Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Филиппов, Аффинная гравитация Вейля–Эддингтона–Эйнштейна в контексте современной космологии, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 430–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:57:59

© 2010 г.

А. Т. Филиппов*

АФФИННАЯ ГРАВИТАЦИЯ ВЕЙЛЯ–ЭДДИНГТОНА–ЭЙНШТЕЙНА В КОНТЕКСТЕ СОВРЕМЕННОЙ КОСМОЛОГИИ

Предложены новые модели аффинной теории гравитации в многомерном пространстве-времени с симметричной связностью. Используются и развиваются идеи Вейля, Эддингтона и Эйнштейна, в особенности предложенный Эйнштейном метод получения геометрии с помощью принципа Гамильтона. Более конкретно, коэффициенты связности определяются с помощью “геометрического” лагранжиана, являющегося произвольной функцией обобщенного (несимметричного) тензора кривизны Риччи (и, возможно, других фундаментальных тензоров), выраженного через коэффициенты связности, считающиеся независимыми переменными. Такая теория дополняет стандартную теорию Эйнштейна темной энергией (в первом приближении это космологическая постоянная), нейтральным массивным (или тахионным) векторным мезоном и массивными (или тахионными) скалярными полями. Эти поля взаимодействуют только с гравитацией и могут порождать темную материю и/или инфляцию. Массы новых полей (вещественные или мнимые) имеют геометрическую природу и с необходимостью присутствуют в любых моделях. Конкретный выбор лагранжиана определяет и другие детали теории, например природу полей, которые могут описывать массивные частицы, тахионы или даже “фантомы”. В “естественных” геометрических теориях темная энергия возникает также с необходимостью. Основные параметры теории – космологическая постоянная, масса, возможные безразмерные константы – теоретически не определены, но в рамках современных идей о мультивселенной это, скорее, преимущество, чем недостаток. Рассматриваются дальнейшие обобщения аффинных моделей, а также более детально обсуждаются приближенные эффективные (“физические”) лагранжианы, которые можно использовать в космологии ранней Вселенной.

Ключевые слова: гравитация, космология, аффинная связность, темная энергия, инфляция.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexandre.Filippov@jinr.ru

1. ВВЕДЕНИЕ. ГЕОМЕТРИЯ И ДИНАМИКА АФФИННОЙ ТЕОРИИ

В 1918–1923 г. Вейль [1], Эддингтон [2], [3] и Эйнштейн [4], [5] предложили обобщение теории гравитации Эйнштейна, которую они рассматривали как “объединенную” аффинную теорию гравитационного и электромагнитного поля. Окончательная формулировка была дана Эйнштейном в трех его замечательных работах [4], позднее изложенных Эддингтоном [2] и Эйнштейном [5], но вскоре забытых (см., однако, краткие обсуждения в работах [6], [7]). Простейшая модель Эйнштейна–Вейля недавно была заново интерпретирована в работе [8], в которой также можно найти краткое изложение идей и результатов упомянутых работ, представляющих интерес для современных исследований. В настоящей работе мы начнем с описания двух основных моделей¹⁾, предсказавших (в 1923 г.!) космологическую постоянную и массивную (или тахионную) векторную частицу (называемую *вектоном*), которая сосуществует с гравитоном. Вектон можно интерпретировать как некоторый вид темной материи, взаимодействующей только с гравитацией (или, в тахионном случае, как *инфлатон*).

Великие авторы этих моделей не исследовали свою новую теорию во всех подробностях, поэтому главная цель работы [8] заключалась в поиске простейших сферически-симметричных решений, особенно космологических. В настоящей работе мы предложим обобщение первой модели Эйнштейна на любую размерность и покажем, что путем ее простой размерной редукции можно также получить массивные (тахионные) скалярные мезоны. Заметим, что вторую модель Эйнштейна (и ее обобщения, содержащие скалярные частицы) можно рассматривать как первое приближение, полученное путем разложения лагранжиана с квадратным корнем по степеням векторного поля.

В этом приближении мы выводим общие уравнения, описывающие космологии, и предлагаем использовать дальнейшее упрощение (приближение), для которого можно найти некоторые точные аналитические решения. Подчеркнем, что подход Эйнштейна основан на ясно сформулированном “волевом акте”, приведшем к изящной теории. В конце настоящей работы мы кратко обсуждаем возможные обобщения его идей, представляющие интерес для современной космологии. Но сначала рассмотрим оригинальный подход Эйнштейна и обсудим наиболее непосредственные и экономные обобщения.

Основная идея Вейля заключалась в том, что объединение гравитации и электромагнетизма требует использования неримановой *симметричной связности*. Он рассматривал специальный случай связности, зависящей от симметричного тензора g_{ij} , который он отождествил с римановой метрикой, и от вектора a_i , который он пытался отождествить с электромагнитным потенциалом. Эта связность принадлежит к простейшему классу (введенному в работе [8]):

$$\gamma_{kl}^m = \frac{1}{2} [g^{mn} (g_{nk,l} + g_{ln,k} - g_{kl,n}) + \alpha (\delta_k^m a_l + \delta_l^m a_k) - (\alpha - 2\beta) g_{kl} a^m], \quad (1)$$

¹⁾Если векторное поле обращается в нуль, то обе модели сводятся к теории Эйнштейна с ненулевой космологической постоянной.

где запятая обозначает дифференцирование, $g_{ij}g^{jk} = \delta_j^k$ и $a_m = g_{mk}a^k$. Вейлевская связность отвечает значениям $\alpha = 1$, $\beta = 0$, в случае Эйнштейна $\alpha = -\beta = 1/3$.

Тензор кривизны можно определить без использования какой-либо метрики:

$$r_{klm}^i = -\gamma_{kl,m}^i + \gamma_{nl}^i \gamma_{km}^n + \gamma_{km,l}^i - \gamma_{nm}^i \gamma_{kl}^n. \quad (2)$$

Тогда тензор кривизны типа тензора Риччи (но несимметричный) можно определить, сворачивая индексы i , m (или, эквивалентно, i , l):

$$r_{kl} = -\gamma_{kl,m}^m + \gamma_{nl}^m \gamma_{km}^n + \gamma_{km,l}^m - \gamma_{nm}^m \gamma_{kl}^n \quad (3)$$

(подчеркнем еще раз, что $\gamma_{nl}^m = \gamma_{ln}^m$, но $r_{kl} \neq r_{lk}$). Используя только эти тензоры и антисимметричную тензорную плотность, можно построить достаточно содержательные геометрические структуры. В частности, Эддингтон рассматривал различные виды тензорных плотностей [3]. Наиболее примечательная скалярная плотность имеет вид²⁾

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{-\det r_{ij}} \equiv \sqrt{-r}, \quad (4)$$

что напоминает выражение для фундаментальной скалярной плотности $\sqrt{-\det g_{ij}} \equiv \sqrt{-g}$ в римановой геометрии.

По этой и некоторым другим причинам Эддингтон предложил отождествить симметричную часть тензора r_{ij} ,

$$s_{ij} \equiv \frac{1}{2}(r_{ij} + r_{ji}), \quad (5)$$

с метрическим тензором g_{ij} . Антисимметричная часть

$$a_{ij} \equiv \frac{1}{2}(r_{ij} - r_{ji}) = \frac{1}{2}(\gamma_{im,j}^m - \gamma_{jm,i}^m), \quad a_{ij,k} + a_{jk,i} + a_{ki,j} \equiv 0, \quad (6)$$

сильно напоминает тензор электромагнитного поля, и представляется естественным отождествить ее с этим тензором. Эддингтон предпринял попытку записать само-согласованные уравнения обобщенной теории, но эта задача была решена только Эйнштейном, уже с другим определением метрики.

