Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Буринский, Лучевые твисторные возбуждения черных дыр и предквантовая геометрия Керра–Шильда, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 467–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:28:29

© 2010 г.

А. Я. Буринский*

ЛУЧЕВЫЕ ТВИСТОРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР И ПРЕДКВАНТОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ КЕРРА–ШИЛЬДА

Точные решения Керра–Шильда для электромагнитных возмущений черных дыр представляют собой сингулярные лучи, распространяющиеся вдоль твисторных линий геометрии Керра–Шильда. Эти лучи имеют сильное обратное воздействие на метрику и горизонт и образуют некоторую флуктуирующую геометрию, занимающую промежуточное положение между классической и квантовой гравитацией. Мы рассматриваем теорему Керра, которая определяет твисторную структуру геометрии Керра–Шильда, и соответствующее голографическое предквантовое пространство, приспособленное для последующего квантового рассмотрения.

Ключевые слова: твисторы, теорема Керра, лучевые импульсы, квантовая гравитация.

1. Черные дыры (ЧД) являются удобным объектом для исследования проблемы объединения квантовой теории и гравитации. Одно из препятствий в этой важнейшей проблеме связано с несовместимостью форм представлений: гравитация требует явного полевого представления в конфигурационном пространстве, в то время как квантовая теория последовательно использует импульсное пространство и плоские волны, которые, строго говоря, не определены в гравитации. Твисторы образуют мост между этими представлениями.

Геометрически твистор представляет собой пару (x^μ, θ^α) , в которой точка $x^\mu \in M^4$ является точкой привязки двухкомпонентного спинора θ^α , фиксирующего световое направление (луч) $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha$, соответствующее импульсу безмассовой частицы p^μ . Плоская волна пространства импульсов может быть описана в твисторных координатах $T^1 = \{\theta^\alpha, \mu_{\dot{\alpha}}\}$, $\mu_{\dot{\alpha}} = x_\nu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \theta^\alpha$ в форме $e^{ix_\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha}$. С другой стороны, волна может быть также преобразована в твисторное пространство посредством “твисторного” преобразования Фурье [1]: умножением на $-e^{i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \mu_{\dot{\alpha}}}$ и последующим интегри-

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, Москва, Россия.
E-mail: bur@ibrae.ac.ru

рованием по $\tilde{\theta}$. Результат¹⁾ $\hat{\phi}(T^I) = \delta^2(\mu_{\dot{\alpha}} - x_{\nu}\sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{\nu}\theta^{\alpha})$ соответствует сингулярному лучу в направлении p^{μ} с твисторными координатами $\{\theta^{\alpha}, \mu_{\dot{\alpha}}\}$. При этом существенно, что твистор описывает луч, проходящий через заданную точку x^{μ} .

Подобные твисторные лучи появляются в точных решениях уравнений Дебнея–Керра–Шильда (ДКШ) [2] для ЧД и согласованных электромагнитных и гравитационных полей [3]. Геометрия Керра–Шильда (КШ) охватывает широкий класс алгебраически специальных метрик для вращающихся и невращающихся ЧД и космологических решений. Возникновение твисторных лучей в решениях КШ не является случайным, поскольку твисторная структура лежит в основе пространства-времени КШ. В связи с этим исследование точных решений КШ подсказывает новый путь к объединению квантовой теории и гравитации.

Рассматриваемые ниже точные нестационарные решения КШ описывают электромагнитное возбуждение ЧД в виде флуктуирующих твисторных лучей, а также согласованную с уравнениями Эйнштейна $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R = 8\pi\langle T_{\mu\nu} \rangle$ обратную реакцию электромагнитных лучей на метрику и горизонт ЧД [3]. Эта флуктуирующая геометрия КШ имеет специфическую двулистную голографическую структуру, адаптированную к квантовому рассмотрению [4], [5], и занимает промежуточное положение между классической и квантовой гравитацией.

