Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Поляков, Кольцо вакуумных α -генераторов и последовательность струнных теорий Рамона–Невё–Шварца, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 391–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:39:42

© 2010 г.

Д. А. Поляков*

КОЛЬЦО ВАКУУМНЫХ α -ГЕНЕРАТОРОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СТРУННЫХ ТЕОРИЙ РАМОНА–НЕВЁ–ШВАРЦА

Построена последовательность новых нильпотентных БРСТ-зарядов в суперструнной теории Рамона–Невё–Шварца, основанная на иерархии найденных локальных калибровочных симметрий. В свою очередь, эти калибровочные симметрии связаны с глобальными α -симметриями в пространстве-времени, образующими некоммутативное кольцо. Построенные БРСТ-заряды предположительно связаны с динамикой суперструн в искривленном пространстве-времени с геометрией АдС-типов.

Ключевые слова: струна Рамона–Невё–Шварца, БРСТ-когомология, α -симметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дуальность калибровочное поле–струна представляет собой одну из наиболее глубоких проблем современной физики. Хорошо известным примером такой дуальности является соответствие АдС/КТП, для построения которого приходится привлекать суперсимметрии; в то же время ($N = 2$)- или ($N = 4$)-суперсимметрии, возможно, отсутствуют в реальном мире. Есть одна возможность: чтобы понять несуперсимметричную версию дуальности калибровочное поле–струна, необходимо разработать единый язык описания квантовой хромодинамики и теории струн. Со стороны квантовой хромодинамики это означает, что вместо описания теории в терминах локальных наблюдаемых (калибровочных полей), определенных над обычным геометрическим пространством, необходимо дать такое описание в терминах распределенных объектов – токовых линий глюонов, соединяющих кварки и определенных над бесконечномерным “пространством петель”. Рассмотрим петлевое уравнение $\hat{L}(s)W(C) = 0$ в пределе больших N , где

$$W(C) = \left\langle \text{Tr Pexp} \left\{ \oint_c dX^m(\tilde{s}) A_m(X(\tilde{s})) \right\} \right\rangle = \left\langle \text{Tr Pexp} \left\{ \int_0^{2\pi} d\tilde{s} A_m^a \frac{dX^m(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \right\} \right\rangle$$

*National Institute for Theoretical Physics; School of Physics, University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa. E-mail: dimitri.polyakov@wits.ac.za

– среднее от вильсоновской петли, а

$$\hat{L}(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d\alpha \frac{\delta^2}{\delta X_m(s - \alpha) \delta X^m(s + \alpha)}$$

– функциональный оператор Лапласа, задаваемый над пространством петель. Эти петлевые уравнения воспроизводят уравнения Янга–Миллса на классическом уровне $\nabla_m F^{mn} = 0$, а также задают полный набор квантово-хромодинамических фейнмановских диаграмм в квантовой теории. Петлевое уравнение содержит в себе полную информацию о непертурбативной квантовой хромодинамике.

Петлевое уравнение для контуров без самопересечений можно формально получить из действия в пространстве петель

$$S \sim \int_c W(C) \hat{L} W(C),$$

которое сходно по структуре со свободной частью действия в полевой теории струны

$$S \sim \int \Psi Q_{\text{BRST}} \Psi,$$

где Ψ – поле струны, содержащее все вершинные операторы, определенные вне массовой поверхности. Среднее от вильсоновской петли можно разложить по локальным калибровочно-инвариантным операторам,

$$W(C) = 1 + \frac{1}{2} a^2 \text{Tr } F^2 + O(F^4) + \dots,$$

кроме того, в соответствии с гипотезой дуальности калибровочное поле–струна все эти операторы отвечают вершинным операторам в дуальной теории замкнутых струн на пространстве AdS_5 , например $\text{Tr } F^2 \leftrightarrow V_{\text{dilaton}}$, где V_{dilaton} – вершинный оператор дилатона. Поэтому петлевое уравнение влечет следующее:

1) со стороны калибровочной теории все локальные калибровочно-инвариантные наблюдаемые уничтожаются оператором $\hat{L}$;

2) из дуальности калибровочное поле–струна вытекает соответствие $\hat{L} \leftrightarrow Q_{\text{BRST}}$;

3) это означает, что петлевое уравнение $\hat{L} W(C) = 0$ отвечает уравнению движения полевой теории струны $Q_{\text{BRST}} \Psi = 0$ в дуальной теории;

4) следовательно, чтобы понять несуперсимметричную дуальность калибровочное поле–струна, необходимо понять динамику полевой теории струны, построенной над *искривленными* подлежащими пространствами;

5) однако в стандартных подходах полевая теория струны была до сих пор построена только над *плоскими* пространствами, а расширение существующих конструкций на геометрии с кривизной оказалось весьма сложной задачей.