В качестве отправной точки Эйнштейн (в первой из серии работ [4]) записал принцип действия и предположил, что выражение (4) представляет собой плотность лагранжиана, зависящую от 40 функций связности γ_{kl}^m . Варьируя действие в правой части по этим функциям, он получил 40 уравнений, позволивших ему найти выражение для γ_{kl}^m , имеющее вид (1) при $\alpha = -\beta = 1/3$. Во второй работе [4] он доказал, что этот результат справедлив для любой плотности лагранжиана, зависящей только от s_{ij} и a_{ij} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(s_{ij}, a_{ij}).$$

²⁾Следуя обозначениям Эддингтона, будем обозначать тензорные плотности жирными латинскими буквами. Важно четко различать тензорные плотности и тензоры, коль скоро в нашем распоряжении нет метрического тензора.

Наиболее элементарным примером является $\mathcal{L}(s_{ij} + \alpha a_{ij})$, где α – безразмерная постоянная.

Воспроизведем основные шаги доказательства. Следуя Эйнштейну³⁾, определим новые тензорные плотности:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_{ij}} \equiv g^{ij}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{ij}} \equiv f^{ij}, \quad (7)$$

а также введем сопряженную плотность лагранжиана $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(g^{ij}, f^{ij})$ с помощью преобразования Лежандра

$$s_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial g^{ij}}, \quad a_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial f^{ij}}. \quad (8)$$

Тогда, варьируя $\mathcal{L}$ по γ_{kl}^i и используя введенные выше определения, можно показать, что равенство $\delta \mathcal{L} / \delta \gamma_{kl}^i = 0$ дает следующие 40 уравнений:

$$2\nabla_i^\gamma g^{kl} = \delta_i^l \nabla_m^\gamma (g^{km} + f^{km}) + \delta_i^k \nabla_m^\gamma (g^{lm} + f^{lm}), \quad (9)$$

где ∇_i^γ – ковариантная производная по отношению к аффинной связности γ . Используя выражение для ковариантной производной тензорной плотности f^{kl} ,

$$\nabla_i^\gamma f^{kl} = \partial_i f^{kl} + \gamma_{im}^k f^{ml} + \gamma_{im}^l f^{km} - \gamma_{im}^m f^{kl}, \quad (10)$$

найдем важное соотношение, позволяющее определить фундаментальную векторную плотность a^k :

$$\nabla_i^\gamma f^{ki} = \partial_i f^{ki} \equiv a^k. \quad (11)$$

Тогда из этого соотношения и из выражения (9) найдем, что

$$\nabla_i^\gamma g^{ik} = -\frac{5}{3} a^k, \quad (12)$$

и, таким образом,

$$\nabla_i^\gamma g^{kl} = -\frac{1}{3} (\delta_i^k a^l + \delta_i^l a^k). \quad (13)$$

Теперь можно завершить данный Эйнштейном вывод выражения (1). Для этого следует в первую очередь определить метрический тензор Римана g_{ij} . Естественно определить его с помощью уравнений

$$g^{kl} \sqrt{-g} = g^{kl}, \quad g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m. \quad (14)$$

³⁾Обозначения Эйнштейна не вполне аккуратны, поскольку молчаливо предполагается, что плотность g^{ij} симметрична, а f^{ij} антисимметрична. Однако явное вычисление показывает, что это не так. В действительности производные в выражениях (7), (8) должны быть симметризованы. В конкретных вычислениях это не сложно. Более существенно, что эти определения допускают в геометрии лишь одну размерную константу, например космологическую постоянную Λ с размерностью L^{-2} . Возможно, что характерные константы различны для симметричной и антисимметричной частей. Тогда, для восстановления правильных размерностей в (7), (8), надо умножить плотности g^{ij} , f^{ij} на Λ_s , Λ_a или же ввести новую фундаментальную безразмерную постоянную (см. раздел 2).

Используя g_{ij} , можно также определить ковариантную производную ∇_i по римановой связности:

$$\nabla_i g^{kl} = \nabla_i g_{kl} = 0. \quad (15)$$

С учетом этого теперь можно использовать (13) для вычисления γ_{ij}^k в терминах метрического тензора g_{ij} и вектора $a^k \equiv \bar{a}^k / \sqrt{-g}$ (и найти, что в выражении (1) надо взять $\alpha = -\beta = 1/3$):

$$\gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{6}(\delta_i^k a_j + \delta_j^k a_i) - \frac{1}{2} g_{ij} a^k, \quad (16)$$

где Γ_{ij}^k – риманова связность, соответствующая метрике g_{ij} (символы Кристоффеля). Мы опускаем эти простые, но утомительные вычисления, очень похожие на нахождение стандартной римановой связности в общей теории относительности (подробнее см. работы [4], [5]).

Теперь, возвращаясь к определению несимметричного тензора Риччи r_{ij} (3), можно получить s_{ij} и a_{ij} в терминах метрики γ_{ij}^k (и, таким образом, в терминах метрики g_{ij} и векторного поля a_k):

$$s_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{6} a_i a_j, \quad a_{ij} = \frac{1}{6} (a_{i,j} - a_{j,i}), \quad (17)$$

где $R_{ij} \equiv R_{i,j}(g)$ – стандартный тензор Риччи.

До настоящего момента мы не использовали никакой информации относительно $\mathcal{L}$, кроме зависимости от s_{ij} и a_{ij} (соответственно, $\mathcal{L}^*$ зависит только от g^{ij} и f^{ij}). Чтобы записать полную систему уравнений, следует выбрать аналитическое выражение для плотности лагранжиана. Лучшим кандидатом является, конечно, инвариант Эддингтона (4). Используя тот факт, что этот инвариант является однородной функцией r_{ij} второго порядка, найдем, что $\mathcal{L}^*$ равняется $\mathcal{L}$. Это означает, что достаточно получить $\mathcal{L}$ как функцию от $g^{ij} + f^{ij}$. Ясно (из (7)), что

$$g^{ij} + f^{ij} = -\frac{1}{2\sqrt{-r}} \bar{r}^{ij}, \quad \sum_k r_{ik} \bar{r}^{jk} \equiv r \delta_i^j. \quad (18)$$

Тогда $\det \bar{r}^{ij} = r^3$ и, таким образом,

$$\det(g^{ij} + f^{ij}) = (2\sqrt{-r})^{-4} r^3 = \frac{r}{16}. \quad (19)$$

Используя этот результат, можно найти окончательное выражение для $\mathcal{L}$ (и, таким образом, для $\mathcal{L}^*$):

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{-\det r_{ij}} \equiv \sqrt{-r} = 4\sqrt{-\det(g^{ij} + f^{ij})} \equiv 4\sqrt{-\det(g_{ij} + f_{ij})}. \quad (20)$$

Этот лагранжиан впервые предложил Эддингтон, который попытался отождествить s_{ij} с метрическим тензором, а a_{ij} – с тензором электромагнитного поля. Эйнштейн дал более корректную интерпретацию интуитивной идеи Эддингтона и получил ту же формулу, имевшую уже другой смысл.

Используя этот результат, можно дополнить уравнения (17), выразив s_{ij} и a_{ij} через g^{ij} и f^{ij} , и, наконец, записать уравнения для g_{ij} и f_{ij} . В настоящей работе мы не будем воспроизводить этот несколько громоздкий вывод, а просто приведем эйнштейновский эффективный лагранжиан для теории, определяемой лагранжианом (4):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -2\Lambda\sqrt{-\det(g_{ij} + f_{ij}) + \sqrt{-\det g_{ij}}\left(R(g) + \frac{1}{6}g^{ij}a_ia_j\right)}, \quad (21)$$

который следует варьировать по метрике и векторному полю⁴⁾.

