Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Ахмедова, Т. Пиллинг, А. де Гилл, Д. Сингтон, Методы ВКБ-туннелирования и аномалий для пространств-времен Риндлера и де Ситтера, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 456–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:23:26

© 2010 г. В. Э. Ахмедова*, Т. Пиллинг[†], А. де Гилл[‡],
Д. Синглтон[‡]

МЕТОДЫ ВКБ-ТУННЕЛИРОВАНИЯ И АНОМАЛИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ-ВРЕМЕН РИНДЛЕРА И ДЕ СИТТЕРА

Явно рассматривается метод ВКБ-туннелирования в контексте его применения к пространству-времени Риндлера и пространству-времени де Ситтера. Кроме того, представлены два метода гравитационной аномалии (самосогласованной и ковариантной). Методы аномалий при применении к пространству-времени Риндлера не воспроизводят ожидаемого излучения Унру, поскольку пространство-время Риндлера не имеет аномалий. Для пространства-времени де Ситтера методы самосогласованной и ковариантной аномалии приводят к различным результатам. В отличие от них метод ВКБ-туннелирования является квазиклассическим вычислением, в котором излучение рассматривается как туннелирование квантовых полей через горизонт. Метод туннелирования можно применять во всех указанных случаях. Однако для воспроизведения правильной температуры Гиббонса–Хокинга требуется учитывать пропущенную ранее временную часть, которая дает вклад в полное действие.

Ключевые слова: излучение Хокинга, эффект Унру, квазиклассическое туннелирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

В литературе рассматриваются различные методы получения температуры излучения Хокинга [1] для шварцшильдовской черной дыры. Для других пространств-времен существуют аналогичные явления, такие как излучение Унру [2] для

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: lera@itep.ru

[†]Department of Physics, North Dakota State University, Fargo, North Dakota, USA.
E-mail: Terry.Pilling@ndsu.edu

[‡]Physics Department, California State University Fresno, Fresno, California, USA.
E-mail: aadegill@csufresno.edu, dougs@csufresno.edu

пространства-времени Риндлера и излучение Гиббонса–Хокинга [3] для пространства-времени де Ситтера. В работе [4] излучение Хокинга исследовалось с использованием функций Грина скалярного поля в шварцшильдовских координатах. В работе [5] излучение Хокинга выведено с использованием формализма интеграла по траекториям. Простейший вариант явлений этого типа – излучение Унру – также можно получить, используя фейнмановский интеграл по траекториям [6]. Однако остаются вопросы касательно физической картины, наиболее адекватно описывающей эффект Унру, а также некоторые дополнительные тонкости, на которые указывалось в работе [7]. Квазиклассический метод ВКБ [8]–[15] объясняет излучение как туннелирование квантовой частицы через горизонт. В этом формализме предполагается, что квантовое поле ϕ имеет вид $\phi \propto e^{iS/\hbar}$. Если действие S имеет мнимую часть, то можно получить вероятность туннелирования. Эту вероятность затем сравнивают с бозе-распределением с целью получения температуры, ассоциируемой с излучением. Тот факт, что требуется предположение о тепловом спектре, рассматривался как слабость метода ВКБ. Однако в недавней работе [16] тепловой спектр был выведен с использованием методов ВКБ и матрицы плотности. Кроме того, можно указать на связь метода ВКБ с термодинамикой черных дыр [17]–[19].

В настоящей работе подробно рассматривается метод ВКБ-туннелирования для пространства-времени Риндлера [20]. Представлены две альтернативные метрики Риндлера с целью показать, что данный метод воспроизводит правильную температуру Унру при использовании любой из них. Показано также, что в методе ВКБ-туннелирования имеется ранее пропущенный временной вклад [21], [22] в полную мнимую часть полевого действия S , который необходим для воспроизведения правильной температуры Унру.