В настоящей работе мы в подробностях наметим программу исследований в этом направлении, построив последовательность новых нильпотентных БРСТ-операторов в теории струны Рамона–Невё–Шварца (РНШ) и определив действие полевой

теории струны в пространствах с ненулевой кривизной. Наше построение базируется на наличии локальных калибровочных симметрий в теории суперструны РНШ (которая, как считается, существует), что приводит к бесконечной цепочке новых БРСТ-генераторов, которые можно классифицировать в терминах когомологий духовых полей. Эти калибровочные симметрии тесно связаны с глобальными нелинейными α -симметриями пространства-времени в теории суперструны РНШ, которые перемешивают материальные и духовые степени свободы, образуют кольца вакуумных операторов и обязаны своим происхождением скрытым размерностям пространства-времени. Новые нильпотентные БРСТ-заряды, которые строятся в настоящей работе, отвечают последовательностям теорий суперструны РНШ в искривленных пространствах (включая пространства АдС-типа) и могут быть использованы при построении полевой теории струны над нетривиальными подлежащими многообразиями. В рамках соответствия между струной РНШ и теориями чистых спиноров мы показываем, что появление новых БРСТ-зарядов отвечает введению в теории чистых спиноров взаимодействий для переменной λ^α чисто спинорного поля в БРСТ-операторе $\oint (dz/2i\pi) \lambda^\alpha d_\alpha$ (эквивалентных сингулярностям операторных произведений между λ , которые сохраняют нильпотентность Q_{BRST}). Порядки когомологий духовых полей в БРСТ-зарядах в формализме струны РНШ отвечают ведущему порядку сингулярности операторного произведения для двух чистых спинорных полей в формализме чистых спиноров.

В теории струн глобальные симметрии пространства-времени обычно порождаются примарными полями конформной размерности 1 (коммутирующими с БРСТ-зарядом), в то время как локальные калибровочные симметрии задаются БРСТ-точными операторами (с различными конформными размерностями и не обязательно примарными), определяющимися коммутаторами между оператором БРСТ-симметрии и подходящими духовыми полями.

Примерами генераторов локальных калибровочных симметрий на мировой поверхности являются тензор натяжений $T = \{Q_0, b\}$ и суперток $G = [Q_0, \beta]$, где

$$Q_0 = \oint \frac{dz}{2i\pi} \left(cT + \partial ccb - \frac{1}{2} \gamma \psi_m \partial X^m - \frac{1}{4} b \gamma^2 \right)$$

– стандартный БРСТ-заряд. В то же время интегралы от БРСТ-нетривиальных примарных полей, обладающие единичной конформной размерностью,

$$L^m = \oint \frac{dz}{2i\pi} \partial X^m, \quad L^{mn} = \oint \frac{dz}{2i\pi} \psi^m \psi^n,$$

задают преобразования лоренцевых сдвигов и поворотов в d -мерном пространстве-времени. Генератор поворота L^{mn} оказывается неполным, так как он действует только на поля ψ , но не на поля X . Это связано с БРСТ-неинвариантностью L^{mn} (данный оператор коммутирует только с членом в Q_0 , отвечающим тензору натяжений, но не с членами, описывающими супертоки). Для построения полной версии

генератора лоренцевых поворотов, которая действует как на поля X , так и на поля ψ , необходимо поправить L^{mn} , добавив члены, зависящие от духовых полей b и c . Такую полную версию можно построить с помощью K -оператора [1] следующим образом.

Пусть $L = \oint V$ – некоторый неинвариантный оператор, для которого $[Q_0, V] = \partial U + W$, так что $[Q_0, L] = W$. Рассмотрим оператор $K = -4ce^{2\chi-2\phi} \equiv \xi\Gamma^{-1}$, удовлетворяющий условию $[Q_0, K] = 1$. Если операторное произведение K и W несингулярно и $K(z)L(w) \sim O((z-w)^N)$ при $N > 0$, то инвариантный генератор $\tilde{L}$ можно получить из неинвариантного генератора $L = \oint V$ с помощью K -преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(w) = L + \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \oint \frac{dz}{2i\pi} (z-w)^N : K \partial_z^N W(z) : + \\ + \frac{1}{N!} \oint \frac{dz}{2i\pi} \partial_z^{N+1} [(z-w)^N K] K \{Q_0, U\}(z). \end{aligned}$$

