Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Монастырский, Поверхности Гекке и преобразования дуальности в решеточных спиновых системах, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 505–512

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:31:45

© 2010 г.

М. И. Монастырский*

ПОВЕРХНОСТИ ГЕККЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДУАЛЬНОСТИ В РЕШЕТОЧНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ

Обсуждаются две связанные друг с другом темы: поверхности Гекке и K -регулярные графы, с одной стороны, и преобразование дуальности для обобщенных моделей Поттса, с другой стороны. Каждая из них связана с глубокими математическими и физическими теориями, и на первый взгляд они не имеют ничего общего. Однако в последние годы становится все более ясно, что между этими двумя задачами существуют глубокие внутренние связи. Особенно интересна и таинственна в этом контексте роль групп Гекке. Рассмотрены несколько примеров. Изложение имеет в основном описательный характер.

Ключевые слова: группа Гекке, модель Поттса, преобразование дуальности.

1. ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Результаты, представленные в настоящей работе, основаны на статье [1], написанной совместно с моим коллегой Робертом Бруксом, безвременная кончина которого лишила меня прекрасного друга и соавтора. Его идеи о спектральных характеристиках лапласианов на “типичных” римановых поверхностях пока не полностью оценены, но со временем, без сомнения, получат признание.

Пусть Γ – конечный k -регулярный граф.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Ориентация* $\mathcal{O}$ на Γ представляет собой приписывание каждой вершине $v \in \Gamma$ циклического порядка ребер, выходящих из v . Граф $(\Gamma, \mathcal{O})$ с ориентацией часто называется в литературе *жирным графом*.

Обобщая конструкцию работы [2], полученную для $k = 3$, свяжем с ориентированным графом $(\Gamma, \mathcal{O})$ пару римановых поверхностей $S^{\mathcal{O}}(\Gamma, \mathcal{O})$ и $S^C(\Gamma, \mathcal{O})$, где $S^{\mathcal{O}}(\Gamma, \mathcal{O})$ – риманова поверхность с конечной площадью, а $S^C(\Gamma, \mathcal{O})$ обозначает ее конформную компактификацию. Как и в работе [2], наша идея состоит в том, что спектральная геометрия некомпактной поверхности $S^{\mathcal{O}}(\Gamma, \mathcal{O})$ контролируется (с точностью до геометрических констант) спектральной геометрией ориентированного графа $(\Gamma, \mathcal{O})$,

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: monastyrsky@itep.ru

который уже можно изучать комбинаторными методами. Спектральная геометрия замкнутой поверхности $S^C(\Gamma, \mathcal{O})$ оказывается близкой к спектральной геометрии открытой поверхности $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$, если $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$ удовлетворяет условию больших каспов, которое объясняется ниже. Центральным элементом конструкции является следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для заданного k группа Гекке $\mathbf{H}_k$ является дискретной подгруппой в $PSL(2, \mathbb{R})$, порожденной матрицами

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cos(\pi/k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная область F_k для H_k показана на рисунке, где p_0 – находящаяся в верхней полуплоскости точка пересечения окружностей радиуса 1 с центрами в точках 0 и $2 \cos(\pi/k)$. Замечая, что i – неподвижная точка для B_k , видим, что p_0 – неподвижная точка для

$$A_k B_k = \begin{pmatrix} 2 \cos(\pi/k) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $p_0 = \cos(\pi/k) + i \sin(\pi/k)$, при этом указанные окружности пересекаются в точке p_0 под углом $2\pi/k$.

Тот факт, что A_k и B_k порождают дискретную группу, можно получить из теоремы Пуанкаре о многоугольниках, из того, что A_k сохраняет орицикл $y = 1$, а также из того, что $A_k B_k$ представляет собой вращение на угол $2\pi/k$ вокруг p_0 и перемещает точку i в точку $2 \cos(\pi/k) + i$. В частном случае $k = 3$ имеем $2 \cos(\pi/k) = 1$, в результате возникают хорошо известные генераторы и фундаментальная область для $PSL(2, \mathbb{Z})$.

2. ПОВЕРХНОСТИ ГЕККЕ

Для каждого k зададим набор $\mathcal{H}_k$ поверхностей S таких, что $S = S^C(\Gamma, \mathcal{O})$ для некоторого k -регулярного $(\Gamma, \mathcal{O})$. Следующая теорема утверждает, что $\mathcal{H}_k$ есть в точности множество $\mathcal{B}$ поверхностей Белого, для которых известно несколько характеристик [3], [4].