2. Решения КШ базируются на метрической форме КШ

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2Hk_{\mu}k_{\nu}, \quad (1)$$

в которой $\eta_{\mu\nu}$ является метрикой вспомогательного пространства Минковского M^4 , и поле световых направлений k_{μ} образует конгруэнцию “нулевых” линий в M^4 – так называемую главную световую конгруэнцию (ГСК) $\mathcal{K}$.

Решения Керра и Керра–Ньюмена для вращающихся ЧД принадлежат к алгебраически специальному классу решений (тип D), который имеет две различные ГСК, в связи с чем метрика может быть представлена в двух различных формах $g_{\mu\nu}^{\pm} = \eta_{\mu\nu} + 2Hk_{\mu}^{\pm}k_{\nu}^{\pm}$, где $k^{\mu\pm}(x)$, $x = x^{\mu} \in M^4$, – два несовпадающих векторных поля, касательных к соответствующим ГСК $\mathcal{K}^{\pm}$. Направления $k_{\mu}^{\pm}$ определяются в световых координатах $u = (z - t)/\sqrt{2}$, $v = (z + t)/\sqrt{2}$, $\zeta = (x + iy)/\sqrt{2}$, $\bar{\zeta} = (x - iy)/\sqrt{2}$, дифференциальной 1-формой²⁾

$$k_{\mu}^{(\pm)} dx^{\mu} = P^{-1}(du + \bar{Y}^{\pm} d\zeta + Y^{\pm} d\bar{\zeta} - Y^{\pm}\bar{Y}^{(\pm)} dv) \quad (2)$$

и зависят от комплексной координаты на небесной сфере

$$Y = e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

Два решения $Y^{\pm}(x)$ определяются обсуждаемой ниже теоремой Керра [2], [6]–[10].

¹⁾ $\hat{\phi}(T^I) = \int \frac{d^2\tilde{\theta}}{(2\pi)^2} e^{ix_{\mu}\sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{\mu}\tilde{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}} e^{-i\tilde{\theta}^{\dot{\alpha}}\mu_{\dot{\alpha}}} = \delta^2(\mu_{\dot{\alpha}} - x_{\nu}\sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{\nu}\theta^{\alpha})$.

²⁾ Поле $k^{\mu}(x) \equiv k^{\mu}(Y(x))$ дополняется до световой тетрады e^a , $a = 1, 2, 3, 4$, и “тетрадных” производных $\cdot, a = \partial_a^{\mu} \cdot = e_a^{\mu} \partial_{\mu} \cdot$.

Рис. 1. Сингулярное кольцо геометрии Керра и твисторные лучи конгруэнции Керра.

Структура конгруэнции Керра иллюстрируется на рис. 1. Она имеет характерную скрученную форму, которая дает сложное выражение для метрики Керра, несмотря на чрезвычайно простую общую форму метрики КШ (1). Керровская ГСК формируется твисторными световыми лучами, которые покрывают пространство-время дважды: в форме входящих (in-) лучей ГСК, $k^{\mu-} \in \mathcal{K}^-$, падающих на ограниченный керровским сингулярным кольцом диск, и в форме уходящих от диска (out-) лучей ГСК $k^{\mu+} \in \mathcal{K}^+$, которые расположены на втором листе того же пространства-времени M^4 . Две метрики $g_{\mu\nu}^{\pm}$ и два соответствующих электромагнитных поля, будучи согласованными с лучами ГСК, оказываются различными на in- и out-листах и не должны смешиваться в решениях КШ. Эта двулистность игнорируется в пертурбативном подходе, приводя к решениям, разительно отличающимся от точных. Типичные *точные электромагнитные возбуждения на фоне КШ имеют форму сингулярных лучей, распространяющихся вдоль твисторных линий ГСК*, в то время как типичные волновые решения пертурбативного подхода имеют гладкую угловую зависимость.