Заметим, что зависимость от произвольной точки w мировой поверхности появляется во всех случаях, кроме $N = 0$. Генератор поворота L^{mn} при $N = 0$ и его полная версия даются соотношением

$$\tilde{L}^{mn} = L^{mn} - 2 \oint \frac{dz}{2i\pi} c \xi e^{-\phi} \partial X^{[m} \psi^{n]} - \frac{1}{2} \partial c c e^{3\chi-3\phi} \partial X^{[m} \psi^{n]},$$

в котором бозонные и фермионные духовые поля β, γ, b, c задаются формулами бонизации:

$$\begin{aligned} 2\beta(z) &= e^{\chi-\phi} \partial \chi(z) \equiv \partial \xi e^{-\phi}(z), & \gamma(z) &= e^{\phi-\chi}(z), \\ b(z) &= e^{-\sigma}(z), & c(z) &= e^{\sigma}(z). \end{aligned}$$

Эти выражения определяют БРСТ-инвариантный генератор поворотов, действующий как на поля ψ , так и (с точностью до смены картины) на поля X .

Следующий, гораздо более нетривиальный, пример глобальной суперсимметрии пространства-времени в теории суперструны задается иерархией α -симметрий. Эти глобальные пространственно-временные симметрии реализуются в нелинейном виде, они перемешивают секторы материи и духов в теории суперструны РНШ, и их можно классифицировать в терминах когомологий духовых полей. А именно, можно проверить, что полное действие РНШ для полей материи и духов,

$$S_{\text{RNS}} = S_{\text{matter}} + S_{bc} + S_{\beta\gamma},$$

где

$$\begin{aligned} S_{\text{matter}} &= \int \frac{d^2 z}{2\pi} (\partial X_m \bar{\partial} X^m + \psi_m \bar{\partial} \psi^m + \bar{\psi}_m \partial \bar{\psi}^m), \\ S_{bc} &= \int \frac{d^2 z}{2\pi} (b \bar{\partial} c + \bar{b} \partial \bar{c}), & S_{\beta\gamma} &= \int \frac{d^2 z}{2\pi} (\beta \bar{\partial} \gamma + \bar{\beta} \partial \bar{\gamma}), \end{aligned}$$

инвариантно относительно следующих преобразований (в которых α – глобальный параметр):

$$\begin{aligned} 2\delta X^m &= \alpha \{2e^\phi \partial \psi^m + \partial(e^\phi \psi^m)\}, & \delta \psi^m &= -\alpha \{e^\phi \partial^2 X^m + 2\partial(e^\phi \partial X^m)\}, \\ \delta \gamma &= \alpha e^{2\phi-\chi} \{\psi_m \partial^2 X^m - 2\partial \psi_m \partial X^m\}, & \delta \beta &= \delta b = \delta c = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{matter}} &= -\delta S_{\beta\gamma} = \int \frac{d^2 z (\bar{\partial} e^\phi)}{2\pi} (\psi_m \partial^2 X^m - 2\partial \psi_m \partial X^m), \\ \delta S_{bc} &= \delta S_{\text{RNS}} = 0. \end{aligned}$$

Генератор этих преобразований имеет вид

$$L^\alpha = \oint \frac{dz}{2i\pi} e^\phi F(X, \psi) \equiv \oint \frac{dz}{2i\pi} e^\phi (\psi_m \partial^2 X^m - 2\partial \psi_m \partial X^m),$$

где мы ввели обозначение для примарного поля размерности 5/2:

$$F(X, \psi) = \psi_m \partial^2 X^m - 2\partial \psi_m \partial X^m.$$

При этом суперток материи на мировой поверхности есть

$$G = -\frac{1}{2} \psi_m \partial X^m,$$

а примарное поле $L(X, \psi) = 2\partial \psi_m \psi^m - \partial X_m \partial X^m$ размерности 2 является супер-партнером F на мировой поверхности, другими словами $G(z)L(w) \sim F(w)/(z-w)$. L^α -генератор есть элемент кохомологии H_1 духовых полей. Как и в случае генератора вращений, подынтегральное выражение в L^α -генераторе представляет собой примарное поле размерности 1; оно тем не менее не БРСТ-инвариантно, так как не коммутирует с членами супертоков в БРСТ-заряде. Таким образом, подобно генераторам вращений L^{mn} , нужно применить K -преобразование для того, чтобы сделать это выражение БРСТ-инвариантным. Однако для генератора α -симметрии процедура K -оператора дает $N = 2$.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Положительные кохомологии H_n духовых полей, $n > 0$, состоят из неэквивалентных относительно картин физических операторов, существующих при картинах n и выше и уничтожаемых обратным преобразованием смены картины при минимальной положительной картине под номером n . Отрицательные кохомологии H_{-n} полей духов состоят из физических операторов, неэквивалентных относительно картины, существующих для картин с номерами $-n$ и ниже и уничтожаемых прямым оператором смены картины при минимальном отрицательном номере картины $-n$.