Другой основной подход к излучению Унру, рассматриваемый в данной работе – метод гравитационных аномалий [23]–[28]. Этот метод основан на различии между модами поля перед горизонтом и за ним. Квантовое скалярное поле, которое помещается в некоторый гравитационный фон, вблизи горизонта размерно редуцируется к $(1+1)$ -мерной теории. Эффективная киральная теория поля вблизи горизонта получается за счет отбрасывания мод внутри горизонта, а также пренебрежения модами вблизи горизонта. Эти внутренние моды недоступны для внешнего наблюдателя. Получающаяся на горизонте $(1+1)$ -мерная киральная теория имеет гравитационные аномалии [29]–[31]. Это означает, что в области вблизи горизонта ковариантная производная тензора энергии-импульса не обращается в нуль. Чтобы восстановить общую ковариантность, требуется поток частиц, приходящих от горизонта, хотя этот поток *не обязан* подчиняться распределению Планка. Аномалии на горизонте можно записать в двух видах: как ковариантную аномалию и как самосогласованную аномалию. Мы покажем, что эти два определения приводят к различным результатам для потока, приходящего от пространства-времени Риндлера или пространства-времени де Ситтера. Излучение Унру [2] не воспроизводится ни для одного из этих основанных на аномалии методов. Для излучения Гиббонса–Хокинга самосогласованная аномалия воспроизводит правильный результат, в отличие от ковариантного метода.

2. МЕТОДЫ САМОСОГЛАСОВАННОЙ И КОВАРИАНТНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ АНОМАЛИЙ

Безмассовое скалярное поле ϕ на фоне метрики $g_{\mu\nu}$ имеет действие S вида

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = \frac{1}{2} \int d^4x \phi \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi. \quad (1)$$

Разлагая скалярное поле ϕ как $\phi = \sum_{mn} \phi_{mn}(t, x) e^{im_y y} e^{in_z z}$, можно выполнить интегрирование по поперечным модам, в результате чего приведенное $(1+1)$ -мерное действие принимает вид [23]

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{mn} \int d^2x \phi_{mn} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \partial_\nu \phi_{mn}. \quad (2)$$

Моды скалярного поля за горизонтом и входящие моды, которые вызывают сингулярный поток энергии-импульса на горизонте, отбрасываются. Это приводит к $(1+1)$ -мерной эффективно киральной теории вблизи горизонта. Ранее было показано, что с киральными теориями в размерности $1+1$ связана гравитационная аномалия [29]–[31]. Таким образом, тензор энергии-импульса более не обладает свойством ковариантного сохранения на горизонте:

$$\nabla_\mu T_{(H)\nu}^\mu = \frac{1}{96\pi\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\mu} \partial_\mu \partial_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu N_\nu^\mu. \quad (3)$$

Нижний индекс (H) указывает на близость горизонта, а g – определитель $(1+1)$ -метрики. Уравнение (3) известно как самосогласованная гравитационная аномалия. Сохранение энергии-импульса $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ обычно получается из требования равенства нулю вариации действия S , т. е. $\delta S = 0$. Однако из-за аномалии (3) энергия-импульс не сохраняется. При общих инфинитезимальных координатных преобразованиях вариация приведенного выше действия имеет вид

$$\delta S = - \int d^2x \sqrt{-g} \lambda^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu, \quad (4)$$

где $\lambda^\nu = (\lambda^t, \lambda^x)$ – параметр. Таким образом, ковариантная производная T_ν^μ выражается как

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\Theta_H N_\nu^\mu) + \left(T_{(O)\nu}^\mu - T_{(H)\nu}^\mu - \frac{1}{\sqrt{-g}} N_\nu^\mu \right) \delta(x - x_H - \epsilon), \quad (5)$$

где нижний индекс (O) обозначает тензор энергии-импульса вне горизонта. В приведенном выражении тензор энергии-импульса разбит на аномальную часть на горизонте и нормальную часть вне горизонта:

$$T_\nu^\mu = T_{(H)\nu}^\mu \Theta_H + T_{(O)\nu}^\mu \Theta_+,$$

где $\Theta_+ = \Theta(x - x_H - \epsilon)$ – ступенчатая функция, равная 1 при $x > x_H + \epsilon$ и 0 в остальных случаях, r_H – положение горизонта, а параметр ϵ таков, что $\epsilon \ll 1$. Функция $\Theta_H = 1 - \Theta_+$ изменяет свое значение от 1 к 0 при $x_H \leq x < x_H + \epsilon$.