ТЕОРЕМА 1 [1]. Для каждого k имеет место равенство $\mathcal{H}_k = \mathcal{B}$.

Из этой теоремы, например, следует, что для любой римановой поверхности S и для любого ε найдется такой k -регулярный ориентированный граф $(\Gamma, \mathcal{O})$, что $S^C(\Gamma, \mathcal{O})$ будет ε -близка к S (для любой разумной метрики на пространстве модулей поверхностей). Основным момент здесь состоит в том, что описание поверхности S в виде $S = S^C(\Gamma_k, \mathcal{O}_k)$ для некоторого k может быть очень сложным, тогда как для другого k' граф $(\Gamma_{k'}, \mathcal{O}_{k'})$ может оказаться достаточно простым.

Отметим, что результат теоремы не является новым, схожая реализация поверхностей Белого приводится в работах [5], [6]. Мы лишь дали новое простое доказательство, связанное с теорией графов.

3. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ $S^O(\Gamma)$ И $S^C(\Gamma)$

В данном разделе мы опишем, как извлечь некоторые геометрические свойства поверхностей $S^O(\Gamma)$ и $S^C(\Gamma)$ из комбинаторики графа $\Gamma(G, \mathcal{O})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Путь, состоящий из левых поворотов (ПЛП), – это замкнутый путь на $\Gamma(G, \mathcal{O})$ такой, что в каждой вершине путь совершает поворот налево в выбранной ориентации $\mathcal{O}$.

Перемещение по ПЛП на Γ представляет собой некий путь на $S^C(\Gamma, \mathcal{O})$, который обходит вокруг каспа. Пусть $l = l(\Gamma(G), \mathcal{O})$ – число ПЛП без общих точек, тогда топология поверхности $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$ может быть описана в терминах l и числа вершин $2n$. Граф Γ разбивает $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$ на l областей, каждая из которых ограничена неким ПЛП и содержит внутри себя один касп. Используем формулу для эйлеровой характеристики $\chi(S^O(\Gamma, \mathcal{O})) = 2n - ln + l = 2 - 2g$. Род поверхности $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$ тогда равен $g = 1 + (n - l)/2$, а число каспов равно l .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Топология поверхности $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$ существенно зависит от выбора ориентации $\mathcal{O}$.

ПРИМЕР 1 [2]. Обычная ориентация на 3-регулярном графе, являющемся 1-скелетом куба, содержит шесть ПЛП, и в качестве соответствующей поверхности мы имеем сферу с шестью проколами, но можно также выбрать два, четыре или шесть ПЛП, так что поверхность может иметь род 0, 1, 2.

ПРИМЕР 2. Пусть $(\Gamma, \mathcal{O})$ – ориентированный k -регулярный граф, в котором все ПЛП имеют длину l . Тогда можно определить дуальный ориентированный граф $(\Gamma^*, \mathcal{O}^*)$ как l -регулярный граф, в котором все ПЛП имеют длину k : вершины графа Γ^* суть ПЛП на Γ , а ребра $\{e\}$ соответствуют ребрам e графа Γ , причем $\{e\}$ соединяет два (не обязательно различных) ПЛП, которым принадлежит e . Ориентация $\mathcal{O}^*$ на Γ^* задается следующим образом: для заданного ПЛП γ и ребра e на Γ следующий элемент в циклическом порядке в $\{\gamma\}$ есть $\{e'\}$, где e' – ребро, следующее за e вдоль пути γ .

Интересным примером также является k -регулярный платонов граф [1], [7].

ТЕОРЕМА 2 [1]. *Имеет место следующее равенство: $S^C(\Gamma, \mathcal{O}) = S^C(\Gamma^*, \mathcal{O}^*)$.*

Описанная выше дуальность связана с двумя типами компактификации поверхности орициклами и с добавлением точек из абсолюта с помощью геодезических, ведущих в каспы. Дело здесь в том, что граф $(\Gamma, \mathcal{O})$ может оказаться сложным для изучения, но дуальный граф $(\Gamma^*, \mathcal{O}^*)$ может быть проанализирован достаточно легко. Например, равномерное ограничение снизу постоянной Чигера и первого собственного значения для дуальных платоновых графов π_k^* эквивалентно теореме Сельберга [7] с точностью до константы, но постоянную Чигера и первое собственное значение π_k^* можно вычислить и элементарно [7].

