Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Бельков, И. Г. Корепанов, Матричное решение уравнения пентагона с антикоммутирующими переменными, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 3, 513–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:05:23

© 2010 г.

С. И. Бельков*, И. Г. Корепанов*

МАТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНТАГОНА С АНТИКОММУТИРУЮЩИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Построено решение уравнения пентагона с антикоммутирующими переменными, сопоставленными граням тетраэдров. В этом решении вершинам тетраэдров приписываются матричные координаты. Поскольку матричное умножение некоммутативно, отсюда следует “более квантовая”, чем в наших предыдущих работах, топологическая теория поля.

Ключевые слова: уравнение пентагона, топологическая квантовая теория поля, алгебраический комплекс, кручение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение пентагона отвечает движению Пахнера $2 \rightarrow 3$ и является фундаментальным составным элементом многих топологических квантовых теорий поля (ТКТП) для трехмерных многообразий. Движения Пахнера представляют собой элементарные перестройки триангуляции многообразия, которые важны в связи с теоремой Пахнера [1], [2], в которой, в частности, утверждается, что для заданного трехмерного многообразия любую триангуляцию можно получить из любой другой посредством конечной последовательности движений Пахнера четырех типов: $2 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 4$.

Движения “ $2 \leftrightarrow 3$ ” представляют собой следующее. Пусть в триангуляции, помимо прочих, имеются два тетраэдра с общей двумерной гранью. Обозначим их 1234 и 5123, где $1, \dots, 5$ – их вершины, так что 123 – их общая двумерная грань. По определению движение $2 \rightarrow 3$ заменяет эти два тетраэдра на три тетраэдра 1254, 2354 и 3154, занимающие ту же область в многообразии. Движение $3 \rightarrow 2$ представляет собой обратную операцию.

Что же касается движения $1 \rightarrow 4$, то в результате него в тетраэдре 1234 появляется новая вершина 5 и этот тетраэдр заменяется на четыре тетраэдра 1235, 1425, 1345 и 3245. Движение $4 \rightarrow 1$ представляет собой обратную операцию. Центральную роль обычно играют движения $2 \leftrightarrow 3$: если удастся придумать отвечающую им

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия.
E-mail: sergey_belkov@mail.ru, kig@susu.ac.ru

алгебраическую конструкцию, то оказывается, что для движений $1 \leftrightarrow 4$ конструкция работает “автоматически”. Нам встретится как раз такая ситуация ниже, при доказательстве теоремы 4.

Движения Пахнера связывают любые две триангуляции заданного многообразия, а потому величина, инвариантная относительно всех движений Пахнера, не зависит от конкретной триангуляции и, следовательно, является инвариантом многообразия. Точнее говоря, это справедливо для кусочно-линейных многообразий. Однако в размерности 3 кусочно-линейная категория совпадает с топологической [3], так что мы действительно получаем топологический инвариант.

Конкретный математический смысл уравнения пентагона может различаться – ситуация, хорошо известная, например, для уравнения Янга–Бакстера: в обоих случаях можно рассматривать уравнение с переменными или на ребрах, или на двумерных гранях и т.д., а также рассматривать функциональный (или теоретико-множественный) вариант уравнения. Назовем *решением уравнения пентагона* любое алгебраическое соотношение, о котором можно сказать, что оно соответствует движению Пахнера $2 \rightarrow 3$, и из которого может следовать построение инвариантов многообразия. В настоящей работе полученное нами решение уравнения пентагона сформулировано в терминах антикоммутирующих переменных Грассмана–Березина и в этом отношении аналогично решению, полученному в работе [4], где оно возникает в качестве первого шага к построению простых ТКТП¹⁾, связанных с группой $PSL(2, \mathbb{C})$.

Заметим, что рассматриваемые ТКТП являются конечномерными в том смысле, что в них не входят функциональные (бесконечномерные) интегралы: они связаны с конечными триангуляциями и приписывают им конечное число величин.

Отличительной особенностью настоящей работы является то, что параметры теории – так называемые “координаты”, относящиеся к вершинам триангуляции, – это матрицы, так что в рассматриваемом уравнении пентагона главную роль играет некоммутативное матричное умножение. Это может быть важным, поскольку, выражаясь несколько нестрого, любая новая некоммутативность делает наши теории “более квантовыми” и, таким образом, устраняет “классические” свойства, которые могли присутствовать в тех ТКТП, которые мы рассматривали ранее.

Имеются некоторые расчеты [8], показывающие, что такой “более квантовый” характер будет должным образом проявляться только в контексте, включающем нетривиальное, и даже неабелево, представление фундаментальной группы многообразия, как это описано в работах [9], [10]. Однако цель настоящей работы заключается лишь в том, чтобы построить решение уравнения пентагона и показать, что оно справедливо также для движений $1 \leftrightarrow 4$, так что эти “квантовые” вычисления мы оставим на будущее.