Имеется изоморфизм между положительными и отрицательными когомологиями: $H_n \sim H_{-n-2}$; класс H_0 по определению состоит из операторов, эквивалентных относительно картин и существующих при всех картинах (включая картину с номером 0), в то время как классы H_{-1} и H_{-2} пустые. Полное БРСТ-инвариантное расширение L^α , порождающее полный набор α -симметрий в секторах полей материи и духов, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{L}^\alpha(w) = & \oint \frac{dz}{2i\pi} (z-w)^2 \left\{ e^\phi F P_{2\phi-2\chi-\sigma}^{(2)}(z) + \right. \\ & \left. + 8c\xi \left(FG - \frac{1}{2} LP_{\phi-\chi}^{(2)} - \frac{1}{4} \partial LP_{\phi-\chi}^{(1)} \right) - 24\partial c c e^{2\chi-\phi} F \right\} \equiv \oint \frac{dz}{2i\pi} (z-w)^2 V_3, \end{aligned}$$

где многочлены $P_{f(\phi_1(z), \dots, \phi_N(z))}^{(n)}$ конформного веса n суть обобщенные многочлены Эрмита, определяемые формулами

$$P_{f(\phi_1(z), \dots, \phi_N(z))}^{(n)} = e^{-f(\phi_1(z), \dots, \phi_N(z))} \frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{f(\phi_1(z), \dots, \phi_N(z))}$$

для произвольной функции $f(\cdot)$ от N полей $\phi_1(z), \dots, \phi_N(z)$ (таким образом, $P_{2\phi-2\chi-\sigma}^{(1)} = 2\partial\phi - 2\partial\chi - \partial\sigma$). Оператор $\tilde{L}^\alpha$ является БРСТ-инвариантным, нетривиальным и порождает полный набор глобальных нелинейных симметрий пространства-времени, порожденных скрытыми размерностями. Заметим, что подынтегральное выражение размерности 3 в выражении для $\tilde{L}^\alpha$ удовлетворяет условию $[Q_0, V_3] = \partial^3 W_0$, в котором W_0 – оператор размерности 0 (явный вид его мы для краткости опустим). Хотя этот оператор зависит от координаты w произвольной мировой поверхности, эта зависимость не входит ни в одну корреляционную функцию, поскольку производные по w от $\tilde{L}^\alpha(w)$ БРСТ-точны и образуют кольцо вакуумных полей.

Неисчезающими операторами являются первая и вторая производные от $\tilde{L}^\alpha(w)$ по w , т. е. $L_1^\alpha(w) = \partial_w L^\alpha(w)$ и $L_2^\alpha(w) = \partial_w^2 L^\alpha(w)$. Можно непосредственно показать, что эти генераторы индуцируют локальные калибровочные симметрии на мировой поверхности и являются БРСТ-точными:

$$L_1^\alpha(w) = \left\{ Q_0, \oint \frac{dz}{2i\pi} \tilde{b}(z, w) \right\}, \quad L_2^\alpha(w) = \left\{ Q_0, \partial_w \oint \frac{dz}{2i\pi} \tilde{b}(z, w) \right\},$$

где в роли обобщенного духа b (отвечающего калибровочным преобразованиям, генерируемым $L_j^\alpha \equiv \partial_w^j L^\alpha(w)$, $j = 1, 2$) выступает

$$\begin{aligned} \oint \frac{dz}{2i\pi} \tilde{b}(z, w) = & \oint \frac{dz}{2i\pi} (z-w)^2 \left\{ -2be^\phi F P_{2\phi-2\chi-\sigma}^{(1)}(z) + \right. \\ & \left. + 8\xi \left(FG - \frac{1}{2} LP_{\phi-\chi}^{(2)} - \frac{1}{4} \partial LP_{\phi-\chi}^{(1)} \right) + 24\partial c c e^{2\chi-\phi} F \right\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подынтегральные выражения для L_1^α и $\tilde{b}$ суть генераторы конформной размерности 2.

