество данного метода состоит в том, что он согласован с асимптотической структурой турбулентного потока при больших числах Рейнольдса. Можно добиться, чтобы уравнения соответствовали пределу инерционной подобласти в лагранжевом варианте теории подобия Колмогорова [5]. Большой проблемой, однако, остается вид демпфирующей функции, которая используется в уравнении Ланжевена. Тогда как для однородной изотропной турбулентности демпфирующая функция хорошо известна, нет ни единого выражения, пригодного в случае анизотропной неоднородной турбулентности.

В настоящей работе рассмотрена задача о дисперсии примеси в потоке с неоднородной анизотропной турбулентностью, вызванной наличием стенок. Использовано уравнение Ланжевена. Получено почти асимптотически точное выражение для демпфирующей функции. При этом используются лагранжево описание в теории Колмогорова, недавно полученные асимптотические формулы для пространственного распределения турбулентной диссипации энергии, а также заново выведенные соотношения двойственности, аналогичные соотношениям симметрии Онзагера. Применяемый при выводе уравнения Ланжевена предел больших времен приводит к почти точному варианту уравнения диффузии для дисперсии примеси в потоке с вызванной наличием стенок турбулентностью.

2. УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА

Описание стохастического процесса турбулентного движения частиц жидкости с помощью уравнения Ланжевена содержит предположение о том, что ускорение частицы жидкости представляет собой дельта-коррелированный процесс. Обоснованием такого предположения в теории турбулентности является тот факт, что ускорения обуславливаются мелкомасштабными по отношению к масштабу Колмогорова, “вязкими” движениями [5], что, по-видимому, подтверждается экспериментом [6].

Корреляционные времена ускорений частиц относятся к корреляционным временам скоростей, как $\text{Re}^{-1/2}$. При увеличении значения Re случайный процесс, описывающий скорость крупномасштабной стохастической турбулентности, будет скорее всего все более и более походить на марковский процесс, и его можно будет описать с помощью уравнения Ланжевена. Слагаемое в уравнении, содержащее белый шум, можно задавать в соответствии с пределом инерционной подобласти лагранжевой теории подобия Колмогорова без перемежаемости [5]. Уравнение Ланжевена, пригодное в случае стохастической турбулентности, тогда принимает вид [7]

$$\frac{dv'_i}{dt} = a'_i(\mathbf{v}', \mathbf{x}) + \sqrt{C_0 \epsilon(\mathbf{x})} w_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(t)$ – случайная флуктуация скорости частицы жидкости относительно эйлеровой средней скорости $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, вычисленной, когда частица имеет координату $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Скорость связана с координатой:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i^0(\mathbf{x}) + v'_i. \quad (2)$$

В уравнении (1) $a'_i = a'_i(\mathbf{v}', \mathbf{x})$ – демпфирующая функция, C_0 – универсальная постоянная Колмогорова, $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$ – скорость диссипации энергии, усредненная при фиксированной координате, а $w_i(t)$ – гауссов белый шум единичной интенсивности. Уравнения (1), (2) можно решить для различных реализаций $w_i(t)$ при подходящих условиях при $t = 0$. Статистики скорости и координаты отмеченной частицы жидкости или пассивной жидкой примеси можно затем оценить, усредняя по этим реализациям получившиеся результаты в фиксированный момент времени. Рассчитанные таким образом средние обозначаются чертой сверху. Альтернативный метод получения той же статистической информации состоит в решении связанного с уравнениями (1), (2) уравнения Фоккера–Планка относительно совместного распределения вероятностей для скорости и координаты частицы.

Для описания статистики скоростей частиц с помощью уравнения Ланжевена привлекают обычную теорию Колмогорова без перемежаемости (теорию К-41). Эффекты перемежаемости при таком подходе не учитываются. Можно принять фрактальную модель, основанную на уточненной теории подобия Колмогорова [8]. Однако в этом случае статистические средние смещений частицы, которые определяют турбулентную дисперсию, меняются мало [9], [10]. Эффект перемежаемости ясно виден на малых (“вязких”), а не на больших (“энергетических”) масштабах, которые управляют случайным процессом, описывающим скорости в турбулентном потоке при $\text{Re} \gg 1$ [11]. Среди прочих причин именно поэтому модель Ланжевена, основанная на теории К-41, считается разумным подходом к описанию дисперсии.

Чтобы предсказать статистику скорости и координаты частицы с использованием уравнений (1), (2), требуется задать $u_i^0(\mathbf{x})$, $\epsilon(\mathbf{x})$ и $a'_i(\mathbf{v}', \mathbf{x})$. Описание средних эйлеровых скоростей в потоке с вызванной наличием стенок турбулентностью получено и теоретически, и экспериментально [2]. Для средней скорости диссипации энергии можно использовать асимптотическое равенство рассеянной и произведенной энергий [12]. Что неизвестно в уравнении Ланжевена, так это демпфирующая функция

$a'_i(\mathbf{v}', \mathbf{x})$. Ее вид установлен только для однородной изотропной турбулентности [7], [13], [14]. Для практически важного случая неоднородной, вызванной наличием стенок турбулентности не существует хорошо обоснованной единой формулы для $a'_i(\mathbf{v}', \mathbf{x})$. Такая формула будет получена в следующем разделе.

3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕМПФИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Описание статистики скоростей и координат частицы с помощью уравнений (1), (2) является лагранжевым. В последние годы существенный прогресс был достигнут в экспериментальном и численном определении лагранжевых свойств турбулентного потока [15]. Результаты укладываются в тенденцию, подтверждающую лагранжевый вариант универсальной мелкомасштабной теории Колмогорова (см., например, статью [6]). В этом качестве они подтверждают правомерность использования вынуждающего члена в уравнении Ланжевена (1), в котором суммированы эффекты, оказываемые на статистику скорости малыми, “вязкими” масштабами при $Re \gg 1$. Но отмеченные результаты, основанные на лагранжевом подходе, менее полезны, когда дело касается конкретизации демпфирующего члена, который в значительной степени определяет статистическое поведение скоростей и смещений частицы. Это поведение управляется большими, “энергетическими” масштабами турбулентности, структура которой неоднородна и зависит от конфигурации, где реализован турбулентный поток. Лагранжеву статистику можно использовать для определения демпфирующей функции, если она охватывает область, достаточно большую для проявления пространственной зависимости статистических параметров. Более того, в данном случае она должна применяться к конфигурациям, отвечающим турбулентности, порожденной средними потоками вдоль стенок. В разделе 8 мы используем те немногие имеющиеся результаты, которые удовлетворяют этим критериям.

Более плодотворный подход к получению информации, ведущей к конкретизации демпфирующей функции, состоит в установлении связи с более хорошо изученной областью эйлеровой (т. е. для фиксированной точки) статистикой скорости. Эта связь получается из эйлеровой интерпретации уравнения Фоккера–Планка, ассоциированного с уравнениями (1), (2), известного также как условие хорошего перемешивания (well-mixed condition) [16]. Это дает предписание для задания плотности вероятности эйлеровой скорости в фиксированной точке. Эйлеров вариант уравнения Фоккера–Планка, которое связано с уравнениями (1), (2) и подходит для вызванной наличием стенок турбулентности, имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial u'_i} a'_i(\mathbf{u}', x_2)p + \frac{1}{2} C_0 \epsilon \frac{\partial^2 p}{\partial u'_i \partial u'_i} = u'_2 \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (3)$$

где $p = p(\mathbf{u}')$ – плотность вероятности флуктуаций (эйлеровой) скорости жидкости $\mathbf{u}$ в фиксированной точке. В уравнении (3) и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. При формулировке уравнения (3) мы использовали следующее свойство вызванной наличием стенок турбулентности: эйлерова статистика

стационарна ($\partial p / \partial t = 0$) и изменяется только в зависимости от расстояния x_2 в направлении, перпендикулярном стенке. Это в точности имеет место для развитого турбулентного потока в трубах и (почти) двумерных каналах и представляет собой хорошее приближение для турбулентных граничных слоев вдоль плоских пластин, включая нейтрально стратифицированный слой атмосферы вблизи поверхности (см., например, [2]). Тогда как x_2 – координата вдоль направления, перпендикулярного стенке и среднему потоку, координаты x_1 и x_3 берутся соответственно в направлении среднего потока параллельно стенке и в направлении, перпендикулярном среднему потоку и параллельном стенке. Средний поток в (2) описывается уравнением

$$u_i^0(\mathbf{x}) = u_1^0(x_2)\delta_{1i}, \quad (4)$$

где δ_{1i} – символ Кронекера.