Первый член в лагранжиане (21) существенно нелинейный и сингулярный. В этом, вероятно, заключалась одна из причин того, что о нем надолго забыли. Вариант этого члена с метрикой Минковского снова появился в более простом контексте “нелинейной электродинамики” [9] и в настоящее время называется лагранжианом Борна–Инфельда⁵⁾. Насколько известно автору, лагранжиан (21) серьезно не изучался (нам не удалось даже найти ссылок на эту модель в работах, посвященных исследованию аналогичных вопросов). С современной точки зрения эта теория представляет значительный интерес, поскольку она предсказывает темную энергию (ненулевую космологическую постоянную) и новое поле – массивное (или тахионное) векторное поле, взаимодействующее только с гравитацией.

2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ АФФИННОЙ ТЕОРИИ

Смысл величин g_{ij} и $R(g)$ в лагранжиане (21) должен быть совершенно ясен. Чтобы прояснить интерпретацию величин a_i и f_{ij} , разложим первый член по степеням f до членов порядка f^2 . Обобщая выражение (21) за счет введения нового безразмерного параметра λ , легко найти⁶⁾

$$\sqrt{|\det(g_{ij} + \lambda f_{ij})|} = \sqrt{-g}\sqrt{\det(\delta_j^i + \lambda f_k^i f_j^k)} = \sqrt{-g}\left(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 f_{ij}f^{ij} + \dots\right), \quad (22)$$

и, таким образом, приближенный эффективный лагранжиан содержит член с космологической постоянной и лагранжиан Прока [14] вещественного массивного (или

⁴⁾Здесь мы модернизировали исходные обозначения Эйнштейна, чтобы сделать более очевидными различные интерпретации его теории. Космологическая постоянная Λ вводится для сохранения правильных размерностей: $[\Lambda] = [R] = \text{L}^{-2}$ и $[a_i] = \text{L}^{-1}$. Размерности, которыми выше мы полностью пренебрегали, будут снова введены в следующих разделах.

⁵⁾В свете приведенных выше рассуждений (более подробный исторический обзор см. в работе [8]) называть лагранжианы типа (21) лагранжианами Эддингтона–Борна–Инфельда или даже лагранжианами Борна–Инфельда–Эйнштейна едва ли оправданно (см., например, [10], [11]). Эти работы, а также некоторые современные представления теории суперструн относительно инфляции (см., например, [12]) гораздо ближе по духу к идеям Эддингтона и Эйнштейна, чем к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда, которая, в свою очередь, близка по духу к идеям Ми [13]. Заметим также, что основной акцент в работе [9] сделан на квантовую теорию, а не на обсуждение общей теории относительности.

⁶⁾На самом деле мы используем этот новый параметр для того, чтобы отделить массу векторного поля от космологической постоянной. Как будет показано, при $\lambda = 1$, т.е. для исходного лагранжиана Эддингтона–Эйнштейна (20), масса близка к величине $\sqrt{\Lambda}$.

тахсионного) векторного поля a_i , полученный через несколько лет после выхода работ Вейля и Эйнштейна, где эта теория рассматривается как часть обобщенной гравитации.

Следует, однако, подчеркнуть, что это только первое приближение. Точная теория гораздо сложнее. Действительно, как можно видеть, точное выражение для детерминанта может содержать нули при достаточно большом “электрическом” векторном поле $\vec{e}_i \equiv f_{0i}$. Например, если $f_{ij} = 0$, $i, j \neq 0$, то⁷⁾

$$\det(\delta_j^i + \lambda f_k^i f_j^k) = 1 - \lambda^2 |\vec{e}^2|, \quad (23)$$

где $\vec{e}^2 \equiv |g^{00}| \sum_i g^{ii} e_i^2$. Поэтому в точной теории темная энергия и темная материя (возможно, с инфляцией) нетривиальным образом влияют друг на друга. Существование верхней границы для $|E|$ может предоставить нам возможность установить максимальное значение отношения темной материи к темной энергии (конечно, в предположении, что векторное поле имеет вещественную массу и дает определяющий вклад в плотность темной материи). Это возможно только при определенном космологическом сценарии, предположительно учитывающем инфляцию и некоторые другие виды материи, что и побуждает нас к некоторому обобщению модели.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, закончим с интерпретацией основополагающих моделей Эйнштейна, что требует введения физических полей с правильной размерностью. В третьей из работ Эйнштейна [4] записан окончательный вид уравнений для второй модели⁸⁾, где

$$\mathcal{L}^* = -2\Lambda\sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 f_{ij} f^{ij} \right). \quad (24)$$

Ниже мы увидим, что введение параметра λ позволяет сделать массу вектона абсолютно произвольной.

Теперь уравнения движения можно записать, вычислив s_{ij} и a_{ij} с использованием выражений (17) и (8):

$$R_{ij} - \Lambda g_{ij} = -\lambda^2 \Lambda \left(f_{ik} f_j^k - \frac{1}{4} g_{ij} f_{kl} f^{kl} \right) - \frac{1}{6} a_i a_j, \quad (25)$$

$$\Lambda f_{ij} = \frac{1}{6} (\partial_i a_j - \partial_j a_i), \quad (26)$$

а уравнение для потенциала a_i немедленно следует из (11) и (26). Здесь g_{ij} , f_{ij} являются безразмерными, поскольку $[a_i] = L^{-1}$ и мы используем систему, в которой $c = 1$. Теперь умножим a_i^2 на некоторую величину c_A^2 с размерностью ML^3T^{-2} и определим стандартные поля F_{ij} и A_i с правильными размерностями в системе

⁷⁾Такая конфигурация реализуется в сферически-симметричном случае. Тогда ненулевыми являются потенциалы $a_t \equiv a_0(t, r)$, $a_r \equiv a_1(t, r)$ и единственной ненулевой компонентой поля является f_{01} .

⁸⁾Эйнштейн предложил этот лагранжиан без связи с обсуждавшимся выше лагранжианом вида “квадратного корня”. Позже он решил выбрать $\Lambda = 0$ при конечном произведении $\lambda^2 \Lambda$, однако его окончательный вердикт заключался в том, что данная теория не описывает “реальную физику”.

CGS соотношением

$$6c_A \Lambda f_{ij} \equiv F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad A_i \equiv c_A a_i. \quad (27)$$

Переписывая уравнение (25) в терминах физических полей, находим

$$R_{ij} - \Lambda g_{ij} = -\kappa \left(F_{ik} F_j^k - \frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} - \mu^2 A_i A_j \right), \quad (28)$$

где $\kappa^{-1} \equiv 36\lambda^{-2}\Lambda c_A^2$ и $\mu^2 \equiv -6\lambda^{-2}\Lambda$. Подгоняя параметр c_A , можно отождествить κ с гравитационной постоянной G (ниже мы также положим $\kappa = 1$), а отождествляя $\kappa \equiv G/c^4$, получаем стандартные обозначения. Эти уравнения, как и уравнения для A_i , можно вывести из эффективного лагранжиана⁹⁾

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \kappa \left(\frac{1}{2} F_{kl} F^{kl} + \mu^2 A_k A^k \right) \right], \quad (29)$$

варьируя его по g_{ij} и A_i . Аналогично можно записать эффективный лагранжиан для точного лагранжиана вида “квадратного корня”. Можно также просто восстановить квадратный корень по второму и третьему членам приближенного лагранжиана (29)¹⁰⁾.

