Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Эрлер, Простое аналитическое решение для конденсации тахионов, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 366–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:23:57

© 2010 г.

Т. Эрлер*

ПРОСТОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КОНДЕНСАЦИИ ТАХИОНОВ

Обсуждается новое простое аналитическое решение для конденсации тахионов в теории поля открытых струн. В частности, это решение не требует регуляризации или “фантомных членов”, а доказательство первой гипотезы Сена занимает лишь несколько строчек вычислений.

Ключевые слова: струнная теория поля, конденсация тахионов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исходное решение Шнабля для тахионной конденсации в теории поля открытых бозонных струн [1] имеет вид регуляризованной суммы

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\psi_N - \sum_{n=0}^N \frac{d}{dn} \psi_n \right], \quad (1)$$

где ψ_n – wedge-состояния с определенными вставками. Вид этого решения оставался загадкой. Во-первых, предел предполагает, что решение может жить вне пространства хорошо ведущих себя струнных полей, подобно тому как обобщенная функция является пределом последовательности функций. Во-вторых, таинственный член ψ_N – так называемая “фантомная часть” – на самом деле *обращается в нуль* при свертках с хорошо ведущими себя состояниями в пределе больших N . Однако нельзя просто положить $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = 0$, потому что если вычислить действие аналитически [1], то члены ψ_N дают существенную часть энергии, требуемую для доказательства гипотезы Сена [2]. Тем не менее член ψ_N не дает вклада в энергию в обычном разложении по уровням [1], [3], поскольку как состояние в пространстве Фока он обращается в нуль тождественно.

К настоящему моменту регуляризационные и фантомные части поняты лучше, и остается мало сомнений в том, что решение Шнабля несингулярно во всех практических отношениях. Однако интересно было бы найти другое решение, в котором подобные тонкости не возникают. В настоящей статье представлено такое решение, полученное недавно совместно в работе [4].

*Institute of Physics of the ASCR, Czech Republic. E-mail: tchovi@gmail.com

2. РЕШЕНИЕ

Для начала представим решение в формализме так называемых расщепленных струн, или полуструн [5], [6]. Идея состоит в представлении решения в терминах $*$ -произведений некоторых элементарных “атомарных” струнных полей, которые удовлетворяют неким простым тождествам. Все известные аналитические решения для тахионного вакуума можно представить в терминах $*$ -произведений трех струнных полей, известных как K (грассманоно четное, $\text{gh} \# = 0$), B (грассманоно нечетное, $\text{gh} \# = -1$) и c (грассманоно нечетное, $\text{gh} \# = 1$), которые удовлетворяют алгебраическим соотношениям

$$[K, B] = 0, \quad Bc + cB = 1, \quad B^2 = 0, \quad c^2 = 0 \quad (2)$$

и имеют БРСТ-вариации ($Q = Q_B$)

$$QK = 0, \quad QB = K, \quad Qc = cKc. \quad (3)$$

Все выписанные произведения представляют собой $*$ -произведения открытых струн. Поле c можно построить как локальную вставку духа c в единичное струнное поле, а K и B являются вставками интегралов по линиям от духа b и тензора энергии-импульса в единичное струнное поле. В частности, поле K удовлетворяет замечательному тождеству

$$\Omega = e^{-K}, \quad (4)$$

где $\Omega = |0\rangle$ – $SL(2, \mathbb{R})$ -вакуум. Wedge-состояния являются степенями в $*$ -алгебре $SL(2, \mathbb{R})$ -вакуума, и можно записать $\Omega^t = e^{-tK}$. По поводу более явных определений K, B, c см. работу [4].

Итак, запишем новое решение для тахионного вакуума:

$$\Psi = [c + cKBc] \frac{1}{1 + K}. \quad (5)$$

Внесем ясность в определение $1/(1 + K)$. Можно обратить $1 + K$, используя швингеровскую параметризацию

$$\frac{1}{1 + K} = \int_0^\infty dt e^{-t(1+K)} = \int_0^\infty dt e^{-t}\Omega^t, \quad (6)$$

так что, если мы пожелаем, можно переписать уравнение (5) в виде

$$\Psi = \int_0^\infty dt e^{-t} [c + cKBc] \Omega^t. \quad (7)$$

Вот, собственно, и все. Никакой регуляризации или “фантомной части” решительно не требуется. На рисунке изображено наложение решения уравнения (5) в виде корреляционной функции конформной теории поля на цилиндре [4].