Чтобы задать демпфирующую функцию $a'_i(\mathbf{v}', \mathbf{x})$ в уравнении Ланжевена (1), сначала подробнее рассмотрим инерционный подслой – область вне вязкого слоя, где средний поток $u_1^0(x_2)$ можно описывать логарифмическим законом [2]. Инерционный подслой лежит в области $\text{Re}^{-1} \ll x_2/L \ll 1$, на практике – в области $30 \text{Re}^{-1} \lesssim x_2/L \lesssim 0.1$. Ниже (см. раздел 7) мы распространим наши результаты на всё основное сечение $30 \text{Re}^{-1} \lesssim x_2/L \leq 1$. В инерционном подслое случайные значения флуктуаций скорости можно считать не зависящими от x_2 . Более того, асимптотический анализ уравнений энергетического баланса показывает, что в инерционном подслое диссипация энергии равна ее производству [12]. Отсюда следует, что в инерционном подслое скорость диссипации энергии ведет себя как

$$\epsilon = \kappa^{-1} \frac{u_*^3}{x_2}, \quad \text{Re}^{-1} \ll \frac{x_2}{L} \ll 1, \quad (5)$$

где κ – постоянная фон Кармана, $\kappa \approx 0.4$. Осмысленные выражения для p можно получить из уравнения (3), только если в предельном процессе при $x_2 \rightarrow 0$, применимом для инерционного подслоя, удерживаются и демпфирующий, и диффузионный члены. При этом p должна перестать зависеть от x_2 , потому что в инерционном подслое статистические характеристики флуктуаций скорости постоянны. Для этого требуется, чтобы

$$a'_i(\mathbf{u}', x_2) = \frac{\tilde{a}'_i(\mathbf{u}')}{x_2}, \quad (6)$$

и тогда уравнение (3) принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial u'_i} \tilde{a}'_i(\mathbf{u}') p + \frac{1}{2} C_0 \kappa^{-1} u_*^3 \frac{\partial^2 p}{\partial u'_i \partial u'_i} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) задает пространственную зависимость демпфирующей функции, остается лишь конкретизировать ее зависимость от скорости.

4. ГАУССОВЫ СКОРОСТИ И ЛИНЕЙНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ

Следующий шаг состоит в предположении, что эйлеровы скорости в отдельной точке имеют гауссово распределение. Измерения дают типичные абсолютные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса $\lesssim 0.3$ [17]–[19]. При этом реалистичный подход состоит в использовании модели Ланжевена, что приводит к гауссовой статистике эйлеровых скоростей. Для этого необходимо, чтобы функция $\tilde{a}'_i(\mathbf{u}')$ в уравнении (7) была линейна по $\mathbf{u}'$:

$$\tilde{a}'_i(\mathbf{u}') = -\alpha_{ij}u'_j. \quad (8)$$

Экспериментальные данные свидетельствуют, что гауссовость является разумным предположением. Линейность демпфирования и гауссовость эйлеровых скоростей можно также извлечь из соответствия между рассматриваемым случайным процессом, описывающим флуктуации скорости, и случайным процессом, описывающим замкнутые недиссипативные гамильтоновы системы, известные из теоретической физики. Ниже будет показано (см. раздел 6), что такое соответствие имеет место, если обратная постоянная Колмогорова мала.

5. ПОДБОР КОВАРИАЦИЙ

Хорошее перемешивание достигается за счет требования согласованности решения уравнений (7), (8) со значением тензора ковариации $\sigma_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ эйлерова поля скорости, который мы предполагаем известным (угловые скобки обозначают среднее по ансамблю при фиксированных координатах; поскольку мы имеем дело со стационарной турбулентностью и предполагаем эргодичность, можно также применять усреднение по времени при фиксированных координатах). Данное требование приводит к соотношениям между α_{ij} и σ_{ij} . Их можно получить, подставляя общее трехмерное гауссово распределение в уравнение (7) и приравнявая подобные члены. Более простой и прямой способ состоит в умножении уравнения (7) на $u'_m u'_n$, интегрировании по всем значениям $\mathbf{u}'$ и применении интегрирования по частям. Это дает

$$\alpha_{nj}\sigma_{jm} + \alpha_{mj}\sigma_{jn} = \delta_{mn}C_0\kappa^{-1}u_*^3, \quad (9)$$

где, напомним, по повторяющимся индексам проводится суммирование. Для рассматриваемого типа турбулентности можно предполагать симметрию при отражении относительно плоскости (x_1, x_2) , другими словами, отсутствие корреляций между скоростями частиц в x_3 -направлении и скоростями вдоль потока в x_1 -направлении и в нормальном к стенке x_2 -направлении. Отсюда следует, что $\alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0$. Решение уравнения (9) тогда принимает вид

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\kappa^{-1}C_0u_*^3(\lambda_{ij} + b_0\gamma_{ij}), \quad (10)$$

где $\lambda_{ij} = \sigma_{ij}^{-1}$ – обратный тензор ковариации:

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} d^{-1}\sigma_{22} & -d^{-1}\sigma_{12} & 0 \\ -d^{-1}\sigma_{12} & d^{-1}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{-1} \end{pmatrix}, \quad d = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0. \quad (11)$$

Отметим, что u'_3 не коррелировано с u'_1 и u'_2 . Тензор γ_{ij} определяется как

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -d^{-1}\sigma_{12} & d^{-1}\sigma_{11} & 0 \\ -d^{-1}\sigma_{22} & d^{-1}\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В уравнении (10) b_0 – постоянная, значение которой неизвестно. Ее появление связано с тем, что после применения условия хорошего перемешивания мы имеем пять неизвестных α_{ij} и эффективно четыре уравнения (см. уравнения (9)). Это является отражением того факта, который известен как проблема неединственности: полное статистическое описание эйлеровых скоростей в фиксированной точке недостаточно для полного задания уравнения Ланжевена с условием хорошего перемешивания [7]. Равным образом, вследствие конвекции малых масштабов за счет больших масштабов нельзя получить никакой конкретной информации из временных корреляций эйлеровых скоростей [21]. Мы решим проблему неединственности, вводя требование двойственности, аналогичное онзагеровскому, одновременно используя результаты измерений и прямого численного моделирования.

6. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Обратимся к случайному процессу, описывающему флуктуации частицы жидкости, которая при $t = 0$ находится на расстоянии L_0 от стенки. Безразмерные переменные, обозначаемые звездочками, вводятся как

$$x_2 = L_0 x_2^*, \quad t = L_0 u_*^{-1} t^*, \quad v'_i = u_* v'^*_i, \quad \alpha^*_{ij} = \lambda^*_{ij} + b_0 \gamma^*_{ij}, \quad (13)$$

где λ^*_{ij} и γ^*_{ij} определяются согласно формулам (11), (12) с заменой σ_{ij} на $\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij}/u_*^2$. Применяя равенства (13) и опуская звездочки, получаем из соотношений (1), (5), (6), (8) и (10) безразмерное уравнение Ланжевена

$$\frac{dv'_i}{dt} = -\frac{1}{2} C_0 \kappa^{-1} (\lambda_{ij} + b_0 \gamma_{ij}) \frac{v'_j}{x_2} + \left(\frac{C_0 \kappa^{-1}}{x_2} \right)^{1/2} w_i(t), \quad (14)$$

где

$$\frac{dx_2}{dt} = v'_2. \quad (15)$$

Демпфирующий тензор состоит из симметричной части λ_{ij} и асимметричной части γ_{ij} . Наличие асимметричной части приводит к тому, что кросс-корреляционные функции $\overline{v'_1(0)v'_2(t)}$ и $\overline{v'_2(0)v'_1(t)}$ отличаются друг от друга (черта сверху обозначает усреднение при фиксированных временах по многим реализациям лагранжевых переменных, где каждая реализация при $t = 0$ начинается со случайного значения скорости, выбранного в соответствии с гауссовым распределением эйлеровой скорости в отмеченной точке $x_2 = 1$). Различие между обеими кросс-корреляционными функциями зависит от величины b_0 : чем больше b_0 , тем больше различие. Из соотношения двойственности Онзагера [20], [22] следует, что корреляции должны быть одинаковыми: $b_0 = 0$. Однако предварительным условием двойственности является

гамильтонова динамика частиц. На самом деле динамика частиц жидкости негамильтонова, поскольку имеет место диссипация за счет вязкости. Эффект вязкости замечен в турбулентности малых, “вязких” масштабов. Вклад этих масштабов в корреляционные функции скоростей обращается в нуль при возрастании числа Рейнольдса. Точнее, их эффект уменьшается вплоть до нарушения непрерывности в наклоне касательных к автокорреляционным функциям при $t \rightarrow 0$ (см. также рис. 1). Тем не менее при $Re \rightarrow \infty$ в энергетическом уравнении турбулентного потока эффект диссипации не исчезает [11]. Имеется непрерывный поток энергии от ее производства при больших масштабах до диссипации при малых масштабах. Это можно увидеть, посмотрев на среднюю скорость диссипации энергии, величина которой равна $\kappa^{-1} u_*^3 L_0^{-1} x_2^{-1}$ (см. уравнение (5)). Изменение полной энергии как функции от безразмерного времени (см. формулы (13)) сводится к выражению $u_*^2 \kappa^{-1} t x_2^{-1}$. Таким образом, относительное изменение энергии $\Delta H / u_*^2$ порядка $O(1)$ происходит за промежуток времени длины t порядка $O(1)$.