Добавим несколько слов по поводу свободных параметров в лагранжиане (считая здесь, что $\mu^2 > 0$). В настоящее время значение Λ оценивается как $\simeq 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ (см., например, [15]–[19]). Длина де Бройля для вектона в самых маленьких галактиках должна быть меньше их размерностей $\sim 10^{21} \text{ см}$. Если средняя скорость вектона $\sim 10^{-3} c$, получаем, что $\lambda \Lambda^{-1/2} < 10^{-3} 10^{21} \sim 10^{18} \text{ см}$, и, таким образом, мы должны считать, что $\lambda < 10^{-10}$. Такую наивную оценку можно критиковать, и мы на ней не настаиваем¹¹⁾. По этим причинам ниже мы будем рассматривать эти параметры в качестве свободных. В применении к космологии это наиболее естественно в контексте *мультивселенной* (см., например, обсуждение в работе [21]). Современный статус темной энергии, темной материи и инфляции не позволяет сделать более строгих утверждений относительно значений параметров, так что далее мы будем оперировать с чисто математическими формулировками, не возвращаясь к численным оценкам.

⁹⁾Подчеркнем, что согласно (25) $\mu^2 < 0$, т.е. вектон должен быть тахионом. В двух первых статьях [4] Эйнштейн неявно полагал, что $\mu^2 > 0$, и в работе [8] мы называли моделью Эйнштейна эффективный лагранжиан с $\mu^2 > 0$. Таким образом, геометрическая модель Эйнштейна не вполне соответствует его эффективной динамической модели.

¹⁰⁾Приближенный лагранжиан (29) корректно описывает свойства любой аффинной теории с одним векторным полем в пределе малого отклонения аффинной связности от римановой связности. В следующем приближении по A^2 соответствующая физическая модель будет существенно зависеть от конкретной структуры выбранной аффинной геометрии.

¹¹⁾Если мы не хотим дополнительно вводить очень большие или очень маленькие безразмерные параметры и полагать $\lambda \sim 1$, то оценка массы вектона должна быть много меньше, чем лучшая имеющаяся оценка нижней границы для массы фотона ($\leq 10^{-51} \text{ г}$, см. [20]), и, строго говоря, от интерпретации вектона как массивного фотона нельзя полностью отказаться без дальнейших серьезных исследований.

Для наиболее популярных моделей инфляции требуется несколько массивных скалярных мезонов (см., например, [15]–[19]). В рамках рассмотренных выше идей нет очевидного механизма инфляции при $\mu^2 > 0$. В работе [8] изучалась упрощенная космологическая модель, основанная на вектонной гравитации, и было показано, что несмотря на существование некоторых простых экспоненциально возрастающих решений, ее едва ли можно использовать в каком-либо инфляционном сценарии. Ранее в работе [22] обсуждалось разумное решение инфляционного типа при $\mu^2 < 0$. Вероятно, легче найти реалистичный механизм инфляции в теории гравитации, взаимодействующей с многими векторными мезонами (см. [23]–[28]), но наиболее естественные и наглядные модели инфляции требуют массивных скалярных мезонов (обычно называемых инфлатонами).

Интересно отметить, что наиболее естественная теория с лагранжианом типа “квадратного корня” напоминает последние модели Борна–Инфельда, предложенные для описания инфляции в рамках теории суперструн (см., например, [12]). Хотя лагранжиан Эйнштейна, даже с параметром λ , предсказывает $\mu^2 < 0$, не исключено, что для более общей связности (1) возможно $\mu^2 > 0$ (см. приложение).

Теперь покажем, как можно получить такие массивные (или тахионные) частицы путем простейшей размерной редукции обобщенной на высшие измерения аффинной вектонной гравитации. В самом деле, предыдущие построения легко распространить из размерности $D = 4$ на любую размерность $D \neq 2$. Нетрудно заметить, что в геометрических уравнениях необходимо сделать следующие замены: в (12) заменить $5/3$ на $(D+1)/(D-1)$, в (13) заменить $1/3$ на $(D-1)^{-1}$, а соотношения (16) и (17) заменить на

$$\gamma_{kl}^m = \Gamma_{ij}^k + [(D-1)(D-2)]^{-1} [\delta_k^m a_l + \delta_l^m a_k - (D-1)g_{kl}a^m], \quad (30)$$

$$s_{ij} = R_{ij}(g) + [(D-1)(D-2)]^{-1} a_i a_j, \quad a_{ij} = [(D-1)(D-2)]^{-1} (a_{i,j} - a_{j,i}).$$

Уравнения, использующие конкретные лагранжианы, начиная с (19), зависят от D более существенно, как можно видеть из соотношения, которое несложно вывести:

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{-\det r_{ij}} \sim \sqrt{-g} [\det(\delta_i^j + f_{ij})]^{1/D-2}. \quad (31)$$

(Заметим, что при $D = 2$ это выражение теряет смысл.) Теперь, проводя простейшую размерную редукцию к $D = 4$, можно интерпретировать компоненты векторного поля a_k при $k \geq 4$ как вещественные массивные скалярные поля¹²⁾, “геометрические” массы которых совпадают с массой вектона. Компоненты F_{ik} , $k \geq 4$, $i \leq 3$, дают кинетические члены для скалярных полей $A_k(x^0, x^1, x^2, x^3)$. В выражении для точного лагранжиана (21) величина $\det(g_{ij} + f_{ij})$ зависит от производных как вектона, так и скалярных полей. В F^2 -приближении (29) получаем стандартные скалярные члены. Достаточно записать это выражение с одним скалярным полем:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \kappa \left(\frac{1}{2} F_{kl} F^{kl} + \mu^2 A_k A^k + g^{ij} \partial_i \psi \partial_j \psi + m^2 \psi^2 \right) \right]. \quad (32)$$

¹²⁾ С этого момента мы не будем различать вещественные и мнимые (тахионные) массы. В приложении приведены аргументы в пользу существования геометрических моделей с вещественными массами векторного и скалярного полей.

Ниже мы рассматриваем только эту линеаризованную (по A_k и ψ) модель, которую мы в дальнейшем упростим, рассматривая ее сферически-симметричный сектор¹³⁾.

3. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И КОСМОЛОГИЯ

В общем случае сферически-редуцированная теория описывается двумерными дифференциальными уравнениями, которые не являются интегрируемыми, за исключением специальных случаев (многочисленные примеры и ссылки приведены, например, в работах [29]–[37]). Следуя подходу к размерной редукции и к возникающей $(1+1)$ -мерной дилатонной гравитации, развитому в работах [29], [30], [32], [34]–[37], эти уравнения нетрудно вывести (см. [8]).

Дилатонная гравитация, взаимодействующая с массивным векторным полем (которую мы будем называть *векторно-дилатонной гравитацией*), сложнее, чем хорошо исследованные модели дилатонной гравитации, взаимодействующей только со скалярными полями, и поэтому требует отдельного рассмотрения. В первую очередь необходимо провести дальнейшую редукцию теории к статической или космологической конфигурации.

Простейший способ вывода соответствующих уравнений основан на предположении, что все функции в уравнениях зависят или от r , или от t . Однако это не самая общая размерная редукция одномерной теории. Существуют более общие редукции, позволяющие одновременно интерпретировать статические состояния (черные дыры), космологию и некоторые волны. Эти обобщенные редукции были предложены в работах [35], [36], посвященных дилатонной гравитации, взаимодействующей со скалярными полями и абелевыми калибровочными полями. В настоящей работе мы обсуждаем только космологические редукции (статические решения более подробно представлены в работе [8]).