Мы не будем учитывать зависимость от времени. С учетом выражения (5) уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta S = & - \int d^2x \left[\lambda^t \{ \partial_x (\Theta_H N_t^x) + (\sqrt{-g} T_{(O)t}^x - \sqrt{-g} T_{(H)t}^x - N_t^x) \delta(x - x_H) \} + \right. \\ & \left. + \lambda^x \{ \partial_x (\Theta_H N_x^x) + (\sqrt{-g} T_{(O)x}^x - \sqrt{-g} T_{(H)x}^x - N_x^x) \delta(x - x_H) \} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Начиная с этого момента все ϵ опускаются. Уравнение (6) приводит к условиям

$$\sqrt{-g} T_{(O)t}^x = \sqrt{-g} T_{(H)t}^x + N_t^x, \quad \sqrt{-g} T_{(O)x}^x = \sqrt{-g} T_{(H)x}^x + N_x^x \quad (7)$$

после пренебрежения членом с полной производной, т. е. $\partial_x (\Theta_H N_\nu^x)$. Обоснованием этого шага служит утверждение, что квантовые эффекты за счет входящих мод приводят к обращению этого члена в нуль [26], [27].

Первое из условий относится к потокам; второе условие, примененное к метрике Риндлера, приводит к $N_x^x = 0$, так что мы получаем в точности тривиальное условие непрерывности для радиального давления. Для метрики Риндлера поток ненулевой, т. е. $N_t^x \neq 0$. Отсюда должно было бы следовать, что $\sqrt{-g} T_{(O)t}^x \neq \sqrt{-g} T_{(H)t}^x$ и что к потоку вне горизонта следует добавить поток $\Phi = N_t^x$ для учета потока вблизи горизонта. Чтобы связать с этим потоком некоторую температуру, будем предполагать, что потоки из условий (7) подчиняются тепловому, или планковскому, спектру. Тепловые бозоны при температуре T имеют планковское распределение, т. е. $J(E) = (e^{E/T} - 1)^{-1}$, где мы положили $k_B = 1$. Поток, связанный с этими тепловыми бозонами, имеет вид [26]

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty E J(E) dE = \frac{\pi}{12} T^2. \quad (8)$$

Наконец, температура этого потока получается из соотношений $N_t^x = \Phi = \pi T^2/12$.

Применим описанный метод к метрике Риндлера. Полагая $c = 1$, имеем стандартный вид метрики Риндлера

$$ds^2 = -(1 + ax)^2 dt^2 + dx^2, \quad (9)$$

который соответствует наблюдателю в вакууме, движущемуся с постоянным собственным ускорением a . Связность Кристоффеля для выражения (9) имеет вид $\Gamma_{tt}^x = a + a^2 x$ и $\Gamma_{tx}^t = a/(1 + ax)$. Чтобы вычислить поток для пространства-времени Риндлера, подставим Γ_{tt}^x и Γ_{tx}^t в $N_\nu^\mu = \epsilon^{\alpha\mu} \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta / 96\pi$, что дает

$$N_t^x = \frac{\epsilon^{tx}}{96\pi} \partial_x \Gamma_{tt}^x = \frac{a^2}{96\pi}. \quad (10)$$

Для приведенного выражения для N_t^x это дает $T = a/(2\sqrt{2}\pi)$, что на множитель $1/\sqrt{2}$ меньше, чем обычная температура Унру $a/(2\pi)$.

Однако описанная процедура не имеет смысла, поскольку при использовании приведенных выше символов Кристоффеля для метрики Риндлера и подстановке их в уравнение (3) его правая часть обращается в нуль, т.е. аномалия равна нулю (хотя N_t^x не обращаются в нуль) и, следовательно, введение потока на горизонте Риндлера не требуется для сокращения аномалии. Таким образом, представляется, что из-за отсутствия аномалии температура Унру должна быть нулевой в этом формализме. Во всяком случае, для приведенной выше метрики Риндлера метод самосогласованной аномалии не дает правильной температуры Унру.