Все же имеется возможность до некоторой степени использовать двойственность в проблеме турбулентности, поскольку постоянная Колмогорова в уравнении Ланжевена имеет относительно большое значение. Для потока с большим числом Рейнольдса величина C_0 может достигать 6 [14]. Из уравнения (14) видно, что время случайных флуктуаций скорости имеет масштаб C_0^{-1} , скорости некоррелированы на временах C_0^{-1} . При решении уравнения Ланжевена с помощью разложения по степеням C_0^{-1} эффект диссипации в первом члене будет отсутствовать. Чтобы рассмотреть это подробнее, введем параметр разложения

$$\varepsilon_1 = C_0^{-1}. \quad (16)$$

Масштабируя время и координату,

$$t = \varepsilon_1 t', \quad x_2 = 1 + \varepsilon_1 x'_2, \quad (17)$$

получаем, что уравнение Ланжевена (14) принимает вид

$$\frac{dv'_i}{dt'} = -\frac{1}{2} \kappa^{-1} (\lambda_{ij} + b_0 \gamma_{ij}) \frac{v'_j}{1 + \varepsilon_1 x'_2} + \left(\frac{\kappa^{-1}}{1 + \varepsilon_1 x'_2} \right)^{1/2} w_i(t'), \quad (18)$$

причем (ср. уравнение (15))

$$x'_2 = \int_0^{t'} v'_2 dt. \quad (19)$$

С ошибкой порядка $O(\varepsilon_1^2)$ изменение полной энергии принимает вид

$$\frac{\Delta H}{u_*^2} \sim \varepsilon_1 t', \quad (20)$$

где $\sim$ означает асимптотическое равенство.

Рис. 1. Корреляционные функции лагранжевых скоростей в зависимости от безразмерного времени t' для вызванной наличием стенок турбулентности при $b_1 = 1$ и $C_0 = 5$ (сплошные линии) и для недиссипативных классических систем (штриховые линии); в обоих случаях $\kappa = 0.4$, $\sigma_{11} = 5.67u_*^2$, $\sigma_{22} = 1.32u_*^2$ и $\sigma_{12} = -u_*^2$.

Рассмотрим теперь плотность вероятности и корреляционную функцию скорости частицы, описываемой уравнением Ланжевена (18). При представлении решения в виде разложения по степеням ε_1 первый член получается из уравнения (18) при $\varepsilon_1 = 0$. В качестве решения данного уравнения Ланжевена имеем экспоненциально коррелированный гауссов процесс [4], который, как известно, используется при описании замкнутых недиссипативных систем [22]. Более того, лежащая в его основе динамика частицы жидкости в случае, когда $\varepsilon_1 = 0$, но $t' = O(1)$, инвариантна по времени и является гамильтоновой, что следует из уравнения (20) при $\varepsilon_1 = 0$. Это также согласуется с динамикой на промежуточном временном интервале, большом по сравнению с “вязким” временем Колмогорова и малым по сравнению с временным масштабом производства энергии, где применима кусочная динамика, основанная на гамильтоновом описании потока жидкости (см., например, работу [23]). В главном порядке по ε_1 случайный процесс, описывающий турбулентность, тождествен процессу в классических системах. Двойственность Онзагера должна выполняться, и демпфирующая функция должна быть симметричной: $b_0 = 0$ с точностью $O(\varepsilon_1^0)$. Понятно, что это не обязательно так в произвольном порядке $O(\varepsilon_1)$: тогда нельзя больше пренебрегать изменением энергии на соответствующих временных масштабах. Таким образом, мы заключаем, что

$$b_0 = b_1\varepsilon_1, \quad (21)$$

где b_1 – величина порядка единицы. Ее значение будет оценено по результатам прямого численного моделирования и измерений в разделе 8.

На рис. 1 корреляционные функции скоростей частиц представлены в зависимости от безразмерного времени t' . В случае классической системы ($\varepsilon_1 = 0$ в соотношениях (18)–(21)) и в случае, типичном для вызванной наличием стенок турбулентности ($\varepsilon_1 = 0.20$, $b_1 = 1$). В обоих случаях взяты $\kappa = 0.4$, $\sigma_{11}^* = 5.67$, $\sigma_{22}^* = 1.32$ и

$\sigma_{12}^* = -1$. Эти значения соответствуют результатам измерений в потоках с вызванной наличием стенок турбулентностью при большом числе Рейнольдса [24]–[26] и результатам прямого численного моделирования [27]. Представленные графики были получены численным интегрированием во временной области связанных флуктуационных уравнений для $v'_1(t)$ и $v'_2(t)$ (см. уравнение (18)). В процессе расчета предполагалось, что в момент времени $t = 0$ частицы начинают движение из точки 0, а их начальные скорости выбираются случайно по гауссову распределению эйлеровых скоростей в этой точке (пассивная разметка частиц жидкости). Численно рассчитывались скорости 10^6 частиц. В случае вызванной наличием стенок турбулентности предполагалось отражение частиц от стенки: $x'_2 = -\varepsilon_1^{-1}$. В малой области вблизи стенки $0 \leq 1 + \varepsilon_1 x'_2 \leq \delta$, $\delta \ll 1$, коэффициент $(1 + \varepsilon_1 x'_2)^{-1}$ был взят постоянным и равным δ^{-1} . Результаты, показанные на рис. 1 и далее в настоящей работе, соответствуют значению $\delta = 10^{-3}$. Оказалось, что уменьшение значения δ пренебрежимо мало влияет на результаты, если длина шага по времени в программе численного решения соответствующим образом сокращается. Это показывает, что присутствие малого вязкого слоя у стенки слабо влияет на результат, а также что присутствие таких членов, как $(1 + \varepsilon_1 x'_2)^{-1}$, во флуктуационных уравнениях не приводит к сингулярному поведению.

Видно, что вклад членов порядка $O(\varepsilon_1)$ относительно невелик. Эффект неоднородности, вызванный присутствием $(1 + \varepsilon_1 x'_2)^{-1}$ в уравнении Ланжевена, мал на малых временных масштабах флуктуаций скорости и уменьшается еще сильнее при уменьшении ε_1 или возрастании C_0 . Дисперсия частиц проявляется на гораздо больших временных масштабах, при этом неоднородность, связанная с зависимостью коэффициентов в уравнении Ланжевена от x_2 , радикально влияет на статистику. Такое поведение можно установить путем численного решения представленных уравнений, включая интегрирование по времени результатов расчета скорости для нахождения смещений. Аналитически подобное поведение можно получить из выражений в замкнутом виде, пригодных для диффузионного предела, которые рассматриваются в разделе 9.