Простейшую космологическую модель можно построить с помощью таких же наивных редукций, которые использовались для статических состояний в работе [8]. Однако это не самая общая размерная редукция, дающая все возможные сферически-симметричные космологические решения. Более общая процедура описана в работе [36]. Следуя этой процедуре, запишем общую сферически-симметричную метрику в виде

$$ds_4^2 = e^{2\alpha} dr^2 + e^{2\beta} d\Omega^2(\theta, \phi) - e^{2\gamma} dt^2 + 2e^{2\delta} dr dt, \quad (33)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ зависят от t и r , а $d\Omega^2(\theta, \phi)$ – метрика двумерной сферы $S^{(2)}$. Тогда легко получить двумерную редукцию четырехмерной теории (32)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & e^{2\beta} [e^{-\alpha-\gamma} (\dot{A}_1 - A'_0)^2 - e^{-\alpha+\gamma} (\psi'^2 + \mu^2 A_1^2) + \\ & + e^{\alpha-\gamma} (\dot{\psi}^2 + \mu^2 A_0^2) - e^{\alpha+\gamma} (V + 2\Lambda)] + \mathcal{L}_{\text{gr}}, \end{aligned} \quad (34)$$

¹³⁾ Сферическую редукцию можно применить к эффективному лагранжиану (21) и, с некоторой осторожностью, к исходному лагранжиану (4).

где штрих обозначает дифференцирование по r , а точка – дифференцирование по t , $\psi = \psi(t, r)$, $V = V(\psi)$, $A_i = A_i(t, r)$, $\dot{A}_1 - A'_0 \equiv F_{10}$, а

$$\mathcal{L}_{\text{gr}} \equiv e^{-\alpha+2\beta+\gamma}(2\beta'^2 + 4\beta'\gamma') - e^{\alpha+2\beta-\gamma}(2\dot{\beta}^2 + 4\dot{\beta}\dot{\alpha}) + 2ke^{\alpha+\gamma} \quad (35)$$

– гравитационный лагранжиан, записанный с точностью до опущенных полных производных, которые не влияют на уравнения движения. Вариации этого лагранжиана дают все уравнения движения, кроме одной связи

$$-\dot{\beta}' - \dot{\beta}\beta' + \dot{\alpha}\beta' + \dot{\beta}\gamma' = \frac{1}{2}(\dot{\psi}\psi' + A_0A_1), \quad (36)$$

которую следует получить до того, как мы пренебрегли δ -членом в метрике (взяв предел $\delta \rightarrow -\infty$). Все остальные уравнения движения можно получить из эффективного лагранжиана (34).

Теперь различие между *статическими* и *космологическими* решениями заключается в зависимости их “материальных” полей A_i и ψ от пространственно-временных координат. Будем называть *статическим* решение, для которого $A_i = A_i(r)$ и $\psi = \psi(r)$. Если $A = A_i(t)$ и $\psi = \psi(t)$, то будем называть решение *космологическим*. Кроме того, могут существовать *волноподобные* решения, для которых A и ψ зависят от линейных комбинаций t и r , но здесь мы не будем обсуждать эту возможность (см., например, [37] и приведенную там библиографию). Как для статических, так и для космологических решений гравитационные переменные в общем случае зависят от t и r . Чтобы решить уравнения движения, можно их редуцировать, разделяя переменные t и r . Очевидно, что для разделения переменных t и r в метрике необходимо потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$\alpha = \alpha_0(t) + \alpha_1(r), \quad \beta = \beta_0(t) + \beta_1(r), \quad \gamma = \gamma_0(t) + \gamma_1(r). \quad (37)$$

Подставляя эти равенства в уравнения движения, можно найти ограничения на гравитационные (и, возможно, на материальные) переменные, которые должны быть удовлетворены (подробности см. в работе [36], где можно найти полный список статических и космологических сферически-симметричных решений в случае, когда векторное поле тождественно обращается в нуль; мы будем называть этот случай “скалярной” космологией: здесь мы приведем только краткую сводку решений и простое обобщение на случай ненулевого векторного поля).

Наивная космологическая редукция (в которой все поля предполагаются независимыми от r) не позволяет получить стандартную скалярную космологию Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ). Как было показано в работе [36] (см. также [32]), для всех однородных изотропных космологических решений имеют место условия

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta}, \quad \gamma' = 0, \quad \beta_1'' + ke^{-2\beta_1} = 0, \quad ke^{-2\beta_1} - 3\beta_1'^2 - 2\beta_1'' = C, \quad (38)$$

где C – постоянная, пропорциональная 3-кривизне (ее зависимость от времени определяется множителем $e^{-2\alpha_0}$), а третье уравнение представляет собой условие изотропности. Пренебрегая несущественными постоянными множителями, мы также

выбрали $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$. Видно, что в случае наивной редукции условиям изотропности (38) можно удовлетворить, только если $k = 0$, и что первое условие не предписано уравнением (36). Таким образом, наивная редукция дает, вообще говоря, однородную неизотропную космологию.

Для скалярной космологии ФРУ $\beta' \neq 0$, и все условия (38) могут удовлетворяться. Тогда эффективный одномерный лагранжиан, описывающий как наивную космологию, так и космологию ФРУ, имеет вид

$$\mathcal{L}^{(1)} = 6\bar{k}e^{\alpha+\gamma} - e^{2\beta} [e^{\alpha+\gamma}(V + 2\Lambda) - e^{\alpha-\gamma}(2\dot{\beta}^2 + 4\dot{\beta}\dot{\alpha} - \dot{\psi}^2)], \quad (39)$$

где $\bar{k}$ – новая вещественная постоянная, связанная с k и C ; α , β , γ и ψ зависят только от t . Полагая $\alpha(t) = \beta(t)$, получаем лагранжиан для скалярной космологии ФРУ, для которого нетрудно вывести уравнения движения.

Теперь запишем общий космологический лагранжиан Вейля-Эддингтона-Эйнштейна (ВЭЭ), дополненный минимально взаимодействующим скалярным полем (которое может представлять или материю, или инфлатон). На первый взгляд, размерная редукция сферически-симметричного лагранжиана (34), (35) с векторным полем не должна отличаться от обычной редукции, используемой в случае скалярной космологии, поэтому ее можно записать в виде

$$\mathcal{L}^{(1)} = 6\bar{k}e^{\alpha+\gamma} + e^{2\beta} [e^{-\alpha-\gamma}\dot{A}_1^2 - e^{-\alpha+\gamma}\mu^2 A_1^2 - e^{\alpha+\gamma}(V + 2\Lambda) - e^{\alpha-\gamma}(2\dot{\beta}^2 + 4\dot{\beta}\dot{\alpha} - \dot{\psi}^2)], \quad (40)$$

где все поля зависят от t . Тогда, полагая $\alpha = \beta$, очевидно, получаем космологию типа ФРУ с векторным полем. Однако, в отличие от скалярного поля, уравнения для двумерного векторного поля

$$\begin{aligned} \partial_0 [e^{\alpha_0-\gamma_0+2\beta_1}\dot{A}_1] &= -\mu^2 e^{\alpha_0+\gamma_0+2\beta_1} A_1, \\ \partial_1 [e^{\alpha_0-\gamma_0+2\beta_1}\dot{A}_1] &= -\mu^2 e^{3\alpha_0-\gamma_0+2\beta_1} A_0 \end{aligned} \quad (41)$$

налагают дополнительные связи на $\beta_1(r)$. Первое уравнение не зависит от β_1 , но второе требует выполнения условий или $\beta'_1(r) = 0$, или $\beta'_1(r) = \text{const}$. Второе условие дает $A_0 \sim A_1$, так что условие (36) оказывается несовместным с условием изотропии $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$. Поэтому остается только первый случай, $\beta'_1(r) \equiv 0$, из которого следует, что $k = \bar{k} = 0$. Хотя условие (36) тождественно удовлетворяется (коль скоро мы предположили, что $\gamma' = 0$), из него не следует необходимое условие изотропности $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$, которое автоматически возникает в случае скалярной космологии. Как будет показано ниже, в случае векторной космологии это условие не может удовлетворяться точно, а может удовлетворяться лишь приближенно.