Теперь, имея в руках $\tilde{b}$ -аналог духа b , зададимся вопросом, чем является обобщенный дух $\tilde{c}$? По аналогии с обычным духом c будем искать оператор конформной размерности -1 , удовлетворяющий каноническому соотношению $\{\oint \tilde{b}, \tilde{c}\} = 1$. Существует одна трудность: поскольку $\tilde{b}$ находится в картине $+1$, поле $\tilde{c}$ должно быть в картине -1 , чтобы удовлетворять указанному выше равенству. Оказывается, что не существует подходящего выражения для $\tilde{c}$, удовлетворяющего этим условиям. Однако, поскольку оператор $\tilde{L}_\alpha$ определен на мировой поверхности, к нему можно применить оператор смены картины. В силу того что $L_1^\alpha = \{Q_0, \oint \tilde{b}\}$, а операторы смены картины Γ и Γ^{-1} (прямой и обратный) БРСТ-инвариантны, имеем $\Gamma^n L_1^\alpha = \{Q_0, \Gamma^n \oint \tilde{b}\}$, поэтому преобразование смены картины применимо также и к полям обобщенных духов (хотя они и лежат вне массовой поверхности).

Удобно привести $\oint \tilde{b}$ в картину -1 с помощью двукратного применения оператора Γ^{-1} . Выражение в картине -1 для $\oint \tilde{b}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \oint \tilde{b}(w) = & \oint \frac{dz}{2i\pi} \left\{ -8dcce^{3\phi-4\chi} \left[\frac{1}{2} P_{-\sigma}^{(2)} - \left[\frac{3}{8} \partial^2 L + \frac{1}{4} \partial L P_{-16\phi+3\chi-3\sigma}^{(1)} + \right. \right. \right. \\ & + L \left(-\frac{3}{2} \partial^2 \phi + \frac{11}{8} \partial^2 \chi + \frac{3}{8} \partial^2 \sigma - 4(\partial\phi)^2 + \frac{5}{8} (\partial\chi)^2 + \right. \\ & + \left. \frac{11}{8} (\partial\sigma)^2 + 6\partial\phi\partial\chi - \frac{1}{2} \partial\phi\partial\sigma + \frac{7}{4} \partial\chi\partial\sigma \right) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{6} P_{-\sigma}^{(3)} \left(-\frac{3}{4} \partial L + L \left(\frac{1}{4} \partial\sigma - \frac{1}{2} \partial\phi \right) \right) + \frac{1}{48} P_{-\sigma}^{(4)} L \left. \right] - \\ & - ce^{2\chi-3\phi} \left[P_{-\sigma}^{(1)} \left(-\frac{3}{8} \partial^2 F - \frac{1}{4} \partial F P_{\phi-2\chi+2\sigma}^{(1)} \right) + \right. \\ & + F \left(\frac{1}{8} \partial^2 \phi + \frac{15}{4} \partial^2 \chi - \frac{1}{4} \partial^2 \sigma + \frac{13}{8} (\partial\phi)^2 - \right. \\ & - \left. 3(\partial\chi)^2 - \frac{5}{2} \partial\phi\partial\chi - \frac{3}{2} \partial\phi\partial\sigma + \partial\chi\partial\sigma \right) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2} P_{-\sigma}^{(2)} \left(-\frac{1}{2} \partial F + F \left(-\frac{3}{2} \partial\phi - \partial\chi \right) \right) - \frac{1}{24} P_{-\sigma}^{(3)} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Далее, поле сопряженного $\tilde{c}$ -духа, удовлетворяющее условию $\{\oint \tilde{b}, \tilde{c}\} = \Gamma$, задается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{c} = & \frac{1}{2} e^{3\phi-\chi} \left\{ F \left(\frac{1}{3} P_{\phi-\chi}^{(3)} + \frac{1}{2} \partial\phi P_{\phi-\chi}^{(2)} \right) + GL \left(\frac{1}{2} P_{\phi-\chi}^{(2)} + \partial\phi P_{\phi-\chi}^{(1)} + \frac{1}{2} \partial F P_{\phi-\chi}^{(2)} \right) + \right. \\ & + \left. \partial GL P_{2\phi-\chi}^{(1)} + G \partial L P_{\phi-\chi}^{(1)} + \frac{1}{2} \partial^2 GL + \partial G \partial L \right\} + be^{4\phi-2\chi} \left\{ \frac{1}{2} G F P_{\phi-\chi-3\sigma/4}^{(1)} P_{\phi-\chi}^{(1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{12} LP_{\phi-\chi}^{(3)} P_{\phi-\chi-3\sigma/4}^{(1)} + \frac{1}{16} \partial L P_{\phi-\chi}^{(2)} P_{\phi-\chi-3\sigma/4}^{(1)} \Big\} + \\ + \partial b b e^{5\phi-3\chi} \left\{ -\frac{1}{8} P_{\phi-\chi-3\sigma/4}^{(1)} P_{2\phi-2\chi-\sigma}^{(2)} + \frac{1}{32} P_{2\phi-2\chi-\sigma}^{(3)} \right\}.$$