7. ОБОБЩЕНИЕ НА ОСНОВНОЕ СЕЧЕНИЕ

До сих пор мы обращали основное внимание на демпфирующую функцию для инерционного подслоя. На удалении от стенки и инерционного подслоя, другими словами, в основном сечении, где $x_2/L = O(1)$, статистические средние флуктуаций эйлеровых скоростей не могут более считаться постоянными. Прямой способ распространить полученные ранее выражения для демпфирующей функции на основное сечение состоит в том, чтобы взять тензоры λ_{ij} и γ_{ij} , определяемые уравнениями (11) и (12), зависящими от x_2 , $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x_2)$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x_2)$, через зависимость σ_{ij} от x_2 . Заметим, что в основном сечении скорость диссипации энергии $\epsilon = \epsilon(x_2)$ более не аппроксимируется согласно (5), а хорошее перемешивание основано на уравнении (3) вместо уравнения (7). Уравнение Ланжевена (14) можно тогда записать в безразмерном виде

$$\frac{dv'_i}{dt} = -\frac{1}{2}(C_0\lambda_{ij} + b_1\gamma_{ij})\epsilon v'_j + \phi_i + \sqrt{C_0\epsilon} w_i(t), \quad (22)$$

а уравнения для координат частицы – в виде (ср. с уравнениями (2) и (4))

$$\frac{dx_i}{dt} = u_1^0(x_2)\delta_{i1} + v'_i. \quad (23)$$

В уравнение (22) включен член $\phi_i = \phi_i(\mathbf{v}, x_2)$, который описывает дрейф, вызванный пространственными изменениями ковариаций. Выражения для ϕ_i можно вывести из условия хорошего перемешивания, которому соответствует уравнение (3). Требуя хорошее перемешивание для моментов первого порядка, т. е. умножая уравнение (3) на u'_j , интегрируя по всей области определения $\mathbf{u}'$ и используя интегрирование по частям, получаем

$$\phi_i = \frac{d\sigma_{i2}}{dx_2}. \quad (24)$$

Если требовать гауссовость эйлеровых скоростей в фиксированной точке по всему основному сечению, то дрейфовый член, следуя Томсону, можно задать как [16]

$$\phi_i = \frac{d\sigma_{i2}}{dx_2} + \frac{1}{2}\lambda_{jm} \frac{d\sigma_{ij}}{dx_2} (v'_2 v'_m - \sigma_{2m}). \quad (25)$$

Но эта формулировка не единственна: возможны и другие представления дрейфового члена, содержащие квадратичное соотношение для скоростей, например модель Боргаса [28]. Коэффициенты во всех этих формулировках пропорциональны углу наклона ковариаций, и все эти представления удовлетворяют условию хорошего перемешивания. Тем не менее проблема неединственности ϕ_i имеет второй порядок: окончательный эффект, оказываемый ковариацией на неоднородность, мал. Причина состоит в относительно большом значении членов, содержащих $C_0\epsilon$, в уравнении (22). При достаточно больших Re можно выделить инерционный подслой. Здесь ϵ очень велико (см. уравнение (5)), и вклад неоднородности ковариаций за счет ϕ_i очень мал. В этой области уравнение (22) хорошо приближается уравнением (14) и принимает вид, тождественный уравнению (14), если мы переходим к пределу инерционного подслоя. В этом случае все вместе дрейфовые члены обращаются в нуль. В основном сечении ϵ убывает с увеличением расстояния от стенки (см. уравнение (5)), но эффект неоднородности ковариаций остается ограниченным из-за достаточно больших численных значений C_0 .

Подведем итог. Вклад членов, которые описывают дрейф, вызванный неоднородностью ковариаций, невелик. По сравнению с главными членами в демпфирующей функции величина этих членов имеет порядок $C_0^{-1}x_2L^{-1}$, где x_2 – расстояние от стенки, а L – внешняя длина, т. е. радиус трубы, полуширина канала, толщина турбулентного граничного слоя у стенки или вдоль земной поверхности.

Хотя вклад дрейфовых членов ϕ_i , вообще говоря, мал, вклад, связанный с разностью $\Delta\phi_i$ между двумя выражениями для ϕ_i еще меньше. В отмеченной точке распределение вероятностей скоростей частицы совпадает с распределением вероятностей эйлеровых скоростей, средние значения и стандартные отклонения $\Delta\phi_i$ тогда равны нулю. Лишь спустя значительное время статистические средние величины $\Delta\phi_i$ становятся ненулевыми. В разделе 9 мы приведем описания статистических

свойств вектора $\mathbf{v}'$, пригодные в пределе больших времен, т. е. в диффузионном пределе. Из них можно увидеть различия между статистическими характеристиками скорости частицы и эйлеровой скорости, которые имеют малую величину. Окончательный эффект состоит в том, что вклад в дисперсию частицы членов, связанных с $\Delta\phi_i$, очень мал. Численное моделирование показывает, что различие между статистическими характеристиками смещений частицы, полученными с использованием уравнения (24) и уравнения (25), не превосходит 2%. Предсказания значения дисперсии, основанные на уравнении (24) или на уравнении (25), являются одинаково хорошими.

Линейно изменяющаяся часть демпфирующей функции представляет собой важный член в уравнении (22). Она состоит из симметричной и асимметричной частей. Симметричная часть является главным членом в разложении по C_0^{-1} , она единственна и полностью определяется во всем основном сечении. Другими словами, невозможны никакие другие ее виды, если наложить следующие требования в главном порядке по C_0 : гауссовость эйлеровых скоростей в фиксированной точке, хорошее перемешивание согласно уравнению (3) и условие двойственности, аналогичной двойственности Онзагера. Асимметрия в демпфирующей функции может возникнуть только в членах порядка $O(C_0^{-1})$. Значение параметра $b_1 = b_1(x_2)$, появляющегося в этих членах, будет установлено в следующем разделе.

8. ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА АСИММЕТРИИ B_1

Сосредоточимся на (лагранжевой) корреляции между скоростью пассивно отмеченной частицы жидкости в момент времени t и ее скоростью при $t = 0$ в точке $x_2 = x_{20}$. Умножим уравнение (22) на $v'_k(0)$, усредним, используем марковский характер процесса, разложим результат при малых временах $t > 0$ и учтем гауссовость в уравнении (25). Тогда в порядке $O(t)$ имеем

$$\frac{d(\overline{v'_k(0)v'_i(t)})}{dt} = -\frac{1}{2} C_0 \epsilon \delta_{ik} - \frac{1}{2} b_1 \epsilon (\delta_{i1} \delta_{k2} - \delta_{i2} \delta_{k1}), \quad (26)$$

где использовались уравнения (11) и (12). Отсюда находим соотношение для производных кросс-корреляционных функций в порядке $O(t)$:

$$\frac{d(\overline{v'_1(0)v'_2(t)})}{dt} = -\frac{d(\overline{v'_2(0)v'_1(t)})}{dt} = \frac{1}{2} b_1 \epsilon. \quad (27)$$

Видно, что из этого соотношения можно напрямую получить значение b_1 . Оценки кросс-корреляций в потоке с развитой турбулентностью в трубе радиуса R_0 при различных радиальных координатах и при $\text{Re} = u_* R_0 / \nu = 320$ были недавно получены с использованием для измерения скорости частицы метода трехмерного трекинга [29]. Оценки из работы [29] приведены на рис. 2. Полученные на основе этих результатов значения b_1 в зависимости от расстояния до стенки представлены на рис. 3.

Угол наклона кросс-корреляционных функций оценивался по экспериментальным данным, в то время как значения ϵ были получены путем прямого численного

Рис. 2. Кросс-корреляции в зависимости от времени (точки) и касательные к ним (прямые линии), измеренные путем трехмерного трекинга частиц в потоке с развитой турбулентностью по трубе радиуса R_0 при $x_{20} = 0.5R_0$ и $\text{Re} = u_*R_0/\nu = 320$ [29].

моделирования для той же конфигурации. Экспериментальные результаты также использовались для оценки постоянной Колмогорова из структурной функции лагранжевых скоростей [29]. Таким способом определялись постоянные Колмогорова для каждого из трех направлений, различие между их значениями указывает на величину анизотропии. Степень анизотропии, определяющаяся разницей между постоянными Колмогорова в направлении вдоль потока (C_1) и в нормальном к стенке направлении (C_2) как функция расстояния от стенки также показана на рис. 3. Видно, что изотропия максимальна во внутренней части трубы, здесь число Рейнольдса, отвечающее расстоянию от стенки u_*x_2/ν , является наибольшим: в соответствии с теорией Колмогорова становится видимым состояние изотропии малых масштабов. Из результатов при меньших числах Рейнольдса ($u_*R_0/\nu = 180$) можно понять, что с ростом Re степень изотропии возрастает [29], а значения b_1 убывают в целом примерно на 15% при изменении x_2 вплоть до радиуса. Можно сделать вывод, что для вызванной наличием стенок турбулентности при больших числах Рейнольдса значение параметра асимметрии b_1 меньше единицы.