3. Долгое время эта двулистность была неразрешимой проблемой решения Керра (см. библиографию в работах [11], [12]). Израэль (1968 г.) предложил отсечь второй лист, заменив его вращающимся диском, закрывающим керровское сингулярное кольцо и переход ГСК на второй лист метрики. В альтернативном варианте керровское сингулярное кольцо рассматривалось как замкнутая “алисова” струна, образующая окно в зазеркальный “алисов” мир опережающих вакуумных полей [13]. Новый голографический подход объединяет оба варианта. Источник решения Керра [12] образует доменную стенку (мембрану), разделяющую in- и out-листы пространства

Рис. 2. Конформная диаграмма Пенроуза: а – для пространства-времени Минковского; б – для пространства-времени Керра. Расщепление вспомогательного пространства M^4 геометрии Керра на два листа порождает голографическую структуру предквантового пространства-времени ЧД.

КШ. Оба листа геометрии КШ, как и источник-мембрана, являются необходимыми для описания квантовых полей в гравитации. В частности, согласно Гиббону [4] искривленное пространство-время M в квантовой теории должно быть поделено на две причинно-упорядоченные подобласти M_- и M_+ , которые ассоциируются с входящим и уходящим вакуумными состояниями $|0_- \rangle$ и $|0_+ \rangle$. При отсутствии источника решения КШ могут быть аналитически продолжены с in-листа на out-лист. Присутствие источника нарушает аналитичность и выделяет опережающие и запаздывающие решения, что позволяет рассматривать излучение ЧД как рассеяние in-вакуума. Подобное предквантовое пространство-время ЧД с разделением на in- и out-листы вводит также 'т Хоофт с соавторами в работе [5]. Известная конформная диаграмма Пенроуза, описывающая in- и out-поля на одном и том же многообразии M^4 , должна быть развернута с "расщеплением" двулистности, как это показано на рис. 2, демонстрирующем явную реализацию голографического принципа в геометрии КШ. Твисторные лучи керровской конгруэнции формируют керровский источник посредством световой проекции из "прошлой" световой бесконечности I^- . При этом ЧД возникает как *голографический образ*, генерируемый начальными данными на прошлой бесконечности I^- .

Световые конгруэнции КШ характеризуются оптическими параметрами: расширением (дивергенцией) ρ , поворотом (твистом) ω и сдвигом σ , которые описывают деформацию проектируемой лучами двумерной картинке на удаленный двумерный экран. Твист и дивергенция конгруэнции ведут к повороту и масштабному растяжению образа, в то время как сдвиг нарушает конформные свойства проекции, деформируя углы. Бессдвиговая конгруэнция решения Керра, $\sigma = 0$, сохраняет

конформную структуру проектируемого образа при смещении экрана вдоль лучей конгруэнции³⁾. Конформная структура и комплексная аналитичность входят в геометрию КШ через функцию $Y(x)$, $x = x^\mu \in M^4$, которая представляет собой конформную проекцию небесной сферы S^2 (с координатами (ϕ, θ)) на комплексную плоскость $Y \in C^1$. Тетрадные производные функции $Y(x)$ определяют основные параметры голографической проекции КШ. В частности, *комплексное расширение* конгруэнции $Z = \rho + i\omega$ определяется соотношением $Z = Y_{,1}$, условием *геодезичности* лучей конгруэнции является выражение $Y_{,4} = 0$, и условие *бессдвиговости* имеет вид $Y_{,2} = 0$. Таким образом, комплексная функция $Y(x)$, удовлетворяющая условиям

$$Y_{,2} = Y_{,4} = 0, \quad (4)$$

определяет *бессдвиговую и геодезическую конгруэнцию световых лучей*, обладающую конформно-аналитическими свойствами голографической проекции КШ. Все конгруэнции этого типа определяются теоремой Керра, которая формулируется в терминах проективных твисторных координат⁴⁾:

$$Z^P = (Y, \zeta - Yv, u + Y\bar{\zeta}). \quad (5)$$

4. Теорема Керра [6]–[10]. Произвольная стационарная геодезическая и бессдвиговая световая конгруэнция в M^4 порождается решением алгебраического уравнения $F(Z^P) = 0$, в котором F есть произвольная голоморфная функция проективных твисторных координат.