Для вида метрики Риндлера, приведенного в выражении (9), определитель g обращается в нуль на горизонте. Таким образом, как и в случае метрики Шварцшильда в изотропных координатах [32], можно подозревать, что именно здесь находится источник проблемы. Имеется альтернативный вид метрики Риндлера, который получается применением к метрике Минковского $ds^2 = -dT^2 + dX^2$ координатного преобразования

$$T = \frac{\sqrt{1+2ax'}}{a} \operatorname{sh}(at'), \quad X = \frac{\sqrt{1+2ax'}}{a} \operatorname{ch}(at'), \quad x' \geq -\frac{1}{2a}, \quad (11)$$

$$T = \frac{\sqrt{|1+2ax'|}}{a} \operatorname{ch}(at'), \quad X = \frac{\sqrt{|1+2ax'|}}{a} \operatorname{sh}(at'), \quad x' \leq -\frac{1}{2a}. \quad (12)$$

Здесь a – ускорение неинерциального наблюдателя. Приведенное преобразование координат дает следующий альтернативный вид метрики Риндлера:

$$ds^2 = -(1+2ax') dt'^2 + (1+2ax')^{-1} dx'^2. \quad (13)$$

В этом окончательном виде вокруг множителя $1+2ax'$ больше нет знака абсолютного значения. В отличие от стандартного риндлерова вида (9) знак перед временной частью изменяется при пересечении горизонта при $x' = -1/(2a)$. Эту метрику также можно получить непосредственно из стандартной метрики Риндлера (9), выполняя координатное преобразование

$$(1+ax) = \sqrt{|1+2ax'|}. \quad (14)$$

При изменении x' от $+\infty$ до $-\infty$ получаем, что x изменяется, уменьшаясь, от $+\infty$ до $x = -1/a$ и убегает обратно на $+\infty$. Для метрики (13), кроме того, $\det(g) = 1$. В отличие от этого определитель метрики Риндлера (9) обращается в нуль на горизонте.

Связность Кристоффеля для метрики (13) имеет вид $\Gamma_{tt}^x = a(1+2ax')$, $\Gamma_{tx}^t = a/(1+2ax')$ и $\Gamma_{xx}^x = -a/(1+2ax')$. В этом случае аномалия равна нулю, что легко проверить подстановкой в уравнение (3). Таким образом, даже для метрики Риндлера в варианте (13) аномалия обращается в нуль, откуда следует, что $T = 0$.

По этой причине дальнейшее применение формулы для получения температуры не обосновано.

Если использовать ковариантную гравитационную аномалию [26], [33], то аномалия оказывается пропорциональной частным производным скаляра Риччи $\partial^\lambda R$:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{96\pi\sqrt{-g}} \epsilon_{\nu\lambda} \partial^\lambda R. \quad (15)$$

Поскольку пространство–время Риндлера получается посредством глобального координатного преобразования из пространства-времени Минковского, в нем $R = 0$. Поэтому в силу (15) ковариантная аномалия обращается в нуль для пространства-времени Риндлера, и мы снова, казалось бы, приходим к ответу $T = 0$.

Применение метода ковариантной аномалии к пространству-времени де Ситтера также дает нулевую температуру Гиббонса–Хокинга. Метрика де Ситтера в статических координатах в размерности $1 + 1$ имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r^2/\alpha^2)}. \quad (16)$$

Символы Кристоффеля для метрики (16) равны $\Gamma_{tt}^r = [r(r^2 - \alpha^2)]\alpha^4$, $\Gamma_{tr}^t = r/(r^2 - \alpha^2)$ и $\Gamma_{rr}^r = -r/(r^2 - \alpha^2)$.