Интересно, что на кросс-корреляционные функции, как представляется, не влияют малые, “вязкие” масштабы при $t \rightarrow 0$, где $\tau_\eta = \sqrt{\nu/\epsilon}$ – “вязкое” время Колмогорова. Тогда как производные автокорреляционных функций стремятся к нулю при $t \rightarrow 0$, это не так для кросс-корреляционных функций. Подобное поведение может быть объяснено изотропией вязких сил: кросс-корреляции вязких сил равны нулю, и вследствие этого значение b_1 можно весьма точно определить по измерениям кросс-корреляций даже при не очень больших значениях числа Рейнольдса. Полученные экспериментально углы наклона двух рассматриваемых кросс-корреляционных функций согласованным образом показали взаимную антисимметрию, предсказываемую уравнением (27) и наблюдаемую также на рис. 2. С другой сторо-

Рис. 3. Коэффициент асимметрии b_1 и степень анизотропии $\frac{2(C_1 - C_2)}{C_1 + C_2}$, полученные на основе измерений работы [29].

ны, кросс-корреляции, полученные путем прямого численного моделирования, показали некоторые отклонения от экспериментально наблюдаемого антисимметричного поведения при определенных радиусах. Это может быть результатом очевидной анизотропии демпфирования, получающейся как результат приближений в схемах численного интегрирования. Альтернативным образом некоторое анизотропное поведение вязких сил, имеющееся при конечных числах Рейнольдса, можно отфильтровать в ходе измерений. Во всяком случае, эти различия слишком малы, чтобы повлиять на вывод о значении b_1 .

Значение b_1 можно также вывести из различия в кросс-корреляционных функциях, полученных путем прямого численного моделирования однородной турбулентности в равномерном сдвиговом течении при тейлоровском числе Рейнольдса, примерно равном 150 ($Re \approx 1500$) [30]. Интересно, что значение b_1 , которое лучше всего соответствует кросс-корреляциям, примерно равно 1 (см. рис. 4). В работе [30] результаты сравнивались также со стохастическими моделями Томсона и Боргаса. Модель Томсона сводится к полной симметрии ($b_1 = 0$), а модель Боргаса преувеличивает асимметрию за счет выбора значения $b_1 \approx 3.6$ (см. рис. 4). Эффекты нестационарности, проявляющиеся в равномерном сдвиговом течении, являются второстепенными, и их можно не учитывать на временных масштабах корреляций скорости.

В целом можно заключить, что асимметрия демпфирующих членов относительно мала. Поскольку двойственность должна выполняться для членов порядка $O(C_0^1)$, асимметрия проявляется только в членах порядка $O(C_0^0)$ (см. уравнение (22)). Значение постоянной асимметрии b_1 меньше единицы. Эффект асимметрии заметен в различии между кросс-корреляционными функциями скоростей частицы (см. рис. 1). С другой стороны, если $|b_1| \lesssim 1$, то статистические характеристики смещения частицы изменяются при изменении b_1 очень незначительно. Это показано на рис. 5, где приведено распределение частиц в направлении, нормальном к стенке, в логарифмическом слое в зависимости от горизонтального расстояния при усло-

Рис. 4. Кросс-корреляции R_{ij} i -й и j -й компонент скорости как функции безразмерного временного лага из работы [30]: $\bullet$ и $\blacklozenge$ – результаты прямого численного моделирования лагранжевой статистики, штриховые линии – результаты расчета в модели Боргаса ($b_1 = 3.6$), пунктир – результаты расчета в модели Томсона ($b_1 = 0$). Сплошные линии – результаты расчета в нашей модели ($b_1 = 1$) при значениях параметров $\sigma_{11} = 0.57$, $\sigma_{22} = 0.31$, $\sigma_{12} = -0.22$, $d\sigma_{ij}/dx_2 = 0$, $\epsilon = 0.66$ и $C_0 = 4$.

Рис. 5. Распределение частиц в направлении, нормальном к стенке, в зависимости от горизонтальной координаты (вдоль потока), при наличии точечного источника; значения параметра асимметрии $b_1 = 0$ (сплошные линии) и $b_1 = 1$ (пунктир). Показаны координаты x_2 , отвечающие вероятностям непревышения 16% (P16), 50% (P50) и 84% (P84).

вии, что в точке $(x_1, x_2) = (0, L_0)$ находится точечный источник. Изображенные кривые соответствуют координатам x_2 с вероятностями неперевышения, равными 16%, 50% и 84% в случаях $b_1 = 0$ и $b_1 = 1$, при этом $C_0 = 5.5$. Распределение средней горизонтальной скорости (скорости ветра) согласуется с логарифмическим законом: $u_1^0(x_2) = \kappa^{-1} \ln(9 \text{Re}_0 x_2 / L_0)$, где $\text{Re}_0 = u_* L_0 \nu^{-1}$; при численном моделировании $\text{Re}_0 = 3 \cdot 10^4$. Значения других параметров модели Ланжевена такие же, как на рис. 1. Видно, что “плюмаж” частиц, исходящий от точечного источника, с трудом можно различить в случаях $b_1 = 0$ и $b_1 = 1$. В следующем разделе мы объясним и обобщим этот результат на основе аналитических выражений для статистики смещений при больших временах. Когда b_1 возрастает от 0 до 1, аналитические выражения дают типичные изменения в параметрах дисперсии максимум в 3%. Можно сделать вывод, что неопределенность значения b_1 и неполная конкретизация ϕ_i (ср. уравнения (24) и (25)) едва ли оказывает влияние на предсказание дисперсии. При $\text{Re} \gtrsim 2000$ различные масштабы турбулентности сильно отличаются, и значение C_0 достигает асимптотической величины, примерно равной 6. При этом ожидается, что предсказания, основанные на уравнениях (22)–(24) при $b_1 = 0$ будут достаточно станут точными. В эту категорию попадает целый ряд приложений.

9. ДИФФУЗИОННЫЙ ПРЕДЕЛ

Из численного моделирования с использованием уравнения Ланжевена мы получаем данные для скоростей частицы и после интегрирования – смещения частицы. Статистика дисперсии получается путем усреднения этих данных. Более прямой способ получения информации о статистике смещений частиц состоит в анализе поведения уравнения Ланжевена при больших временах после того, как мы пометим частицы, т. е. в диффузионном пределе. Рассмотрим его далее.

Для удобства алгебраических действий введем смещение частицы $\mathbf{x}'$ относительно смещения, обусловленного средней скоростью. Вместо уравнения (23) будем иметь

$$\frac{d\mathbf{x}'_i}{dt} = \mathbf{v}'_i. \quad (28)$$

Уравнение Фоккера–Планка для зависящей от времени совместной плотности вероятности $p = p(\mathbf{v}', \mathbf{x}', t)$ скоростей и координат частицы, описывающихся флуктуационными уравнениями (22) и (28), можно сформулировать в виде [31]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon C_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial v'_i} (\alpha_{ij} v'_j p) + \frac{\partial^2 p}{\partial v'_i \partial v'_i} \right\} - \frac{\partial}{\partial v'_i} (\phi_i p) - \frac{\partial}{\partial x'_i} (v'_i p), \quad (29)$$

где

$$\alpha_{ij} = \lambda_{ij} + C_0^{-1} b_1 \gamma_{ij}. \quad (30)$$

Чтобы исследовать поведение решения уравнения (29) при больших временах, нам надо связать со временем некоторое малое безразмерное число. В идеале это число стремится к нулю в некотором предельном процессе, как обратное число Рейнольдса. Однако в уравнении (29) такого параметра нет. В общем случае не существует

предельного процесса, в котором диффузионный предел неоднородной турбулентности стал бы точным [32]. Все, что остается – это получить диффузионный предел, основанный на малости C_0^{-1} . При этом есть надежда, что вклад отброшенных членов высших порядков мал, несмотря на конечное значение C_0^{-1} . В конце данного раздела мы сравним результаты полученного таким образом диффузионного предела с результатами численного моделирования уравнения Ланжевена. Оказывается, что диффузионный предел работает не так плохо.