Поскольку можно показать, что элементы кольца вакуумных операторов L_1^α и L_2^α коммутируют, $[L_1^\alpha, L_2^\alpha] = 0$, нильпотентный БРСТ-заряд когомологии H_1 полей духов по определению равен

$$Q_1 = \tilde{c}_1 L_1^\alpha + \tilde{c}_2 L_2^\alpha, \quad \tilde{c}_1 \equiv \tilde{c}, \quad \tilde{c}_2 = \oint \tilde{c}.$$

Вычисляя операторные произведения, можно явно проинтегрировать выражение для Q_1 :

$$Q_1 = \oint \frac{dz}{2i\pi} \left\{ c e^\phi (GL + F P_{\phi-\chi}^{(1)}) + \frac{1}{4} e^{2\phi-\chi} \left(GF + \frac{1}{2} L P_{2\phi-2\chi-\sigma}^{(2)} \right) - \partial c c \xi L(z) \right\}.$$

Оно задает новый БРСТ-комплекс в теории суперструны РНШ, который представляет собой элемент когомологии H_1 суперконформных духовых полей.

3. БРСТ-ЗАРЯДЫ ДЛЯ БРСТ-КОГОМОЛОГИЙ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ

В случае некомпактифицированной критической теории суперструны РНШ α -симметрия оказывается единственной дополнительной глобальной симметрией пространства-времени, присутствующей в теории. В теориях РНШ в некритических размерностях или в критических размерностях, но компактифицированных на S^1 , существует громадный набор дополнительных α -симметрий, производимых взаимодействиями с полем Лиувилля (или с компактифицированным полем) [2]–[4]. Таким образом, в d -мерной теории РНШ существуют $d + 1$ дополнительных α -симметрий для когомологии духов H_1 . Объединим эти симметрии с $(d + 1)(d + 2)/2$ симметриями преобразований Пуанкаре (включая симметрию относительно направления поля Лиувилля), в результате эти $d + 2$ симметрии когомологии H_1 , смешивающие материальный и духовый секторы в расширенном пространстве, расширяют группу симметрий пространства с $SO(2, d)$ до $SO(2, d + 1)$ и тем самым вносят первую дополнительную размерность. Далее, можно показать, что когомология H_2 содержит $d + 3$ α -симметрий с суперконформным духовым числом 2, которые в объединении с симметриями Пуанкаре и α -симметриями из H_2 расширяют группу симметрий пространства-времени до $SO(2, d + 2)$, внося вторую дополнительную размерность.

Примером типичного α -генератора когомологии H_2 является

$$L^\beta = \oint \frac{dz}{2i\pi} e^{2\phi} F(X, \psi) F(\varphi, \lambda)(z),$$

где

$$F(X, \psi) = \psi_m \partial^2 X^m - 2\partial\psi_m \partial X^m, \quad F(\varphi, \lambda) = \lambda \partial^2 \varphi - \partial\lambda \partial \varphi,$$

ϕ и λ – компоненты суперлиувиллевского поля (или компактифицированного поля). Кольцо вакуумных операторов для каждого оператора $\tilde{L}$ из H_2 состоит из четырех элементов, а кольцо вакуумных операторов для элемента из H_3 шестимерно. Эти кольца некоммутативны и порождают нетривиальные алгебры симметрий для локальных калибровочных симметрий

$$L_i^\beta \equiv \partial_w^i L^\beta(w), \quad L_i^\gamma \equiv \partial_w^i L^\gamma(w), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

удовлетворяющих соотношению $[L_i^I, L_j^J] = (m-n)C^{IJK}L_K^{i+j}$. Таким образом, БРСТ-заряды на старших уровнях имеют вид

$$Q_2 = \sum_{j=1}^3 \tilde{c}_j^{(2)} L_j^\beta + f^{IJK} \frac{1}{2} c_i^{(2)} c_j^{(2)} \partial_{i+j}^2 \oint \tilde{b}^{(2)}(w).$$

Эту конструкцию можно в принципе обобщить на когомологии H_n полей духов произвольного уровня n , при этом каждый уровень будет нести ассоциированный с ним БРСТ-заряд Q_n ; нам удалось явно провести вычисления только при $n \leq 3$. Задача определения БРСТ-когомологий зарядов Q_n при $n \geq 1$ весьма нетривиальна и интересна, хотя и выглядит правдоподобным, что каждый из зарядов Q_n отвечает теории струны РНШ с определенной геометрией подлежащего пространства.