Подводя итог обсуждению, рассмотрим *векторно-скалярную космологию*, описываемую лагранжианом (40), в котором $k = \bar{k} = 0$, а A_1 – это A_z -компонента четырехмерного векторного поля (откуда следует, что в общем случае космология должна быть неизотропной). Чтобы записать соответствующие уравнения движения в максимально ясном и компактном виде, введем обозначения

$$\rho \equiv \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta), \quad \sigma \equiv \frac{1}{3}(\beta - \alpha), \quad A_{\pm} = e^{-2\rho+4\sigma}(\dot{A}^2 \pm \mu^2 e^{2\gamma} A^2), \quad \bar{V} \equiv V(\psi) + 2\Lambda, \quad (42)$$

где $A_1 \equiv A_z \equiv A$. Тогда лагранжиан для векторно-скалярной космологии имеет вид

$$\mathcal{L}^{(1)} = e^{2\rho-\gamma}(\dot{\psi}^2 - 6\dot{\rho}^2 + 6\dot{\sigma}^2) + e^{3\rho-\gamma}A_- - e^{3\rho+\gamma}\bar{V}(\psi). \quad (43)$$

Видно, что A , ψ , ρ , σ являются динамическими переменными, а e^γ – лагранжев множитель, вариации которого дают оставшуюся связь для энергии:

$$\dot{\psi}^2 - 6\dot{\rho}^2 + 6\dot{\sigma}^2 + A_- + e^{2\gamma}\bar{V} = 0 \quad (44)$$

(связь для импульса (36) выполнена по построению). Другие уравнения имеют вид

$$\ddot{A} + (\dot{\rho} + 4\dot{\sigma} - \dot{\gamma})\dot{A} + e^{2\gamma}\mu^2 A = 0, \quad (45)$$

$$4\ddot{\rho} + 6\dot{\rho}^2 - 4\dot{\rho}\dot{\gamma} - 6\dot{\sigma}^2 + \frac{1}{3}A_- + \dot{\psi}^2 - e^{2\gamma}\bar{V} = 0, \quad (46)$$

$$\ddot{\sigma} + 3\dot{\sigma}\dot{\rho} - \dot{\sigma}\dot{\gamma} - \frac{1}{3}A_- = 0, \quad (47)$$

$$\ddot{\psi} + (3\dot{\rho} - \dot{\gamma})\dot{\psi} + \frac{1}{2}e^{2\gamma}\bar{V}_\psi = 0. \quad (48)$$

Эти уравнения гораздо сложнее уравнений скалярной космологии. Они являются неинтегрируемыми в любом смысле и довольно трудно поддаются качественному анализу. Их можно было бы существенно упростить, если бы оказалось возможным пренебречь полем σ . К сожалению, очевидно, что это, вообще говоря, невозможно, поскольку тогда $A_- = 0$, а последнее условие несовместно с остальными уравнениями. Это означает, что точные решения модели ВЭЭ (даже с многочисленными скалярными полями, минимально взаимодействующими с гравитацией) должны быть неизотропны¹⁴⁾.

Чтобы получить упрощенную модель, можно пренебречь уравнением (48) и положить $\sigma \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, $V(\psi) \equiv 0$. Тогда $\rho = \alpha = \beta$ и приближенный эффективный лагранжиан (43) принимает вид¹⁵⁾

$$\mathcal{L}_a = -6\dot{\alpha}^2 e^{3\alpha-\gamma} - 2\Lambda e^{3\alpha+\gamma} + \dot{A}^2 e^{\alpha-\gamma} - \mu^2 A^2 e^{\alpha+\gamma}. \quad (49)$$

Соответствующими уравнениями движения тогда являются три уравнения (44)–(46), где $\sigma = \psi = V = 0$ и $\rho = \alpha$. Первое уравнение (44) эквивалентно обращению в нуль гамильтониана. Обозначая $f \equiv e^\alpha$ и налагая условие $\gamma = 0$, фиксирующее “стандартную” калибровку, получаем

$$\mathcal{H}_0^a \equiv f(-6\dot{f}^2 + 2\Lambda f^2 + \dot{A}^2 + \mu^2 A^2) = 0. \quad (50)$$

¹⁴⁾ Если бы мы ввели другие скалярные поля, взаимодействие которых с гравитацией не является минимальным, это утверждение могло бы перестать быть верным. На данном этапе исследований мы не готовы вводить добавочные векторные поля или поля со спином 1/2.

¹⁵⁾ Выше мы обычно пренебрегали размерностью всех переменных и опускали гравитационную постоянную. Здесь нам только требуется восстановить одну из размерностей, полагая, что $[t^{-2}] = [k] = [\Lambda] = [\mu^2] = [L^{-2}]$.

Другая полезная калибровка – *калибровка светового конуса* – имеет вид $\alpha = \gamma$. В этой калибровке эффективный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_1^a \equiv -6\dot{f}^2 + 2\Lambda f^4 + \dot{A}^2 + f^2 \mu^2 A^2 = 0. \quad (51)$$

Также нетрудно записать уравнения, не зависящие от выбора калибровки.

В работе [8] мы построили решения этих уравнений, используя итерационные схемы. Недавно С.Ю. Вернов получил несколько аналитически точных решений для специальных значений параметров.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Чтобы действительно сопоставить аффинную теорию с “реальной физикой”, мы должны сформулировать и достаточно детально исследовать “настоящую геометрическую” теорию с лагранжианом типа “квадратного корня”. Введение в этот лагранжиан параметра λ нельзя считать решением проблемы массы вектона, однако недавно автор осознал, что существует гораздо более красивое решение. Как было отмечено в приложении к книге [3], для несимметричной матрицы r_{ik} существует другая скалярная плотность, аналогичная (4). Если мы заменим определитель $\det r_{ik}$ на другую скалярную плотность веса 2

$$\det' r_{ij} \equiv \frac{1}{4!} \epsilon^{ijkl} \epsilon^{mnrs} r_{im} r_{jn} r_{kr}^T r_{ls}^T, \quad r_{kr}^T = r_{rk},$$

то можно записать более общий лагранжиан

$$\mathcal{L} \equiv \alpha \sqrt{-\det r_{ij}} + \alpha' \sqrt{-\det' r_{ij}}. \quad (52)$$

Для этого лагранжиана космологическую постоянную и массу вектона можно брать произвольно.

В действительности в четырехмерной аффинной теории существует еще одна скалярная плотность веса 2,

$$\det'' r_{ij} \equiv \frac{1}{4!} \epsilon^{ijkl} \epsilon^{mnrs} r_{im} r_{jn} r_{kr} r_{ls}^T \equiv \frac{1}{4!} \epsilon \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r^T \cdot \epsilon,$$

квадратный корень из которой также можно было бы добавить к “геометрическому” лагранжиану (52).