Принятая процедура разложения напоминает методы, использованные ван Кампеном при анализе уравнения Крамерса в монографии [4]. Время подвергается масштабному преобразованию $t = C_0 t'$, при котором уравнение (29) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial v'_i}(\alpha_{ij} v'_j p) + \frac{\partial^2 p}{\partial v'_i \partial v'_i} = 2\epsilon^{-1} C_0^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial v'_i}(\phi_i p) + \frac{\partial}{\partial x'_i}(v'_i p) \right\} + 2\epsilon^{-1} C_0^{-2} \frac{\partial p}{\partial t'}. \quad (31)$$

Его решение можно записать в виде разложения по степеням C_0^{-1} :

$$p = p_0 + C_0^{-1} p_1 + C_0^{-2} p_2.$$

Подставляя это разложение в (31) и приравнявая слагаемые с одинаковыми степенями C_0 , получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial v'_i}(\alpha_{ij} v'_j p_0) + \frac{\partial^2 p_0}{\partial v'_i \partial v'_i} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial v'_i}(\alpha_{ij} v'_j p_1) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial v'_i \partial v'_i} = 2\epsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial v'_i}(\phi_i p_0) + \frac{\partial}{\partial x'_i}(v'_i p_0) \right\}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial v'_i}(\alpha_{ij} v'_j p_2) + \frac{\partial^2 p_2}{\partial v'_i \partial v'_i} = 2\epsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial v'_i}(\phi_i p_1) + \frac{\partial}{\partial x'_i}(v'_i p_1) \right\} + 2\epsilon^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial t'}. \quad (34)$$

Решение уравнения (32), которое отвечает распределению эйлеровых скоростей в фиксированной точке в момент, когда мы вводим пассивные метки, имеет вид

$$p_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = G_0(\mathbf{x}, t) (2\pi)^{3/2} \lambda^{1/2} e^{-\lambda_{ij} v'_i v'_j / 2}, \quad (35)$$

где λ – определитель тензора λ_{ij} ; заметим, что $\partial(\gamma_{ij} v'_j p_0) / \partial v'_i = 0$. Функция $G_0(\mathbf{x}, t)$ описывает распределение координат частиц или, эквивалентно, распределение концентрации пассивно добавленной примеси:

$$G_0(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (36)$$

Уравнение, которое определяет $G_0 = G_0(\mathbf{x}, t)$, можно вывести из уравнений (33) и (34) следующим образом: реалистичное решение относительно p_2 получается из уравнения (34) при условии, что интеграл по всей области определения $\mathbf{v}$ от правой части равен нулю. Замечая, что $\phi_i p_1 \rightarrow 0$ при $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$, имеем

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} v'_i p_1 d\mathbf{v} = \frac{\partial G_0}{\partial t}. \quad (37)$$

Интеграл можно рассчитать, умножая уравнение (33) на v'_k и интегрируя по частям:

$$-\alpha_{kj} \int_{-\infty}^{+\infty} v'_j p_1 d\mathbf{v} = 2\epsilon^{-1} \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k p_0 d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{+\infty} v'_i v'_k p_0 d\mathbf{v} \right\}. \quad (38)$$

Используя уравнение (35) и умножая на α_{ik}^{-1} , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v'_i p_1 d\mathbf{v} = 2\alpha_{ik}^{-1} \epsilon^{-1} \left\{ G_0 \frac{d\sigma_{k2}}{dx_2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{jk} G_0) \right\} = -2\alpha_{ik}^{-1} \sigma_{jk} \epsilon^{-1} \frac{\partial G_0}{\partial x'_j}. \quad (39)$$

Было отмечено, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i p_0 d\mathbf{v} = G_0 \frac{d\sigma_{2i}}{dx_2}$$

для обоих выражений для ϕ_i , (24) и (25). Это объясняется тем, что распределение вероятностей скорости частицы согласно уравнению (35) совпадает с распределением эйлеровой скорости в фиксированной точке. Из-за этого среднее значение разности между обоими выражениями равно нулю. На основании этого можно заключить, что при переходе к диффузионному пределу в главном порядке неединственность ϕ_i не влияет на результат для дисперсии! Лишь в высших порядках возникает различие между средними значениями двух выражений для ϕ_i . При рассмотрении решений высших порядков для p_1 и p_2 , т.е. решений уравнений (33) и (34), которые здесь не представлены, обнаруживается, что различие между средними значениями ϕ_i имеет масштаб C_0^{-2} . Его окончательный вклад в дисперсию очень мал; он приводит к относительным отклонениям статистических характеристик дисперсии в несколько процентов или меньше при значениях $C_0 \geq 5$.

Подстановка уравнения (39) в (37) приводит к уравнению диффузии. Переходя от относительной координаты $\mathbf{x}'$ к $\mathbf{x}$ и от масштабированного времени t' к t , получаем

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial G_0}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial G_0}{\partial x_j} \right), \quad (40)$$

где коэффициент диффузии $D_{ij} = D_{ij}(x_2)$ определен как

$$D_{ij} = \frac{2\alpha_{ik}^{-1} \sigma_{jk}}{C_0 \epsilon}. \quad (41)$$

Справедливость приведенного выше результата не ограничена симметричной формой линейной демпфирующей функции в уравнении Ланжевена. Он также применим к присутствующему в диффузионном процессе асимметричному демпфированию, эффект от которого можно увидеть, если посмотреть на тензор α_{ij} (30). Можно записать

$$\alpha_{ik}^{-1} \sigma_{jk} = \begin{pmatrix} v_1^{-1}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}^2) & v_1^{-1} \left\{ \sigma_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{b_1 d}{C_0} \right\} & 0 \\ v_1^{-1} \left\{ \sigma_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{b_1 d}{C_0} \right\} & v_1^{-1}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $v_1 = 1 + b_1^2/C_0^2$ и $d = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$. Подстановка соотношения (42) в уравнение диффузии (40) и преобразование слагаемых дает

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + \left\{ u_1^0 - \frac{2}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (v_1^{-1} b_1 d \epsilon^{-1}) \right\} \frac{\partial G_0}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij}^s \frac{\partial G_0}{\partial x_j} \right), \quad (43)$$

где D_{ij}^s – симметричный тензор диффузии,

$$D_{ij}^s = \frac{2}{C_0 \epsilon} \begin{pmatrix} v_1^{-1}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}^2) & v_1^{-1}\sigma_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & 0 \\ v_1^{-1}\sigma_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & v_1^{-1}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

Влияние асимметрии теперь видно в дрейфовом члене в направлении среднего потока и в поправке в тензор диффузии. Дрейфовый член пренебрежимо мал: дрейф конкурирует с конвекцией за счет того, что средний поток в случае вызванной наличием стенок турбулентности очень велик при больших числах Рейнольдса. Но и поправка в тензор диффузии также очень мала, поскольку она содержит множитель b_1^2/C_0^2 . При $b_1 = 1$ и $C_0 = 5.5$ этот множитель оказывается равным 0.03. Отклонения в статистике дисперсии из-за возможных вариаций b_1 между 0 и 1 таким образом составляют всего 3%! Это показывает, что неопределенность, связанная с возможной асимметрией в демпфирующей функции, является множителем, которым можно пренебречь в выражении для дисперсии. При $b_1 = 0$ тензор диффузии сводится к

$$D_{ij} = \frac{2\sigma_{ik}\sigma_{jk}}{C_0\epsilon}. \quad (44)$$

После подстановки этого результата в уравнение (40) получаем уравнение диффузии, в котором вся неопределенность, связанная с неединственностью, исчезла. Вследствие симметрии Онзагера, которая выполнена в главном порядке по C_0 , такая неопределенность появляется только в членах порядка $O(C_0^{-2})$. Вклад этих членов можно отбросить, если учесть ошибки в параметрах дисперсии, которые составляют максимум несколько процентов.

Остается нерешенным следующий вопрос: какова ошибка диффузионного приближения, связанная с обрывом разложения по степеням C_0^{-1} , что приводит к диффузионному приближению вне зависимости от членов, связанных с неединственностью? На этот вопрос можно ответить, получив выражения для слагаемых высших порядков в разложении. Но эти выражения оказываются длинными и сложными. Более прагматичный подход состоит в сравнении результатов решения уравнения диффузии с результатами численного моделирования уравнения Ланжевена. При этом основное внимание следует обращать на инерционный подслой, в котором уравнение Фоккера–Планка редуцируется к уравнению (14). Сравнивать необходимо статистики смещений частиц в нормальном к стенке направлении. Это имеет первостепенное значение, поскольку позволяет также в значительной мере определить дисперсию в направлении среднего потока через зависимость $u_1^0(x_2)$ скорости среднего потока от x_2 . Плотность вероятности смещений частиц в x_2 -направлении,

обозначаемая через $G_{20} = G_{20}(x_2)$, определяется как

$$G_{20}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\mathbf{x}) dx_1 dx_3.$$

Интегрируя уравнение (43) по всем x_1 и x_3 , беря предел, отвечающий инерционной подобласти и полагая $b_1 = 0$, получаем

$$\frac{\partial G_{20}}{\partial t} = \kappa_1 u_* \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 \frac{\partial G_{20}}{\partial x_2} \right), \quad (45)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{2\kappa}{C_0} \left(1 + \frac{\sigma_{22}^2}{u_*^4} \right), \quad (46)$$

u_* – сдвиговая скорость.