4. СВОЙСТВА Q_n : КОГОМОЛОГИИ

До сих пор нам удалось исследовать только первый нетривиальный случай $n = 1$. Задача исследования случаев при старших n ждет своего часа. В критическом некомпактифицированном случае единственный нетривиальный элемент $Q_0 + Q_1$ задается безмассовым калибровочным бозоном

$$V(k) = \oint e^{-3\phi} \{ (\vec{A}\partial\vec{X})(\vec{k}\partial\vec{X})(\vec{k}\vec{\psi}) + (\vec{A}\vec{\psi})(\vec{k}\partial\vec{\psi})(\vec{k}\vec{\psi})(\vec{A}\vec{\psi})(\vec{k}\partial\vec{X})^2 \} e^{i\vec{k}\vec{X}},$$

где $\vec{k}\vec{A}(\vec{k}) = 0$, $\vec{k}^2 = 0$. Этот оператор представляет собой элемент пространства H_{-3} . В некритических случаях возникают другие безмассовые моды. В частности, при $d = 4$ в $Q_0 + Q_1$ когомологии присутствуют семь дополнительных безмассовых векторных бозонов, которые вместе с исходным задают $SU(3)$ -октет глюонов. В когомологии отсутствуют нетривиальные массивные моды! Такое теоретико-полевое поведение характерно для струнных теорий в подлежащих пространствах АдС-типа, дуальных конформной теории поля (теории Янга–Миллса при $d = 4$) [2].

5. НОВЫЕ БРСТ-ЗАРЯДЫ И ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ЧИСТЫЕ СПИНОРЫ

В формализме чистых спиноров [5], [6] стандартный БРСТ-оператор

$$Q_{\text{PS}} = \oint \frac{dz}{2i\pi} \lambda^\alpha d_\alpha,$$

где

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}^m \partial X_m \theta^\beta - \frac{1}{8} (\theta \gamma^m \partial \theta) (\gamma_m \theta)_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 16,$$

нильпотентен, если $\lambda \gamma^m \lambda = 0$ (условие чистоты спинора), а операторное произведение двух операторов λ несингулярно. Последнее условие порождено тем обстоятельством, что в стандартном действии чистых спиноров поле λ – это поле свободного духа. Это условие тем не менее можно опустить, оставляя при этом Q нильпотентным даже при сингулярном операторном произведении между чистыми спинорами, если оставить в силе связь чистых спиноров на уровне нормально упорядоченных величин и соблюдать некоторые другие ограничения. Рассмотрим, например, случай наиболее общего операторного произведения между полями $d_\alpha(z)$ и $d_\beta(w)$, разложенными в окрестности средней точки:

$$\begin{aligned} d_\alpha(z) d_\beta(w) = & -\frac{\gamma_{\alpha\beta}^m \Pi_m^{(1)}((z+w)/2)}{z-w} + (z-w)^0 \gamma_{\alpha\beta}^{m_1, m_2, m_3} \Pi_{m_1, m_2, m_3}^{(2)}\left(\frac{z+w}{2}\right) + \\ & + (z-w) (\alpha_1 \gamma_{\alpha\beta}^m \Pi_m^{(3)} + \alpha_2 \gamma^{m_1, \dots, m_5} \Pi_{m_1, \dots, m_5}^{(3)}) \left(\frac{z+w}{2}\right). \end{aligned}$$

Предположим, что λ удовлетворяет операторному произведению,

$$\lambda_\alpha(z) \lambda_\beta(w) \sim (z-w)^{-2} \gamma_{\alpha\beta}^m A_m \left(\frac{z+w}{2}\right) + O(z-w)$$

(отсутствующий член $(z-w)^0$ означает, что связь чистых спиноров выполнена в более слабом смысле нормально упорядоченных величин). Тогда БРСТ-заряд все еще остается нильпотентным, если $\alpha_1 = 0$ или $:A_m \Pi_m^{(3)}: = 0$ (другие сингулярности обращаются в нуль при вычислении следов гамма-матриц). Это в точности та ситуация, которая возникает при рассмотрении отображения суперструна РНШ–чистый спинор:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha = \{Q_0, \theta_\alpha\} = & -\frac{1}{4} b e^{-2\chi+5\phi/2} \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} e^{-\chi+3\phi/2} \gamma_{\alpha\beta}^m \partial X_m \tilde{\Sigma}^\beta + \\ & + c e^{\phi/2} \left(\frac{1}{2} \Sigma_\alpha \partial \phi + \partial \Sigma_\alpha\right), \quad \theta_\alpha = e^{\phi/2} \Sigma_\alpha, \end{aligned}$$