Теперь скалярная кривизна для метрики де Ситтера (16) равна $R = 2/\alpha^2 = \text{const.}$ Отсюда следует, что ковариантная аномалия (15) равна нулю и $T = 0$ для температуры излучения Гиббонса–Хокинга. Интересно, что метод самосогласованной аномалии не приводит к правильной температуре Гиббонса–Хокинга. Использование связности Кристоффеля для метрики (16) позволяет увидеть, что самосогласованная аномалия (3) действительно существует на горизонте. Тогда, применяя $N_t^r = \Phi$ на горизонте, $r = \alpha$, получаем $T = 1/(2\pi\alpha)$, что представляет собой температуру Гиббонса–Хокинга, связанную с пространством–временем де Ситтера [22].

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВКБ-ТУННЕЛИРОВАНИЯ

Используем ВКБ-подобный метод для пространства-времени Риндлера, чтобы найти соответствующую температуру Унру. Применение этого метода состоит в том, что вероятность туннелирования полагается пропорциональной экспоненте интеграла от канонического импульса по замкнутому пути, т. е. $\oint p_x dx$ [34]. Кроме того, как показано ниже, необходимо учесть некоторый временной вклад в вероятность туннелирования [21], [22] для воспроизведения правильной температуры.

Скалярное поле ϕ массы m , которое следует поместить в риндлеров фон, имеет вид $\phi(x) \propto e^{((i/\hbar)S(x) + \dots)}$, где S – действие поля. Уравнения Гамильтона–Якоби для действия S скалярного поля в гравитационном фоне, задаваемом метрикой $g_{\mu\nu}$, имеют вид

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu S)(\partial_\nu S) + m^2 = 0. \quad (17)$$

Для стационарного пространства-времени можно разбить S на временную и пространственную части: $S(x^\mu) = Et + S_0(\vec{x})$, где E – энергия частиц, а $x^\mu = (t, \vec{x})$. Из уравнений (17) следует, что пространственная часть действия имеет общее решение $S_0 = \int p_x dx$, где p_x – канонический импульс гамильтониана [34], [35]. Вероятность туннелирования находим, используя стандартную формулу ВКБ:

$$\Gamma \propto \exp \left[-\operatorname{Im} \left(\oint p_x dx \right) \right] = \exp \left[-\operatorname{Im} \left(\int p_x^{\text{out}} dx - \int p_x^{\text{in}} dx \right) \right]. \quad (18)$$

Заметим, что замкнутый путь в (18) проходит через горизонт и возвращается. Кроме того, $\oint p_x dx$ инвариантен относительно канонических преобразований, тогда как $\int p_x^{\text{out}, \text{in}} dx$ не инвариантен [36]. В литературе по ВКБ-туннелированию часто заменяют $\oint p_x dx$ на $\pm 2 \int p_x^{\text{out}, \text{in}} dx$, что, строго говоря, неправильно, поскольку второе из этих выражений не инвариантно относительно канонических преобразований. Как правило, эти два выражения численно эквивалентны. Однако имеются примеры (пространство-время Шварцшильда в координатах Пенлеве–Гулстранда [34], [35]), в которых эти два выражения дают различные результаты.

Температуру излучения находим, приравнивая больцмановский множитель и квазиклассическую вероятность туннелирования (18), т.е. $\Gamma \propto e^{-E/T}$. Это дает температуру излучения в виде

$$T = \frac{\hbar E}{\operatorname{Im}(\oint p_x dx)}.$$

Вычислим теперь температуру Унру, применяя описанный выше подход ВКБ. Использование стандартного вида метрики Риндлера (9) в уравнениях Гамильтона–Якоби (17) дает

$$S_0 = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+ax} \sqrt{E^2 - m^2(1+ax)^2}, \quad (19)$$

где знак $\pm$ соответствует исходящим/входящим модам.

Использование альтернативного вида метрики Риндлера (13) в уравнениях Гамильтона–Якоби (17) дает

$$S_0 = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m^2(1+2ax')}}{(1+2ax')} dx'. \quad (20)$$

В этом случае и $\oint p_x dx$, и $\pm 2 \int p_x^{\text{out}, \text{in}} dx$ приводят к одному и тому же результату, поскольку величина S_0 одинакова для исходящих и входящих мод.