Конгруэнция Керра генерируется квадратичной по Y функцией $F(Z^P)$. Выполненное в работе [2] интегрирование уравнений Эйнштейна–Максвелла для стационарного случая показало, что функция $F(Z^P)$ определяет метрику КШ (1) с точностью до некоторой произвольной функции $\psi(Y)$. Действительно, решение $Y(x)$ уравнения $F = 0$ фиксирует конгруэнцию формой (2), а также функцию H , поскольку она имеет вид $H = (1/2)[m(Z + \bar{Z})P^{-1} - |\psi|^2 Z \bar{Z} P^{-2}]$, где $Z = Y_{,1}$ и $(Z/P)^{-1} = -dF/dY$.

В частности, для решения Керра в системе покоя мы имеем $P = (1 + Y\bar{Y})/\sqrt{2}$, $P/Z = \tilde{r} = r + ia \cos \theta$, где r, θ – сплюснутые сфероидальные координаты, и

$$H = \frac{mr - |\psi|^2/2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

Электромагнитное поле задается векторным потенциалом

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\psi}{r + ia \cos \theta} e^3 + \chi d\bar{Y} \right), \quad (7)$$

³⁾ Дивергенция θ и твист ω керровской конгруэнции объединяются в формализме КШ [2] в один комплексный параметр $Z = (\rho + i\omega)$, который также может быть связан с комплексным “расстоянием” $\tilde{r}$, аффинным параметром вдоль конгруэнции, $\tilde{r} = P/Z$, где P есть некоторый дополнительный конформный фактор.

⁴⁾ Связь между твисторными координатами $T^I = \{\theta^\alpha, \mu_\alpha\}$ и проективными твисторными координатами Z^P имеет вид $T^I = \theta^1(1, Z^P)$.

где $\chi = 2 \int (1 + Y\bar{Y})^{-2} \psi dY$, который удовлетворяет условию согласованности с конгруэнцией $\alpha_\mu k^\mu = 0$.

В решении Керра параметр m является массой и $\psi = 0$. Для решения Керра–Ньюмена $\psi = q = \text{const}$ является зарядом. Однако для общего стационарного решения КШ ψ может быть произвольной голоморфной функцией комплексной переменной Y [2].

С другой стороны, любая голоморфная функция на сфере, если она не является константой, имеет хотя бы один полюс. Полюс в точке $Y = Y_i$, $\psi_i(Y) = q_i/(Y - Y_i)$ генерирует сингулярный электромагнитный луч, носителем которого является луч ГСК с угловым направлением $Y_i = e^{i\phi_i} \text{tg}(\theta_i/2)$. Полюс в функции $\psi(Y)$ имеет прямое действие на функцию H , которая определяет метрику и положение горизонта. Проведенный в работе [14] анализ показал, что электромагнитные лучи имеют сильное обратное влияние на метрику и деформируют горизонт топологически, образуя в нем дыры, которые позволяют материи покидать внутренность ЧД.

Точное решение с несколькими полюсами, $\psi(Y) = \sum_i q_i/(Y - Y_i)$, дает несколько твисторных лучей с угловыми направлениями $Y_i = e^{i\phi_i} \text{tg}(\theta_i/2)$, что ведет к нескольким дырам в горизонте. В дальней зоне твисторные лучи переходят в известные точные решения для сингулярных рр-волн [8].

5. Стационарные твисторно-лучевые решения КШ могут быть обобщены до зависящих от времени волновых импульсов [3]. Поскольку горизонт чрезвычайно чувствителен к электромагнитным возбуждениям ЧД, он также может быть чувствительным к вакуумным электромагнитным флуктуациям. Вакуумные твисторно-лучевые возбуждения ЧД могут порождать сеть флуктуирующих микроотверстий в горизонте, образующих мелкозернистую структуру, позволяющую радиации покидать внутренность ЧД, как это иллюстрируется на рис. 3.