так что

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta \sim \frac{1}{(z-w)^2} \partial b b e^{5\phi-4\chi} \gamma_{\alpha\beta}^m \psi_m + O(z-w).$$

Можно показать, что при таком отождествлении чистый спинор–суперструна РНШ БРСТ-заряд теории чистых спиноров просто отображается в БРСТ-заряд Q_0 теории суперструны РНШ (с точностью до преобразования подобия), а потому оказывается нильпотентным [7]:

$$Q^{\text{PS}} \rightarrow e^{-R} Q_0^{\text{RNS}} e^R, \quad R = 32 \oint \frac{dz}{2i\pi} \partial c c e^{2\chi-2\phi} \partial \chi(z).$$

Тем самым теория РНШ эквивалентна модифицированной теории чистых спиноров с сингулярностью типа полюса второго порядка в операторном произведении теории для чистых спиноров. Эту конструкцию можно обобщить, включив в рассмотрение модифицированные чистые спиноры с более сингулярными операторными произведениями, при этом замечательным образом воспроизводятся БРСТ-операторы теории РНШ со старшими когомологиями полей духов, а порядок старшей сингулярности в разложении операторных произведений для чистых спиноров связан с порядком когомологии полей духов в формализме РНШ! Нам удалось показать выполнение этого свойства при $n = 1$, мы также предполагаем, что оно справедливо и при старших n .

В случае $n = 1$ начнем с поля

$$\tilde{\theta}^\alpha = e^{3\phi/2} \Sigma^\beta \gamma_{\alpha\beta}^m (2\partial^2 X_m + \partial X_m \partial \phi),$$

которое представляет собой примарное поле размерности 0 для пространственно-временного спинора с духовым числом $3/2$ и не связано преобразованием смены картины с предыдущим полем θ с духовым числом $1/2$. Затем положим $\tilde{\lambda}_\alpha = \{Q_0^{\text{RNS}}, \tilde{\theta}_\alpha\}$, удерживая d^α неизменным в картине $-1/2$. Прямые вычисления дают ответ:

$$Q_1^{\text{PS}} = \oint \tilde{\lambda}_\alpha d^\alpha \rightarrow e^{-R} Q_1^{\text{RNS}} e^R$$

с тем же R , что и выше.

ГИПОТЕЗА. Теория суперструны РНШ с БРСТ-оператором Q_n для H_n эквивалентна модифицированной теории чистых спиноров с сингулярным операторным произведением для чистых спиноров, в котором порядок ведущей сингулярности в операторном произведении равен $6n^2 + 6n + 2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Иерархия неожиданных пространственно-временных α -симметрий в суперсимметричных теориях струны РНШ индуцирует кольца вакуумных операторов локальных калибровочных симметрий, смешивающих секторы материи и духов. Эти симметрии поддаются классификации в терминах духовых когомологий H_n . Каждое кольцо вакуумных операторов индуцирует связанный с ним новый БРСТ-заряд Q_n для H_n в теории РНШ, отвечающий некоторой деформированной геометрии подлежащего пространства (типа геометрии пространства анти-де Ситтера при $n = 1$).

Каждый заряд Q_n теории РНШ отвечает деформированной суперструнной теории чистых спиноров, в которой порядок старшей сингулярности в разложении операторного произведения в формализме чистых спиноров связан с порядком n когомологии полей духов в формализме струны РНШ. В дальнейшем мы планируем провести исследование когомологий заряда Q_n при $n \geq 1$, определить геометрические свойства подлежащих пространств, построить полеую теорию струн на основе этих геометрий и т. д. Это, возможно, приведет к полевым теориям струн, сформулированным в терминах теорий чистых спиноров, которые возникают при обобщенных отображениях суперструна РНШ–чистый спинор.

Список литературы

- [1] D. Polyakov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:32 (2009), 6177–6195; [arXiv: 0906.3663](#).
- [2] D. Polyakov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:31 (2009), 5897–5924; [arXiv: 0905.4858](#).
- [3] D. Polyakov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:1 (2009), 113–139.
- [4] D. Polyakov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **22**:13 (2007), 2441–2459.
- [5] N. Berkovits, *JHEP*, **01** (2008), 065.
- [6] N. Berkovits, *JHEP*, **09** (2001), 016.
- [7] D. Polyakov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:14 (2009), 2677–2687.