Интеграл (20) имеет полюс при $x' = -1/(2a)$. Для обхода полюса вблизи $x' = -1/(2a)$ параметризуем идущий по полуокружности контур как $x' = -1/(2a) + \epsilon e^{i\theta}$, где $\epsilon \ll 1$; θ изменяется от 0 до π для входящего пути и от π до 2π для исходящего.

Беря предел $\epsilon \rightarrow 0$, находим вклад полюса в выражение (20):

$$S_0 = \pm \int \frac{\sqrt{E^2 - m^2 \epsilon e^{i\theta}}}{2a \epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta = \pm \frac{i\pi E}{2a}. \quad (21)$$

При вычислении выражения (19) дело обстоит таким образом, как если бы полюс при $x = -1/a$ давал $S_0 = \pm i\pi E/a$. Но поскольку интегралы в формулах (19) и (20) связаны простой заменой переменных (14), значение интеграла не должно измениться. Из замены (14) видим, что параметризация контура в (21) принимает вид $1 + ax = \sqrt{\epsilon} e^{i\theta/2}$, так что контур (21), представляющий собой полуокружность, становится четвертью окружности. Соответственно вычет (21) равен $(i\pi) \times (\text{вычет})$, тогда как для (19) вычет равен $(i\pi/2) \times (\text{вычет})$. Это указывает, что получаемые из (19) и (21) мнимые вклады в S_0 одинаковы (т. е. $S_0 = \pm i\pi E/(2a)$), каковыми им и следует быть.

Если использовать решение S_0 в приведенном выше выражении для температуры, т. е. $T = \hbar E / \text{Im}(\oint p_x dx)$, и учесть дополнительный знак минус, источником которого является обратное пересечение пути для исходящих частиц в формуле (18), то полученная температура излучения составит

$$T = \frac{E\hbar}{\pi E/(2a) + \pi E/(2a)} = \frac{\hbar a}{\pi}.$$

Это в два раза превышает значение температуры Унру $T_{\text{Unruh}} = \hbar a/(2\pi)$.

Приведенное несоответствие объясняется тем, что кроме вклада, получаемого из пространственной части S_0 полного действия $S(x_\mu)$, имеется также временной вклад, происходящий из Et -части [21], [22]. Мнимый временной вклад возникает при пересечении горизонта. При переходе от (11) ($x' \geq -1/(2a)$) к (12) ($x' \leq -1/(2a)$) временная координата изменяется как $t \rightarrow t - i\pi/(2a)$ (множитель i возникает из квадратного корня). Поэтому каждый раз при пересечении горизонта к полной мнимой части полного действия $S(x_\mu)$ следует добавить мнимый вклад, возникающий из Et -членов вида $\text{Im}(E\Delta t) = -\pi E/(2a)$. Для замкнутой траектории частиц вклад будет равным $\text{Im}(E\Delta t)_{\text{total}} = -\pi E/a$.

Добавляя этот временной вклад к пространственному вкладу (18), т. е.

$$T_{\text{Unruh}} = \frac{E\hbar}{\text{Im } S_0 - E \text{Im}[\Delta t_{\text{total}}]} = \frac{E\hbar}{\pi E/a + \pi E/a} = \frac{\hbar a}{2\pi}, \quad (22)$$

получаем температуру Унру. Заметим, это этот результат справедлив независимо от рассматриваемой метрики Риндлера.

Метод ВКБ можно также применить к пространству-времени де Ситтера. Используя в уравнениях (17) шварцшильдоподобный вид де Ситтера, т. е.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r^2/\alpha^2)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (23)$$

получаем следующее решение для S_0 :

$$S_0^{\text{in,out}} = \pm \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m^2(1 - r^2/\alpha^2)}}{1 - r^2/\alpha^2} dr = \pm \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2 \sqrt{E^2 - m^2(1 - r^2/\alpha^2)}}{(\alpha - r)(\alpha + r)} dr. \quad (24)$$

Знак $\pm$ соответствует входящим/исходящим частицам. Координатная сингулярность расположена при $r = \alpha$. Мнимую часть (24) можно вычислить, используя идущий по полуокружности контур, что дает результат $S_0^{\text{in,out}} = \pm i\pi E\alpha/2$.