Выражения для статистических моментов $\overline{x_2^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^n G_{20} dx_2$ получаются после умножения уравнения (45) на x_2^n , интегрирования по всей области x_2 и применения интегрирования по частям к членам в правой части. Таким образом находим для первого кумулянта (кумулянты обозначаются двойной чертой сверху)

$$\overline{\overline{x_2^*}} = \overline{x_2^*} = 1 + \kappa_1 t^*, \quad (47)$$

где $x_2^* = x_2/L_0$, L_0 – координата частицы при $t = 0$, а $t^* = u_* t/L_0$. Аналогично можно вывести и выражения для моментов высших порядков. Используя соотношения между моментами и кумулянтами [4], получаем

$$\overline{\overline{x_2^{*2}}} = \kappa_1^2 t^{*2} + 2\kappa_1 t^*, \quad \overline{\overline{x_2^{*3}}} = 2\kappa_1^3 t^{*3} + 6\kappa_1^2 t^{*2}, \quad \overline{\overline{x_2^{*4}}} = 6\kappa_1^4 t^{*4} + 24\kappa_1^3 t^{*3}. \quad (48)$$

Приведенные значения велики для кумулянтов высших порядков. Получаемые из данных выражений пределы больших времен для асимметрии $\overline{\overline{x_2^{*3}}} \left(\overline{\overline{x_2^{*2}}} \right)^{-3/2}$ и экспесса $\overline{\overline{x_2^{*4}}} \left(\overline{\overline{x_2^{*2}}} \right)^{-2}$ равны 2 и 6 соответственно, что указывает на сильно отличающееся от гауссового поведение. Это является следствием неоднородной природы вызванной наличием стенок турбулентности, отражаемой в изменении диссипации энергии и диффузивности в нормальном к стенке направлении.

На рис. 6а изображены частные от деления величин $\left(\overline{\overline{x_2^n}} \right)^{1/n}$ при $n = 1, 2, 3, 4$, полученных путем численного моделирования уравнения Ланжевена в логарифмическом слое, на аналогичные величины, полученные в диффузионном пределе (ср. уравнения (47), (48)), как функции безразмерного времени $u_* t/L_0$. Значения

Рис. 6. Частные от деления величин $\left(\overline{x_2^n}\right)^{1/n}$, вычисленных путем численного моделирования модели Ланжевена для логарифмического слоя, на соответствующие величины, полученные в диффузионном пределе (а) и в “исправленном” диффузионном пределе $\kappa_1 \mapsto 0.85\kappa_1$ (б). Результаты соответствуют $C_0 = 5.5$ и $b_1 = 0$. Значения других параметров такие же, как на рис. 1.

параметров, использованные при сравнении, приведены в подписи. Для времен, близких к моменту, когда мы помечаем частицу, решения уравнения диффузии значительно отклоняются. Известно, что диффузионное приближение приводит к серьезным ошибкам при малых временах. Для больших времен отношения кумулянтов приближаются к постоянным значениям, но они оказываются меньшими единицы, причем уменьшаются по мере возрастания n . Это иллюстрирует тот факт, что в неоднородном турбулентном потоке диффузионный предел никогда не становится точным [32]. Тем не менее отклонения не столь разительны, если мы учтем некоторую неточность в хвостах распределений вероятностей. Отклонения можно уменьшить, если мы корректируем значение диффузивности κ_1 , умножив его на коэффициент 0.85 (рис. 6б).

На основе численного моделирования уравнения Ланжевена было также проведено оценивание коэффициентов асимметрии и эксцесса. Их значения при больших временах оказались соответственно равными 1.6 и 3.4 при указанных значениях параметров. Эти значения следует сравнить соответственно со значениями 2 и 6, полученными с использованием диффузионного приближения. Отметим, что значения коэффициентов асимметрии и эксцесса при больших временах в случае диффузионного предела не чувствительны к значениям константы диффузии. Их нельзя исправить, вводя некие поправочные множители. Различия между коэффициентами асимметрии и эксцесса, полученными из уравнения Ланжевена и уравнения диффузии, являются чистым проявлением ошибки, связанной с обрывом ряда в диффузионном приближении при конечных значениях C_0 . Эта ошибка становится меньше, если возрастает постоянная Колмогорова.

10. ЗНАЧЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ КОЛМОГОРОВА

Традиционный подход к анализу дисперсии примеси в турбулентном потоке состоит в использовании гипотезы Буссинеска, приводящей к полуэмпирическому уравнению для турбулентной дисперсии [2]. Выражения для коэффициентов диффузии, используемые в этом уравнении, основаны на аналогии Рейнольдса и подгонке под результаты измерений. В данном качестве их можно рассматривать как калиброванные коэффициенты, отражающие данные наблюдений. Сравнение этих коэффициентов с теоретическими выражениями для диффузивности, полученными в настоящей работе, приводит к некоторому интересному выводу: оно дает возможность определить значение постоянной Колмогорова C_0 .

Полуэмпирическое уравнение для нормальной к стенке дисперсии в логарифмическом слое потока с вызванной наличием стенок турбулентностью содержит коэффициент диффузии $s_t \kappa u_* x_2$, где $\kappa u_* x_2$ можно получить, используя аналогию Рейнольдса с турбулентной вязкостью [2], тогда как s_t представляет собой турбулентное число Шмидта или Прандтля, которое служит для сравнения предсказаний модели и результатов измерений. За последние 50 или более лет было собрано много данных о нормальной к стенке дисперсии примеси и турбулентной теплопроводности. Из этих данных можно получить, что s_t заключено между 0.9 и 1.1 (см. различные ссылки в [2]). Приравнявая эмпирическое выражение $s_t \kappa u_* x_2$ к κ_1 , которое определено уравнением (46), полагая $s_t = 1$ и, в соответствии с результатами измерений, $\sigma_{22} = 1.32 u_*^2$, находим, что $C_0 = 5.5$. Более подробный анализ данных измерений в логарифмическом слое и использование аналогии Рейнольдса (турбулентная вязкость равна турбулентной диффузивности) приводит к тому же результату. Вообще говоря, на основе связи между представленными теоретическими выражениями для диффузивности и экспериментально определенными коэффициентами диффузии можно заключить, что значение C_0 лежит между 5 и 6. Это хорошо согласуется со значением C_0 , приведенным в литературе [14]. Имеющиеся в литературе значения в основном получают путем прямого численного моделирования однородной турбулентности. Новое в нашем расчете C_0 состоит в том, что он основан на результате измерений неоднородной вызванной наличием стенок турбулентности. Это дает дополнительную уверенность в значении универсальной постоянной Колмогорова, используемой при численном моделировании уравнения Ланжевена.

В книге [2] также приводятся данные, касающиеся величин и знаков коэффициентов диффузии D_{11} , D_{12} и D_{21} , полученные путем анализа турбулентного поведения в граничном атмосферном слое. Они согласуются со значениями, полученными из уравнений (41) и (42), если взять характерные значения σ_{ij} .

11. ИТОГИ И ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Исходный момент наших исследований состоял в описании с помощью уравнения Ланжевена стохастического процесса движения частиц жидкости в потоке с вызванной наличием стенок турбулентностью. Такой подход согласуется с асимптотической структурой турбулентности при больших числах Рейнольдса. Член с белым шумом в уравнении был выбран в соответствии с лагранжевым вариантом предела инерционной подобласти в обыкновенной мелкомасштабной теории Колмогорова. Некоторые результаты недавних измерений подтверждают выводы лагранжевой

теории малых масштабов [6]. Уточнения за счет перемежаемости в нашей работе не рассматривались, поскольку известно, что перемежаемость оказывает слабое влияние на статистические средние смещений частиц [9].

Основная проблема при решении уравнения Ланжевена состоит в отсутствии единственной формулы для демпфирующего члена. Этот член в значительной мере определяет лагранжеву статистику скоростей и смещений. Мы решали эту проблему в несколько шагов. Во-первых, неподвижная точка эйлеровых скоростей была выбрана гауссовой – измерения в целом подтверждают это предположение и дают типичные значения асимметрии и эксцесса эйлеровых скоростей 0.3 или меньше [17]–[19]. Во-вторых, мы потребовали выполнения условия хорошего перемешивания [16], другими словами, эйлерова интерпретация уравнения Ланжевена должна была быть согласована с гауссовым распределением. Данное требование приводит к условиям на демпфирующую функцию, но недостаточно для полной конкретизации. Эта проблема известна как проблема неединственности [7].