Все три плотности с геометрической точки зрения одинаково “фундаментальны”, но их зависимости от симметричной и антисимметричной частей тензора r_{ij} существенно различаются. Действительно, плотность

$$\det'' r_{ij} = \det s_{ij} - \det a_{ij}$$

не содержит квадратичных по a_{ij} членов, тогда как $\det r_{ij}$ и $\det' r_{ij}$ содержат члены порядка a^2 с противоположными знаками. Эти члены легко вычислить в случае диагональной матрицы s_{ij} . Действительно, предположим, что $s_{ij} = \delta_{ij} s_i$, и введем

для матрицы a_{ij} естественные обозначения:

$$\begin{aligned} e_i &\equiv a_{0i}, & \tilde{e}_i &\equiv \frac{e_i}{\sqrt{s_0 s_i}}, \\ h_i &\equiv \epsilon_{ijk} a_{jk}, & \tilde{h}_i &\equiv \frac{h_i}{\sqrt{s_j s_k}}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тогда легко получить интуитивно понятные выражения для всех трех плотностей:

$$\begin{aligned} \det r_{ij} &= [1 - \tilde{e}^2 + \tilde{h}^2 + (\tilde{e} \cdot \tilde{h})^2] \prod_i s_i, & \det' r_{ij} &= \left[1 + \frac{1}{3} \tilde{e}^2 - \frac{1}{3} \tilde{h}^2 + (\tilde{e} \cdot \tilde{h})^2 \right] \prod_i s_i, \\ \det'' r_{ij} &= [1 - (\tilde{e} \cdot \tilde{h})^2] \prod_i s_i. \end{aligned}$$

Обобщение лагранжиана (52), содержащее три квадратных корня, задавало бы весьма сложную и не очень изящную теорию.

По существу, эквивалентный, но более простой лагранжиан можно сконструировать из следующих трех скалярных плотностей веса 2:

$$d_0 \equiv \det s_{ij}, \quad d_2 \equiv \epsilon \cdot s \cdot s \cdot a \cdot a \cdot \epsilon, \quad d_4 \equiv \epsilon \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \epsilon, \quad (53)$$

где a обозначает матрицу a_{ij} . Тогда “геометрическая” плотность лагранжиана,

$$\mathcal{L} \equiv \alpha \sqrt{|d_0| + \alpha' d_2 + \alpha'' d_4}, \quad (54)$$

в принципе ничем не хуже эйнштейновской, хотя с ней и труднее работать. Тогда в зависимости от знаков численных коэффициентов можно было бы получить положительную или отрицательную космологическую постоянную, а также обычный или экзотический (фантомный) знак кинетической энергии векторного поля.

Заметим, что в общем случае лагранжиан имеет нули, подобно более простому лагранжиану Борна–Инфельда.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко опишем основные результаты, их возможные обобщения и приложения.

Эйнштейновский подход к построению обобщенной теории гравитации состоит из двух этапов. На первом этапе предполагается, что общая симметричная связность должна ограничиваться применением принципа Гамильтона к общему лагранжиану, зависящему либо от r_{ij} (см. две первые статьи в [4]), либо от s_{ij} и a_{ij} (см. третью статью в [4])¹⁶⁾. Эйнштейн никак не мотивировал свое предположение, однако легко видеть, что простейшая вытекающая из него теория в пределе $a_{ij} = 0$ совпадает

¹⁶⁾Эта идея была совершенно чуждой Вейлю и Эддингтону, которые начинали с задания конкретной геометрии. Точнее, они сначала постулировали связность (1) с $\alpha = 1$, $\beta = 0$, а затем пытались написать некоторые уравнения, обобщающие уравнения Эйнштейна. Хотя их общий подход и коэффициенты связности отличались от предложенных Эйнштейном, их уравнения имели много общего, например отличную от нуля (точно или в некотором приближении) космологическую постоянную и массивное (тахинное) векторное поле.

со стандартной теорией, дополненной космологическим членом. На этом этапе Эйнштейну удалось получить весьма нетривиальное выражение для связности (1) и общие уравнения (17), которые выводят на сцену массивное (таххионное) векторное поле (попутно была определена метрика g^{ij}). На следующем этапе надо выбрать конкретный лагранжиан $\mathcal{L}(s_{ij}, a_{ij})$.

Эйнштейн не предложил никакого критерия для выбора лагранжиана, и его выбор выглядит достаточно произвольным с геометрической и физической точек зрения.

Сформулируем естественные требования к геометрическому лагранжиану $\mathcal{L}$:

- 1) независимость лагранжиана от размерных постоянных;
- 2) безразмерность его интеграла по D -мерному пространству-времени;
- 3) независимость его аналитической формы от D ;
- 4) лагранжиан может зависеть от переменных, имеющих непосредственный геометрический смысл и естественное физическое истолкование;
- 5) наиболее важное требование – согласие обобщенной теории с хорошо установленными экспериментальными следствиями стандартной теории Эйнштейна.

Последнее требование наиболее трудно проверить без подробного развития теории.

Требование 4 сформулировано не вполне четко и зависит от нашего понимания, что есть физика, а что – геометрия. Ясно, что переменные a_{ij} удовлетворяют условию 4, а лагранжианы (4), (52), (54) – условиям 1–4. Однако векторное поле a_i также фундаментально (см. приложение), и мы можем написать плотность, зависящую от него и удовлетворяющую первым четырем условиям. Например, определим еще одну плотность веса 2:

$$d_1 \equiv \epsilon \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot \bar{a} \cdot \epsilon,$$

где $\bar{a}$ обозначает матрицу $a_i a_j$.

Заменяя в (54) плотность d_4 на d_1 , получим лагранжиан, удовлетворяющий условиям 1–4 и содержащий дополнительный массовый член (это очевидно, если взять диагональную матрицу s_{ij}).

Еще один вопрос связан с ролью метрического тензора g_{ij} в геометрии и в физике. В более общей постановке это вопрос о смысле геометрического лагранжиана Эйнштейна. В геометрическом подходе Вейля тензор g_{ij} вводится с самого начала, но он определен с точностью до преобразования Вейля. В подходе Эйнштейна он определяется (на первый взгляд, однозначно) с помощью принципа Гамильтона. Однако мы знаем, что метрика зависит от выбора калибровки (системы) Вейля и что векторное поле также зависит от этого выбора.

Эйнштейн не отвечает на этот вопрос, но мы должны попытаться глубже понять взаимосвязи между геометрией и физикой хотя бы на этом уровне. В частности, необходимо тщательно изучить и понять роль конформных преобразований, выбор калибровки (системы) Вейля и, в особенности, смысл и последствия различного выбора независимых полей в первоначальном геометрическом лагранжиане.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Изложим кратко основные геометрические факты, использованные в настоящей работе. Насколько известно автору, наилучшее изложение неримановой геометрии для физиков можно найти в старой книге Эйзенхарта [38].

Здесь мы говорим лишь о симметричной связности, хотя многие утверждения верны и в несимметричном случае¹⁷⁾.

Общая симметричная связность имеет вид

$$\gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + A_{jk}^i, \quad (55)$$

где Γ_{ij}^k – символ Кристоффеля, а A_{jk}^i – симметричный по нижним индексам произвольный тензор (говоря точнее, для любой симметричной связности существуют симметричный тензор g_{ij} и тензор $A_{jk}^i = A_{kj}^i$ такие, что выполнено (55)).

Определив вектор $A_k \equiv A_{ik}^i$, можно показать, что антисимметричная часть тензора r_{jk} равна ротору вектора A_k , т.е.

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(A_{i,j} - A_{j,i}). \quad (56)$$

С точностью до нормировки это уравнение совпадает со вторым уравнением (17), которое было получено выше более сложным способом. Отсюда следует, что фундаментальное векторное поле и метрику можно определить в геометрии общего вида, а уравнение (56) верно и в общем случае. Существенно новый результат, который требует использования вариационного принципа Эйнштейна – $A_k = (2\alpha + \beta)a_k$, состоит в сведении тензора A_{jk}^i к одному вектору a_k .