Метрику (23) можно получить из пятимерного пространства-времени Минковского $ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2$, используя преобразование

$$\begin{aligned} z_0 &= (\alpha^2 - r^2)^{1/2} \operatorname{sh} \frac{t}{\alpha}, & z_1 &= (\alpha^2 - r^2)^{1/2} \operatorname{ch} \frac{t}{\alpha}, \\ z_2 &= r \sin \theta \cos \phi, & z_3 &= r \sin \theta \sin \phi, & z_4 &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Статические координаты (25) покрывают только правый квадрант диаграммы Пенроуза для пространства-времени де Ситтера. Левый квадрант диаграммы Пенроуза для пространства-времени де Ситтера покрывается координатами

$$\begin{aligned} z_0 &= (r^2 - \alpha^2)^{1/2} \operatorname{ch} \frac{t}{\alpha}, & z_1 &= (r^2 - \alpha^2)^{1/2} \operatorname{sh} \frac{t}{\alpha}, \\ z_2 &= r \sin \theta \cos \phi, & z_3 &= r \sin \theta \sin \phi, & z_4 &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнение координат (25) и (26) позволяет увидеть, что координаты (26) можно получить, просто полагая $t \rightarrow t - i\pi\alpha/2$ в (25). Поэтому при пересечении горизонта имеется временной вклад в мнимую часть полного действия, равный $\operatorname{Im}(E\Delta t^{\text{in,out}}) = -\pi\alpha E/2$. При сложении пространственного и временного вкладов полная мнимая часть для путешествия туда и обратно равна $\operatorname{Im}(S(x^\mu)) = -2\pi\alpha E$, что далее приводит к канонической температуре Гиббонса–Хокинга $T_{\text{GH}} = \hbar/(2\pi\alpha)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Высказывались аргументы в пользу наличия связи между туннелированием и методом аномалий [37]. В данной работе показано, что по крайней мере для пространства-времени Риндлера такой связи не просматривается, поскольку метод аномалий и метод ВКБ-туннелирования дают различные результаты. Представляется, что метод ВКБ-туннелирования имеет более твердое обоснование, поскольку он воспроизводит ожидаемые температуры и для пространства-времени Риндлера, и для пространства-времени де Ситтера. Кроме того, метод ВКБ-туннелирования дает интуитивную картину излучения. В гравитационном методе ВКБ имеются дополнительные тонкости, которых нет в стандартной квантовой проблеме ВКБ, например временной вклад в мнимую часть действия.

Наоборот, метод аномалий не воспроизводит температуру Унру для пространства-времени Риндлера. Методы и самосогласованной, и ковариантной аномалий дают $T = 0$ для температуры Унру как следствие равенства аномалии нулю. Для пространства-времени де Ситтера метод самосогласованной аномалии воспроизводит температуру Гиббонса–Хокинга, а метод ковариантной аномалии – нет.