Важное свойство этого решения состоит в том, что оно включает интегрирование по wedge-состояниям, сколь угодно близким к единичному. В некотором смысле в этом и состоит “секрет” того, почему это решение можно выразить без использования регуляризационной или “фантомной” частей. Однако единичное струнное поле представляет собой “непослушный” объект, и (как обсуждается в работе [4]) энергия этого решения расходится при разложении по уровням. Эта расходимость возникает из суммирования ряда за пределами его радиуса сходимости, что очень похоже на энергию решения Шнабля в разложении по $\mathcal{L}_0$ -уровням [1]. После пересуммирования разложение по уровням дает правильную вакуумную энергию. На самом деле действие, вычисленное на решении, является корректно определенным.

Несложно доказать уравнения движения непосредственно, однако мы используем следующий прием. Определим новые струнные поля $\hat{K}, \hat{B}, \hat{c}$:

$$\hat{K} = \frac{K}{1+K} \quad \hat{B} = \frac{B}{1+K} \quad \hat{c} = c(1+K)Bc. \quad (8)$$

Очевидно, что $\hat{K}, \hat{B}, \hat{c}$ удовлетворяют тем же алгебраическим соотношениям и имеют те же БРСТ-вариации, что и K, B, c . В терминах этих новых полей решение можно записать как

$$\Psi = \hat{c}(1 - \hat{K}). \quad (9)$$

Теперь легко видеть, что

$$\begin{aligned} Q\Psi &= \hat{c}\hat{K}\hat{c}(1 - \hat{K}), \\ \Psi^2 &= \hat{c}(1 - \hat{K})\hat{c}(1 - \hat{K}) = -\hat{c}\hat{K}\hat{c}(1 - \hat{K}). \end{aligned} \quad (10)$$

Итак,

$$Q\Psi + \Psi^2 = 0. \quad (11)$$

Это рассуждение показывает, что не только Ψ является решением, но и (если опустить шляпки) $\Psi' = c(1-K)$ также является решением. Однако Ψ' намного более сингулярно, чем Ψ , и на самом деле действие, вычисленное на Ψ' , не определено.

Можно также доказать, что решение не поддерживает открытые струнные состояния. Следуя [7], [8], будем искать струнное поле A , удовлетворяющее равенству

$$Q_\Psi A = 1, \quad (12)$$

где Q_Ψ – вакуумный кинетический оператор. При этом всякое Q_Ψ -замкнутое состояние Φ можно записать как $Q_\Psi(A\Phi)$, а потому является Q_Ψ -точным. Мы утверждаем, что

$$A = B \frac{1}{1 + K} \quad (13)$$

является требуемым струнным полем. Докажем это:

$$\begin{aligned} Q_\Psi A &= QA + \Psi A + A\Psi = Q\hat{B} + \hat{c}(1 - \hat{K})\hat{B} + \hat{B}\hat{c}(1 - \hat{K}) = \\ &= \hat{K} + (\hat{B}\hat{c} + \hat{c}\hat{B})(1 - \hat{K}) = \hat{K} + 1 - \hat{K} = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

поэтому Q_Ψ не имеет когомологий.

Решение Ψ является членом однопараметрического семейства решений

$$\Psi_\nu = \frac{1}{(1 + K)^\nu} [c + cKBc] \frac{1}{(1 + K)^{1-\nu}}, \quad (15)$$

где

$$\frac{1}{(1 + K)^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty dt t^{\mu-1} e^{-t} \Omega^t, \quad \mu > 0. \quad (16)$$

Все эти решения тривиальным образом калибровочно-эквивалентны. Сопряжение струнного поля¹⁾ отображает эти решения друг в друга:

$$\Psi_\nu^\dagger = \Psi_{1-\nu}. \quad (17)$$

Простейшие решения возникают при $\nu = 0$ и $\nu = 1$, что отвечает Ψ и $\Psi^\dagger$. Но и $\nu = 1/2$ также интересно, поскольку в этом случае решение удовлетворяет условию вещественности для струнного поля $\Psi_{1/2} = \Psi_{1/2}^\dagger$. На самом деле $\Psi_{1/2}$ четно по твисту. Это упрощает анализ в разложении по уровням, поскольку на каждом уровне представлено меньшее число состояний.

3. ЭНЕРГИЯ

Гипотеза Сена предсказывает, что в подходящих единицах²⁾ энергия вакуума должна быть равна

$$E = -S(\Psi) = -\frac{1}{2\pi^2}, \quad (18)$$

¹⁾Сопряжение $\dagger$ определяется как композиция эрмитова и BPZ-сопряжений [9]. Условие вещественности струнного поля имеет вид $\Phi = \Phi^\dagger$.