Теперь можно найти обобщение выражения для s_{ij} , данное в правой части (18), если воспользоваться общим выражением:

$$s_{jk} = \frac{1}{2}(\nabla_j A_k + \nabla_k A_j) - \nabla_i A_{jk}^i + A_{ij}^r A_{rk}^i - A_{jk}^r A_r + R_{jk}. \quad (57)$$

Линейные по A члены равны

$$\frac{1}{2} \left[(\alpha + \beta)(\nabla_j a_k + \nabla_k a_j) + (\alpha - 2\beta)\nabla_i a^i \right], \quad (58)$$

а квадратичные члены равны

$$\frac{1}{4} \left[a_i a_k [(\alpha - 2\beta)^2 - 3\alpha^2] + 2g_{ik} a^2 (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) \right]. \quad (59)$$

При $\alpha = -\beta = -1/3$ мы получаем для s_{jk} результат Эйнштейна. Нетрудно видеть, что знак первого члена в (59) может быть положительным или отрицательным, однако в общем случае второй член в (59) и линейные члены в (57) не обращаются в нуль.

¹⁷⁾Первыми исследователями несимметричной связности в приложении к теории гравитации были Эддингтон, Картан и Эйнштейн. Изящное и компактное введение в этот предмет принадлежит Шредингеру [6]. Сегодня наблюдается оживление интереса к несимметричной связности (см., например, работы [39]–[41] и цитируемую в них литературу).

Очевидно, что можно построить модели с положительным μ^2 , но для этого необходимо более глубокое и тщательное обсуждение проблем геометрии, которое будет опубликовано отдельно.

Благодарности. Автор благодарен В. де Альфаро, А. Линде, В. Рубакову, А. Старобинскому, С. Вернову и Э. Виттену за полезные замечания, а также М. Мюллер-Прейскеру и Я. Плефка из Университета Гумбольта (Берлин) за гостеприимство. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-02-12417-офи_М).

Список литературы

- [1] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, Springer, Berlin–New York, 1923.
- [2] A. S. Eddington, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **99**:697 (1921), 104–122.
- [3] А. С. Эддингтон, *Теория относительности*, ГТТИ, Л.–М., 1934.
- [4] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math.*, 1923, 32–38; 76–77; 137–140; А. Эйнштейн, “К общей теории относительности”, *Собрание научных трудов*, Т. II, М., Наука, 1966, 134–141; “Замечание к моей работе «К общей теории относительности»”, 142–144; “К аффинной теории поля”, 145–148.
- [5] A. Einstein, *Nature*, **112**:2812 (1923), 448–449; А. Эйнштейн, “Теория аффинного поля”, *Собрание научных трудов*, Т. II, М., Наука, 1966, 149–153; “Теория Эддингтона и принцип Гамильтона”, 161–166.
- [6] E. Schrödinger, *Space-time Structure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1950.
- [7] W. Pauli Jun., “Relativitätstheorie”, *Enzykl. d. Math. Wiss.*, Bd. 5, Teubner, Leipzig, 1921, 539–775; В. Паули, *Общие принципы волновой механики*, ГИТТЛ, М., 1947; W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, New York, 1958.
- [8] A. T. Filippov, *On Einstein–Weyl unified model of dark energy and dark matter*, [arXiv:0812.2616](#).
- [9] M. Born, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **143**:849 (1934), 410–437; M. Born, L. Infeld, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **144**:852 (1934), 425–451; **147**:862 (1934), 522–546; **150**:869 (1935), 141–166.
- [10] S. Deser, G. W. Gibbons, *Class. Quant. Grav.*, **15**:5 (1998), L35–L39; [arXiv:hep-th/9803049](#).
- [11] M. Bañados, *Phys. Rev. D*, **77**:12 (2008), 123534; [arXiv:0801.4103](#).
- [12] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D. A. Steer, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **04** (2009), 021; [arXiv:0902.2941](#).
- [13] G. Mie, *Ann. der Phys.*, **37**:3 (1912), 511–534; **39**:11 (1912), 1–40; **40**:1 (1913), 1–66.
- [14] A. Proca, *J. Phys. Radium* (7), **7** (1936), 347–353.
- [15] V. Sahni, A. Starobinsky, *Internat. J. Modern Phys. D*, **15**:12 (2006), 2105–2132; [arXiv:astro-ph/0610026](#).
- [16] A. D. Linde, “Particle physics and inflationary cosmology”, *Proceedings of the Fourth Seminar on Quantum Gravity* (Moscow, 1987), eds. M. A. Markov, V. A. Berezin, V. P. Frolov, World Sci., Teaneck, NJ, 1988, 736–746; *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood, Chur, Switzerland, 1990; [arXiv:hep-th/0503203](#).
- [17] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, New York, 2005.
- [18] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [19] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной*, Т. 1, 2, УРСС, М., 2008–2009.
- [20] J. Luo, L.-C. Tu, Z.-K. Hu, E.-J. Luan, *Phys. Rev. Lett.*, **90**:8 (2003), 081801.
- [21] B. Carr (ed.), *Universe or Multiverse?*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

- [22] L. H. Ford, *Phys. Rev. D*, **40**:4 (1989), 967–972.
- [23] M. C. Bento, O. Bertolami, P. V. Moniz, J. M. Mourão, P. M. Sá, *Class. Quant. Grav.*, **10**:2 (1993), 285–298; [arXiv: gr-qc/9302034](#).
- [24] C. Armendáriz-Picón, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **07** (2004), 007.
- [25] A. Golovnev, V. Mukhanov, V. Vanchurin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **06** (2008), 009; [arXiv: 0802.2068](#).
- [26] T. S. Koivisto, D. F. Mota, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **08** (2008), 021.
- [27] A. Golovnev, V. Vanchurin, *Phys. Rev. D*, **79**:10 (2009), 103524; [arXiv: 0903.2977](#).
- [28] C. Germani, A. Kehagias, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **03** (2009), 028; [arXiv: 0902.3667](#).
- [29] M. Cavaglià, V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Internat. J. Modern Phys. D*, **4**:5 (1995), 661–672; **5**:3 (1996), 227–250; **6**:1 (1997), 39–47.
- [30] A. T. Filippov, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:21 (1996), 1691–1704; *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:1 (1997), 13–22.
- [31] D. Grumiller, W. Kummer, D. Vassilevich, *Phys. Rep.*, **369**:4 (2002), 327–430.
- [32] V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Integrable low dimensional models for black holes and cosmologies from high dimensional theories*, [arXiv: hep-th/0504101](#).
- [33] Г. А. Алексеев, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 278–304.
- [34] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 115–131; [arXiv: hep-th/0505060](#).
- [35] В. де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **153**:3 (2006), 422–452; [arXiv: hep-th/0612258](#).
- [36] A. T. Filippov, *Some unusual dimensional reductions of gravity: geometric potentials, separation of variables, and static-cosmological duality*, [arXiv: hep-th/0605276](#).
- [37] В. де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **162**:1 (2010), 41–68; [arXiv: 0902.4445](#).
- [38] L. P. Eisenhart, *Nonriemannian Geometry*, AMS, New York, 1927.
- [39] T. Damour, S. Deser, J. McCarthy, *Nonsymmetric gravity has unacceptable global asymptotics*, [arXiv: gr-qc/9312030](#).
- [40] T. Janssen, T. Prokopec, *J. Phys. A*, **40** (2007), 7067–7074; [arXiv: gr-qc/0611005](#).
- [41] V. P. Nair, S. Randjbar-Daemi, V. A. Rubakov, *Massive spin-2 fields of geometric origin in curved spacetimes*, [arXiv: 0811.3781](#).