Благодарности. Авторы благодарны Э. Т. Ахмедову за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.*, **43**:3 (1975), 199–220.
- [2] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D*, **14**:4 (1976), 870–892.
- [3] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **15**:10 (1977), 2738–2751.
- [4] D. G. Boulware, *Phys. Rev. D*, **11**:6 (1974), 1404–1423.
- [5] J. B. Hartle, S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **13**:8 (1976), 2188–2203.
- [6] W. G. Unruh, N. Weiss, *Phys. Rev. D*, **29**:8 (1984), 1656–1662.
- [7] N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, B. M. Karakov, V. D. Mur, V. A. Belinskii, *Phys. Rev. D*, **65**:2 (2002), 025004.
- [8] P. Kraus, F. Wilczek, *Nucl. Phys. B*, **433**:2 (1995), 403–420.
- [9] K. Srinivasan, T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D*, **60**:2 (1999), 024007; S. Shankaranarayanan, T. Padmanabhan, K. Srinivasan, *Class. Quant. Grav.*, **19**:10 (2002), 2671–2687.
- [10] G. E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ*, **69**:9 (1999), 662–668.
- [11] V. A. Berezin, A. M. Boyarsky, A. Yu. Neronov, *Gravit. Cosmol.*, **5**:1 (1999), 16–22.
- [12] M. K. Parikh, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:24 (2000), 5042–5045; M. K. Parikh, *Internat. J. Modern Phys. D*, **13**:10 (2004), 2351–2354.
- [13] A. J. M. Medved, E. C. Vagenas, *Modern Phys. Lett. A*, **20**:23 (2005), 1723–1728; **20**:32 (2005), 2449–2453; M. Arzano, A. J. M. Medved, E. C. Vagenas, *JHEP*, **09** (2005), 037; E. C. Vagenas, *Nuovo Cimento B*, **117**:8 (2002), 899.
- [14] M. Angheben, M. Nadalini, L. Vanzo, S. Zerbini, *JHEP*, **05** (2005), 014; M. Nadalini, L. Vanzo, S. Zerbini, *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 6601–6608.
- [15] R. Banerjee, B. R. Majhi, *JHEP*, **06** (2008), 095; *Phys. Lett. B*, **662**:1 (2008), 62–65.
- [16] R. Banerjee, B. R. Majhi, *Phys. Lett. B*, **675**:2 (2009), 243–245.
- [17] T. Pilling, *Phys. Lett. B*, **660**:4 (2008), 402–406.
- [18] Baocheng Zhang, Qing-yu Cai, Ming-Sheng Zhan, *Phys. Lett. B*, **665**:4 (2008), 260–263.
- [19] R. Banerjee, B. R. Majhi, S. Samanta, *Phys. Rev. D*, **77**:12 (2008), 124035.
- [20] V. Akhmedova, T. Pilling, A. de Gill, D. Singleton, *Phys. Lett. B*, **673**:3 (2009), 227–231.
- [21] E. T. Akhmedov, T. Pilling, D. Singleton, *Internat. J. Modern Phys. D*, **17**:13–14 (2008), 2453–2458.
- [22] V. Akhmedova, T. Pilling, A. de Gill, D. Singleton, *Phys. Lett. B*, **666**:3 (2008), 269–271.
- [23] S. P. Robinson, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:1 (2005), 011303.
- [24] E. C. Vagenas, S. Das, *JHEP*, **10** (2006), 025; S. Das, S. P. Robinson, E. C. Vagenas, *Internat. J. Modern Phys. D*, **17**:3–4 (2008), 533–539.
- [25] G. E. Volovik, *Is there analogy between quantized vortex and black hole?*, [arXiv:gr-qc/9510001](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9510001).
- [26] S. Iso, H. Umetsu, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:15 (2006), 151302.
- [27] K. Murata, J. Soda, *Phys. Rev. D*, **74**:4 (2006), 044018.
- [28] S. Iso, H. Umetsu, F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **74**:4 (2006), 044017.
- [29] S. M. Christensen, S. A. Fulling, *Phys. Rev. D*, **15**:8 (1977), 2088–2104.
- [30] L. Alvarez-Gaumé, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **234**:2 (1983), 269–330.
- [31] R. A. Bertlmann, E. Kohlprath, *Ann. Phys.*, **288**:1 (2001), 137–163.
- [32] Shuang-Qing Wu, Jun-Jin Peng, Zhan-Yue Zhao, *Class. Quant. Grav.*, **25**:13 (2008), 135001.

- [33] R. Banerjee, S. Kulkarni, *Phys. Rev. D*, **77**:2 (2008), 024018; *Phys. Lett. B*, **659**:4 (2008), 827–831.
- [34] E. T. Akhmedov, V. Akhmedova, D. Singleton, T. Pilling, *Internat. J. Modern Phys. A*, **22**:8–9 (2007), 1705–1715.
- [35] E. T. Akhmedov, V. Akhmedova, D. Singleton, *Phys. Lett. B*, **642**:1–2 (2006), 124–128.
- [36] B. D. Chowdhury, *Pramana*, **70**:1 (2008), 3–26.
- [37] S. Ghosh, *Unifying the tunneling and anomaly phenomena in Hawking radiation*, [arXiv:0804.2999](#).