²⁾Наша нормировка действия и трехточечной функции s -духов согласуется с работами [1], [5].

где $S(\Psi)$ – действие. Предполагая уравнения движения, можно вычислить действие, используя только кинетический член:

$$E = \frac{1}{6} \langle \Psi, Q_B \Psi \rangle = \frac{1}{6} \text{Tr} \left[(c + cKBc) \frac{1}{1+K} cKc \frac{1}{1+K} \right], \quad (19)$$

где след $\text{Tr}(\cdot) = \langle I, \cdot \rangle$ использован как сокращенное обозначение для одноточечной вершины. Разложим теперь $1/(1+K)$ по wedge-состояниям и используем $cKBc = Q(Bc)$ для записи второго члена в виде “полной производной”:

$$E = \frac{1}{6} \int_0^\infty dt_1 dt_2 e^{-t_1-t_2} (\text{Tr}(c\Omega^{t_1} cKc\Omega^{t_2}) + \text{Tr}[Q(Bc\Omega^{t_1} cKc\Omega^{t_2})]). \quad (20)$$

Второй член обращается в нуль в силу обычных аксиом струнной теории поля. Остается

$$E = \frac{1}{6} \int_0^\infty dt_1 dt_2 e^{-t_1-t_2} \text{Tr}(c\Omega^{t_1} cKc\Omega^{t_2}). \quad (21)$$

След можно вычислить как корреляционную функцию на цилиндре, что было сделано уже много раз (например, в работах [1], [5]):

$$\text{Tr}(c\Omega^{t_1} cKc\Omega^{t_2}) = - \left(\frac{t_1 + t_2}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi t_1}{t_1 + t_2}. \quad (22)$$

Поэтому энергию можно найти, вычисляя двойной интеграл:

$$E = -\frac{1}{6} \int_0^\infty dt_1 dt_2 e^{-t_1-t_2} \left(\frac{t_1 + t_2}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi t_1}{t_1 + t_2}, \quad (23)$$

который после подстановки

$$u = t_1 + t_2, u \in [0, \infty), \quad v = \frac{t_1}{t_1 + t_2}, \quad v \in [0, 1], \quad dt_1 dt_2 = u du dv \quad (24)$$

факторизуется в произведение двух очень простых интегралов:

$$E = -\frac{1}{6\pi^2} \left(\int_0^\infty du u^3 e^{-u} \right) \left(\int_0^1 dv \sin^2(\pi v) \right). \quad (25)$$

Первый из них равен $\Gamma(4) = 6$, а второй является интегралом $\sin^2$ по периоду, что дает множитель $1/2$. Поэтому

$$E = -\frac{1}{2\pi^2} \quad (26)$$

в согласии с гипотезой Сена.

Благодарности. Автор благодарен М. Шнаблю, а также организаторам Второй международной конференции “Струнная теория поля и смежные вопросы” (Москва, 2009 г.) за приглашение выступить с докладом и за гостеприимство в Математическом институте им. Стеклова РАН в Москве. Данная работа частично поддержана со стороны National Science Foundation (грант № PHY05-51164) и EURYI (грант EYI/07/E010 EUROHOC и ESF).

Список литературы

- [1] M. Schnabl, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **10**:6 (2006), 433–501; [arXiv: hep-th/0511286](#).
- [2] A. Sen, *JHEP*, **12** (1999), 027; [arXiv: hep-th/9911116](#).
- [3] T. Takahashi, *JHEP*, **01** (2008), 001; [arXiv: 0710.5358](#).
- [4] T. Erler, M. Schnabl, *JHEP*, **10** (2009), 066; [arXiv: 0906.0979](#).
- [5] Y. Okawa, *JHEP*, **04** (2006), 055; [arXiv: hep-th/0603159](#).
- [6] T. Erler, *JHEP*, **05** (2007), 083; [arXiv: hep-th/0611200](#).
- [7] I. Ellwood, B. Feng, Y. He, N. Moeller, *JHEP*, **07** (2001), 016; [arXiv: hep-th/0105024](#).
- [8] I. Ellwood, M. Schnabl, *JHEP*, **02** (2007), 096; [arXiv: hep-th/0606142](#).
- [9] M. Gaberdiel, B. Zwiebach, *Nucl. Phys. B*, **505**:3 (1997), 569–624; [arXiv: hep-th/9705038](#).