4. БОЛЬШИЕ КАСПЫ

Геометрию каспов можно также извлечь из структуры $\Gamma(G, \mathcal{O})$. В работе [4] предложена следующая конструкция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть S^O – риманова поверхность с конечной площадью. Поверхность S^O имеет каспы длины $\gg L$ (выполнено *условие больших каспов*), если имеется система замкнутых орициклов c_i , такая что:

- 1) каждый орицикл имеет длину не меньше L ;
- 2) каждый касп содержится во внутренности одного из c_i ;
- 3) внутренности циклов c_i попарно не имеют общих точек.

Важность этого условия следует из теоремы, которая утверждает, что если S^O удовлетворяет условию больших каспов, то спектральные геометрии поверхностей S^O и S^C близки друг к другу. Точное утверждение можно найти в работе [4]. Приведем схему доказательства. Если каждый касп имеет орицикл длины по крайней мере 2π , то можно заклеить данный касп метрикой отрицательной кривизны, конформно изменяя метрику внутри каспа. Ограничение числом 2π возникает как необходимое условие из теоремы Гаусса–Бонне. В работе [8] показано, что оно же и достаточно. Соответствующее число для k -регулярных графов будет первым целым m , для которого $2m \cos(\pi/k) > 2\pi$. Таким образом, в пределе при стремлении k к бесконечности $m = 4$, а при $k = 3$ (модулярная группа) $m = 7$.

Заметим, что из условия больших каспов *не следует*, что все замкнутые пути на графе Γ являются короткими, это условие относится только к ПЛП. Таким образом, ориентированный граф $(\Gamma, \mathcal{O})$ может иметь много коротких геодезических, но также и каспы длины не меньше L для некоторых больших L .

Разумеется, не всегда удобно изменять метрику внутри замкнутых орициклов. Например, в платоновых графах π_k все ПЛП имеют длину 3, а потому там нет больших каспов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Асимптотическое поведение проявляет себя уже при малых L , при $L \sim 7$. Мы обнаружили, что одни и те же критические значения появляются в двух, по-видимому, не связанных друг с другом проблемах – при вычислении статистической суммы в двумерной квантовой гравитации и при анализе случайных блужданий на локально свободных группах.

5. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ГРАФАХ И ПОВЕРХНОСТЯХ

Геодезические на $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$ можно описывать в терминах графа $(\Gamma, \mathcal{O})$. Замкнутый путь P длины k на графе можно задавать, начиная со срединной точки на ребре и далее определяя последовательность $(w_1, \dots, w_n)$, где каждое w_i есть 1, или r , что означает левый или правый поворот в следующей встреченной вершине. Пусть $M_P = W_1 \dots W_k$, где

$$W_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{если } w_j = 1; \quad W_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{если } w_j = r.$$

Замкнутый путь P на Γ тогда гомотопен замкнутой геодезической $\gamma(P)$ на $S^O(\Gamma, \mathcal{O})$; длину $\text{length}(\gamma(P))$ геодезической можно найти из уравнения $\text{ch}[\text{length}(\gamma(P))/2] = \text{tr } M_P$. Длина геодезической существенно зависит от $\mathcal{O}$. Например, если путь P содержит только левые повороты, то $\text{length}(\gamma(P)) = 0$. Если путь P длины r состоит из чередующихся левых и правых поворотов, то $\text{length}(\gamma(P)) = r \ln((3 + \sqrt{5})/2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Имеется определенное сходство между вычислением длин геодезических в терминах графов и построением факторов фон Неймана со специальными значениями индекса. Справедлив следующий замечательный результат.

ТЕОРЕМА 3 [9]. *Для каждого целого k существуют фактор $R_0 \subset R$ и субфактор R_0 типа Π_1 с индексом $[R:R_0]$, равным $4 \cos^2(\pi/n)$.*

Например, существует фактор с $[R:R_0] = (3 + \sqrt{5})/2$. Такое сходство не является случайным. Оно связано с конструкцией факторов гиперфинитного типа, использующей диаграммы Брателли. С другой стороны, оно связано с квантованием пространства модулей поверхностей Римана, базирующемся на разложении поверхностей на k -валентные графы. Детали мы обсудим в отдельной публикации.

6. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ПОТТСА

В данном разделе мы рассмотрим некоторые связи групп Гекке с моделями Поттса. Кратко напомним определение классической модели Поттса в планарном случае. Подробности приведены в книге [10].

$\mathbb{Z}_q$ -модель Поттса. Пусть L — двумерная решетка. С каждой вершиной i свяжем “спин” σ_i , принимающий q значений. Два соседних спина σ_i и σ_j взаимодействуют с энергией $-J\delta(\sigma_i, \sigma_j)$, где $\delta(\cdot, \cdot)$ — дельта-функция Дирака. Полная энергия имеет вид

$$\mathcal{E} = -J \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем ребрам (i, j) решетки L . Статистическая сумма определяется как

$$Z_n = \sum_{\sigma} \exp \left\{ K \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right\}, \quad K = \frac{J}{k_B T}, \quad (2)$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – температура, а суммирование ведется по всем значениям спина σ_i . Формула (2) эквивалентна следующей:

$$Z_n = \sum_{\sigma} \prod_{(i,j)} (1 + v\delta(\sigma_i, \sigma_j)). \quad (3)$$

Модель Поттса можно определить и на любом графе L .

В работе [11] показано, что Z_n для модели Поттса можно выразить в виде дихроматического многочлена, известного в теории графов (см. книгу [12]). Положим $v = e^K - 1$. Рассмотрим типичный граф L , содержащий l связей и s связных компонент (включая изолированные вершины). Пусть E – число ребер графа L . Тогда слагаемое в (1) является суммой двух членов, 1 и $v\delta(\sigma_i, \sigma_j)$. Поэтому произведение можно разложить в сумму 2^E слагаемых. Каждый из этих 2^E членов можно связать с графом на ребрах L . Тогда соответствующий член в разложении содержит множитель v^l . Суммируя по независимым спинам и по всем компонентам, получаем вклад этих членов, равный $q^c v^l$, где c есть число компонент графа (изолированный узел (вершина) также считается компонентой). Таким образом, статистическая сумма Z_n имеет вид суммы по всем графам G , нарисованным на L . Это выражение называется дихроматическим многочленом или многочленом Уитни–Татта.

В случае антиферромагнетика $K = -\infty$ и $v = -1$, при этом

$$Z_n = \sum q^c (-1)^l = P_n(q), \quad (4)$$

где $P_n(q)$ – хроматический многочлен: ясно, что $P_n(q)$ определяет число способов, которыми можно раскрасить узлы решетки L , используя q цветов, так, что цвет никаких двух соседних узлов не совпадает. Тем самым $P_n(q)$ есть многочлен по q , который совпадает со статистической суммой Z_n из (4). Важно упомянуть, что выражение (4) определено для любого комплексного числа q , не обязательно целого. Имеется замечательная гипотеза о поведении нулей хроматических многочленов.

ГИПОТЕЗА БЕРАХА. Рассмотрим хроматический многочлен $P_n(q)$ для произвольного большого планарного графа. Тогда вещественные нули многочлена $P_n(q)$ концентрируются вблизи предельных точек. Эти предельные точки являются так называемыми числами Бераха $q = [2 \cos(\pi/k)]^2$, $k = 2, 3, \dots$.

Эта гипотеза все еще не доказана. Имеется интересный подход к ней с использованием квантовых групп [13]. Хотелось бы в общих чертах наметить другой подход, использующий графы Гекке. В этом случае необходимо рассмотреть граф Кэли, порождаемый группами Гекке. Статистическая сумма модели Поттса, определенной на этом графе, сводится к хроматическим многочленам с желаемыми свойствами. Упомянем в заключение, что знаменитая проблема четырех красок на планарном графе в точности эквивалентна свойству, что $P_n(4)$ всегда равен нулю.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [14] мы обобщили дуальность Крамерса–Ванье на случай, когда спины принимают значения в любой конечной группе, не обязательно абелевой. В работе [15] было дано обобщение на компактные группы. Идея этих работ состоит в том, чтобы вместо соотношения группы G , в которой принимают значения спины, и двойственного объекта $\widehat{G}$ изучать пару алгебр, а именно групповую алгебру $[G]$ и пространство $C(G)$ регулярных функций на G .