Мы решили проблему неединственности, наложив требования двойственности, аналогичной двойственности Онзагера. Вязкая диссипация в энергетическом уравнении приводит к тому, что принцип двойственности справедлив только на малых временах. Эти времена пропорциональны обратной постоянной Колмогорова C_0 , поэтому двойственность имеет место только для главного члена в разложении демпфирующей функции по степеням C_0^{-1} . Тем не менее применение данного принципа оказывается весьма плодотворным. Неопределенность, связанная с неединственностью, переносится в члены с более высокими степенями по C_0^{-1} . Она проявляется в двух частях демпфирующей функции: в асимметричной составляющей линейной части демпфирующего члена и в дрейфовом члене, выражающем эффект неоднородности ковариации. Величина асимметричного демпфирующего члена была определена с использованием результатов недавних измерений в турбулентном потоке в трубе, полученных на основе трекинга скоростей [29]. Эффекты неопределенности в задании дрейфового члена были оценены путем анализа поведения уравнения Ланжевена при больших временах. Таким образом, мы получили, что неединственность в обоих случаях оказывает влияние на статистику смещений частицы, которым можно (почти) пренебречь. Относительный эффект при стохастическом описании смещения частицы в обоих случаях оказывается порядка $O(C_0^{-2})$, что на один порядок выше, чем в уравнении Ланжевена для скоростей частиц! Данный эффект можно исключить из рассмотрения, если допускать ошибки в несколько процентов. Это приводит к практически единственной конкретизации уравнения Ланжевена для описания статистики траекторий частиц в потоке с вызванной наличием стенок турбулентностью при больших числах Рейнольдса. Более конкретно, дисперсию пассивной примеси можно описывать системой флуктуационных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dv'_i}{dt} &= -\frac{1}{2}C_0\varepsilon(x_2)\sigma_{ij}^{-1}v'_j + \frac{d\sigma_{i2}}{dx_2} + (C_0\varepsilon(x_2))^{1/2}w_i(t), \\ \frac{dx_i}{dt} &= u_1^0(x_2)\delta_{i1} + v'_i,\end{aligned}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_2) = \langle u'_i u'_j \rangle$ – тензор ковариации, или сдвиговый тензор Рейнольдса.

В неоднородной турбулентности нет предельного процесса, при котором диффузионное приближение становится точным [32]. Чтобы преодолеть эту трудность,

в приближении модели Ланжевена при больших временах в качестве малого параметра была введена обратная постоянная Колмогорова. Получающееся при этом уравнение диффузии включает ошибку, связанную с заменой бесконечного ряда конечной суммой, и эта ошибка находится в разумно малых пределах, если речь идет о средних значениях и стандартных отклонениях смещений, но становится более серьезной для моментов высших порядков. Уравнение диффузии, подходящее для вызванной наличием стенок турбулентности, имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_1^0(x_2) \frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij}(x_2) \frac{\partial c}{\partial x_j} \right),$$

где c – концентрация пассивной примеси, а $D_{ij} = D_{ij}(x_2)$ – коэффициент турбулентной диффузии, определяемый уравнением (44). Сравнивая результаты в диффузионном пределе с диффузионными коэффициентами, полученными в большом числе проведенных за последние 50 лет экспериментов, получаем значение постоянной Колмогорова C_0 , лежащее между 5 и 6.

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров, *ДАН СССР*, **30**:4 (1941), 299–303.
- [2] А. С. Монин, А. Н. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Т. 1, Наука, М., 1965.
- [3] G. I. Taylor, *Proc. London Math. Soc.* **2**, **20**:1 (1922), 196–211.
- [4] Н. Г. Ван Кампен, *Стохастические процессы в физике и химии*, Высшая школа, М., 1990.
- [5] А. С. Монин, А. Н. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Т. 2, Наука, М., 1967.
- [6] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, J. Alexander, E. Bodenschatz, *J. Fluid Mech.*, **469**:1 (2002), 121–160.
- [7] J. D. Wilson, B. L. Sawford, *Boundary-Layer Meteorology*, **78**:1–2 (1996), 191–210.
- [8] А. Н. Колмогоров, “Précisions sur la structure locale de la turbulence dans un fluide visqueux aux nombres de Reynolds élevés”, *Mécanique de la turbulence*, Colloq. Intern. CNRS (Marseille, Aug.-Sept. 1961), CNRS, Paris, 1962, 447–458.
- [9] M. S. Borgas, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **342**:1665 (1993), 379–411.
- [10] M. S. Borgas, B. L. Sawford, *Phys. Fluids*, **6**:2 (1994), 618–633.
- [11] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие Колмогорова*, Фазис, М., 1998.
- [12] J. J. H. Brouwers, *Phys. Fluids*, **19**:10 (2007), 101702.
- [13] M. S. Borgas, B. L. Sawford, *J. Fluid Mech.*, **279** (1994), 69–99.
- [14] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [15] F. Toschi, E. Bodenschatz, “Lagrangian properties of particles in turbulence”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annu. Rev. Fluid Mech., **41**, Annu. Rev., Palo Alto, CA, 2009, 375–404.
- [16] D. J. Thomson, *J. Fluid Mech.*, **180** (1987), 529–556.
- [17] J. Laufer, “The structure of turbulence in fully developed pipe flow”, Report no. 1174, <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1954/naca-report-1174.pdf>, 1954.
- [18] P. S. Klebanoff, “Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient”, Report no. 1247, <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1955/naca-report-1247.pdf>, 1955.
- [19] J. F. Morrison, B. J. McKeon, W. Jiang, A. J. Smits, *J. Fluid Mech.*, **508** (2004), 99–131.
- [20] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика* Т. 5. *Статистическая физика*. Часть 1, Наука, М., 1976.
- [21] J. J. H. Brouwers, *Phys. Fluids*, **16**:7 (2004), 2300–2308.

- [22] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, Wiley, New York, 1998.
- [23] O. Bokhove, M. Oliver, *Proc. R. Soc. London A*, **462**:2073 (2006), 2575–2592.
- [24] B. J. McKeon, J. Li, W. Jiang, J. F. Morrison, A. J. Smits, *J. Fluid Mech.*, **501** (2004), 135–147.
- [25] R. Zhao, A. J. Smits, *J. Fluid Mech.*, **576** (2007), 457–473.
- [26] P. A. Monkewitz, K. A. Chauhan, H. M. Nagib, *Phys. Fluids*, **19**:11 (2007), 115101.
- [27] S. Hoyas, J. Jiménez, *Phys. Fluids*, **18**:1 (2006), 011702.
- [28] B. L. Sawford, P. K. Yeung, *Phys. Fluids*, **12**:8 (2000), 2033–2045.
- [29] R. J. E. Walpot, C. W. M. van der Geld, J. G. M. Kuerten, *Phys. Fluids*, **19**:4 (2007), 045102.
- [30] B. L. Sawford, P. K. Yeung, *Phys. Fluids*, **13**:9 (2001), 2627–2634.
- [31] R. L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise. V. I: General Theory of Random Processes. Nonlinear Transformations of Signals and Noise*, Gordon and Breach, New York, 1967.
- [32] J. J. H. Brouwers, *J. Engrg. Math.*, **44**:3 (2002), 277–295.

Поступила в редакцию 8.12.2009

Сдано в набор 8.01.2010	Подписано к печати 29.04.2010	Формат бумаги $70 \times 100 \frac{1}{16}$
Печать цифровая	Усл.печ.л. 14.3 Усл.кр.отт. 2.6 тыс.	Уч.изд.л. 13.1 Бум.л. 5.5
Тираж 180 экз.		Зак. 196

Учредители: Российская академия наук,
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 Журнал осуществляет свою деятельность
 под руководством Отделения математических наук РАН

ИЗДАТЕЛЬ – Российская академия наук, Издательство “Наука”
 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
 АДРЕС РЕДАКЦИИ: 119991, Москва, ул. Губкина, 8, тел. (499) 135-20-19,
 e-mail: tmph@mi.ras.ru
 Отпечатано в ППП «Типография “Наука”», 121099, Москва, Шубинский пер., 6