Твисторно-лучевые импульсы должны зависеть от запаздывающего времени τ и удовлетворять нестационарным уравнениям ДКШ [2]. Соответствующие решения КШ приобретают (кроме функции $\psi(Y, \tau)$) дополнительное электромагнитное излучение, описываемое членом $\gamma(Y, \tau)Z^5$.

В результате длительных усилий по интегрированию нестационарных уравнений ДКШ [2] были получены самосогласованные решения с флуктуирующими твисторными импульсами, и было явно показано, что всякое нестационарное решение КШ развивается в сингулярные твисторные лучи, нарушающие топологию и стабильность горизонта ЧД. А именно, взаимодействие ЧД с электромагнитным полем содержит две существенно различные компоненты – зависящие от функции $\psi(Y, \tau)$ сингулярные твисторные импульсы, деформирующие метрику и горизонт, но не дающие прямого вклада в поток энергии, и регулярную компоненту $\gamma_{\text{reg}}(Y, \tau)$, определяющую электромагнитное излучение и испарение ЧД.

Полученные решения описывают флуктуирующие возбуждения электромагнитных твисторных лучей на фоне геометрии КШ и согласованную мелкозернистую

⁵⁾ Согласно работе [2] $F^{\mu\nu} = \text{Re } \mathcal{F}_{31} e^{3\mu} \wedge e^{1\nu}$, где $\mathcal{F}_{31} = \gamma Z - (AZ)_{,1}$.

Рис. 3. Возбуждение вращающейся ЧД полем виртуальных фотонов формирует флуктуирующие микроотверстия в горизонте.

структуру их обратного влияния на метрику и горизонт ЧД. Голографическое пространство-время КШ образует некоторую предгеометрию, которая отражает динамику сингулярных лучевых импульсов. Хотя эта предгеометрия классическая, она имеет тонкую флуктуирующую структуру, которая еще должна быть усреднена для перехода к обычному гладкому классическому пространству-времени. В этом смысле она занимает промежуточное положение между классической и квантовой гравитацией. Заметим также, что теорема Керра с функциями $F(Y)$ высших степеней по Y приводит к многочастичным решениям КШ [9], содержащим сложные сети твисторных лучей.

Список литературы

- [1] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 189–258.
- [2] G. C. Debney, R. P. Kerr, A. Schild, *J. Math. Phys.*, **10**:10 (1969), 1842–1854.
- [3] A. Burinskii, *Gen. Relativ. Grav.*, **41**:10 (2009), 2281–2286; [arXiv: 0903.3162](#); *Beam-like excitations of Kerr–Schild geometry and semiclassical mechanism of black-hole evaporation*, [arXiv: 0903.2365](#).
- [4] G. W. Gibbons, *Comm. Math. Phys.*, **45**:2 (1975), 191–202.
- [5] C. R. Stephens, G. 't Hooft, B. F. Whiting, *Class. Quant. Grav.*, **11** (1994), 621–647.
- [6] R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **8**:2 (1967), 345–366.

- [7] Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время*. Т. 2. *Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*, Мир, М., 1988.
- [8] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge Monogr. Math. Phys., **6**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980.
- [9] A. Burinskii, *Gravit. Cosmol.*, **11**:4 (2005), 301–304; *IJGMMP*, **4**:3 (2007), 437–456.
- [10] A. Burinskii, *Phys. Rev. D*, **70**:8 (2004), 086006.
- [11] A. Burinskii, E. Elizalde, S. Hildebrandt, G. Magli, *Phys. Rev. D*, **65**:6 (2002), 064039.
- [12] A. Burinskii, *Regular superconducting source of the Kerr–Newman solution*, [arXiv:1003.2928](#).
- [13] A. Burinskii, *Gravit. Cosmol.*, **14**:2 (2008), 109–122.
- [14] A. Burinskii, E. Elizalde, S. R. Hildebrandt, G. Magli, *Phys. Rev. D*, **74**:2 (2006), 021502(R); *Gravit. Cosmol.*, **12**:2–3 (2006), 119–125.