Данный подход представляется вполне естественным с точки зрения квантовых групп. В этой связи интересно исследовать так называемое соответствие Маккея, которое связывает с любой конечной группой K в $SU(2)$ определенный граф, совпадающий с аффинно расширенными диаграммами Дынкина. Вершины этого графа соответствуют неприводимым представлениям группы K . Расширенная вершина отвечает одномерному представлению. Недавно в работе [16] эти результаты были распространены на кокомпактные дискретные подгруппы γ в $SU(1, 1)$. Интересная задача состоит также в рассмотрении соответствия Маккея для групп Гекке.

Последнее, что хотелось бы упомянуть – это соотношение между группами Гекке и двумерной квантовой теорией поля. Эти группы появились как представления монодромии в некоторых группах окрашенных кос и определяли корреляционные функции в $\mathbb{Z}_3$ -модели Поттса и парафермионной модели Поттса [5], [8], [17]. Как мы уже отмечали, модель Поттса определена не только для целых q , можно построить конформную алгебру для любого вещественного q . Однако имеется существенная разница между случаями $q \leq 4$ и $q > 4$: при $q \leq 4$ конформная алгебра является конечномерной, только если $q = [2 \cos(\pi/k)]^2$.

Благодарности. Данная статья основана на докладе на Второй международной конференции “Струнная теория поля и смежные вопросы” (Москва, 2009 г.). Я благодарен организаторам за приглашение. Данная работа была закончена во время моих визитов в Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette, France), Institute for Advanced Study (Princeton, USA) и Mount Holyoke College (South Hadley, USA). Я признателен всем этим учреждениям за гостеприимство и частичную финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] R. Brooks, M. Monastyrsky, “ K -regular graphs and Hecke surfaces”, *Geometry, Spectral Theory, Groups, and Dynamics*, Contemp. Math., **387**, eds. M. Entov, Y. Pinchover, M. Sageev, AMS, Providence, RI, 2005, 65–74.
- [2] R. Brooks, E. Makover, *J. Diff. Geom.*, **68**:1 (2004), 121–157.
- [3] Г. В. Белый, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:2 (1979), 267–276.
- [4] R. Brooks, E. Makover, “Belyi surfaces”, *Entire Functions in Modern Analysis* (Tel-Aviv, 1997), Israel Math. Conf. Proc., **15**, eds. Y. Lyubich, V. Milman, I. Ostrovskii, M. Sodin, V. Tkachenko, L. Zalcman, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 2001, 37–46.
- [5] P. B. Cohen, C. Itsykson, J. Wolfart, *Comm. Math. Phys.*, **163**:3 (1994), 605–627.
- [6] G. Jones, D. Singermann, *Bull. London Math. Soc.*, **28**:6 (1996), 561–590.
- [7] R. Brooks, *Comment. Math. Helv.*, **74**:1 (1999), 156–170.
- [8] D. Mangoubi, *J. Anal. Math.*, **91**:1 (2003), 193–209.

- [9] V. F. R. Jones, *Invent. Math.*, **72**:1 (1983), 1–25.
- [10] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [11] P. W. Kasteleyn, C. M. Fortuin, *J. Phys. Soc. Japan*, **26**, Suppl. (1969), 11–14.
- [12] У. Татт, *Теория графов*, Мир, М., 1988.
- [13] A. B. Zamolodchikov, *Exact solutions in two dimensional conformal theory and critical phenomena*, Preprint, ITP-87-65, Kiev, 1987.
- [14] V. M. Buchstaber, M. I. Monastyrsky, *J. Phys. A*, **36**:28 (2003), 7679–7692.
- [15] M. Monastyrsky, *Kramers–Wannier Duality for spin systems with non-abelian symmetries*, Proc. IV School in Mathematical Physics (Belgrade, 2006).
- [16] I. Dolgachev, “McKay’s correspondence for cocompact discrete subgroups of $SU(1, 1)$ ”, *Groups and Symmetries*, CRM Proc. Lecture Notes, **47**, eds. J. Harnard, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 2009, 111–133.
- [17] V. I. S. Dotsenko, *J. Stat. Phys.*, **34**:5–6 (1984), 781–791.