В разделе 2 описываются рассматриваемые конструкции в скалярном $((1 \times 1)$ -матричном) случае, который уже дает новое и элегантное решение уравнения пентагона. Обобщение на $(n \times n)$ -матрицы получается не так непосредственно, оно возникает из

¹⁾ Отметим также, что от формулы (5) в работе [5], на которой основаны наши исследования уравнения пентагона, путь к ТКТП из работ [6], [7] неблизкий.

некоторых специальных алгебраических комплексов, которые вводятся в разделе 3. В разделе 4 мы устанавливаем связь между матрицами линейных отображений в алгебраических комплексах и выражениями, зависящими от антикоммутирующих переменных. Фактическое решение уравнения пентагона с $(n \times n)$ -матрицами представлено в разделе 5. Затем в разделе 6 построены (в простейшем варианте) связанные с ним инварианты многообразий; там же рассматриваются движения $1 \leftrightarrow 4$. Наконец, в разделе 7 обсуждаются некоторые удивительные факты, с которыми мы столкнулись в предыдущих разделах.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНТАГОНА: СКАЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

2.1. Грассмановы алгебры и интеграл Березина. Напомним [11], что *грассманова алгебра* над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ является ассоциативной алгеброй с единицей, с образующими a_i и соотношениями

$$a_i a_j = -a_j a_i, \quad a_i^2 = 0.$$

Таким образом, любой элемент грассмановой алгебры представляет собой многочлен степени ≤ 1 по каждому a_i .

Интеграл Березина [10] представляет собой $\mathbb{F}$ -линейный оператор на грассмановой алгебре, который определяется равенствами

$$\int da_i = 0, \quad \int a_i da_i = 1, \quad \int gh da_i = g \int h da_i, \quad (1)$$

если g не зависит от a_i (т.е. генератор a_i не входит в выражение для g); кратный интеграл понимается как повторный.

2.2. Решение уравнения пентагона. Рассмотрим тетраэдр с вершинами i_1, i_2, i_3, i_4 , или просто тетраэдр $i_1 i_2 i_3 i_4$. Для каждой вершины i введем комплексный параметр ζ_i , называемый ее *координатой*. Эти параметры произвольны, с единственным условием, что любые две различные вершины $i \neq j$ имеют различные координаты $\zeta_i \neq \zeta_j$. Кроме того, будем использовать обозначения $\zeta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_i - \zeta_j$.

Далее поставим в соответствие любой (неориентированной) двумерной грани ijk грассманов генератор a_{ijk} ($= a_{ikj} = \dots = a_{kji}$), а тетраэдру $i_1 i_2 i_3 i_4$ — его вес

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \stackrel{\text{def}}{=} & \zeta_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2 i_3} a_{i_1 i_2 i_4} - \zeta_{i_1 i_3} a_{i_1 i_3 i_2} a_{i_1 i_3 i_4} + \zeta_{i_1 i_4} a_{i_1 i_4 i_2} a_{i_1 i_4 i_3} + \\ & + \zeta_{i_2 i_3} a_{i_2 i_3 i_1} a_{i_2 i_3 i_4} - \zeta_{i_2 i_4} a_{i_2 i_4 i_1} a_{i_2 i_4 i_3} + \zeta_{i_3 i_4} a_{i_3 i_4 i_1} a_{i_3 i_4 i_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что в каждом члене координата ζ относится к ребру, а две образующих a — к прилежащим граням.

Вес (2) является простейшим примером производящей функции инвариантов многообразия с триангулированной границей; инварианты являются коэффициентами

при произведениях антикоммутирующих переменных. Это не имеет, конечно, большого смысла, когда многообразие есть просто один тетраэдр, но становится нетривиальным уже в случае кластеров из двух или трех тетраэдров (см. ниже теорему 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выражение (2) меняет знак при нечетных перестановках индексов i_1, i_2, i_3, i_4 , т.е. оно относится к *ориентированному* тетраэдру $i_1 i_2 i_3 i_4$; ориентация понимается как упорядочение вершин тетраэдра с точностью до четных перестановок. Однако в настоящей работе для нас в большинстве случаев удобнее игнорировать ориентации и просто записывать вершины в порядке возрастания их номеров, как это делается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Функция $\mathbf{f}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, определяемая выражением (2), удовлетворяет следующему уравнению пентагона (в которое входят два тетраэдра 1234 и 1235 в левой части и три тетраэдра 1245, 2345 и 1345 в правой):

$$\int \mathbf{f}_{1234} \mathbf{f}_{1235} da_{123} = \frac{1}{\zeta_{45}} \iiint \mathbf{f}_{1245} \mathbf{f}_{2345} \mathbf{f}_{1345} da_{145} da_{245} da_{345}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу (3) можно доказать, например, компьютерным вычислением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интегрирование в обеих частях уравнения (3) проводится по грасмановым переменным, сопоставленным внутренним двумерным граням соответствующего кластера из двух или трех тетраэдров. Особая роль ребра 45 в формуле (3), проявляющаяся в множителе $1/\zeta_{45}$, связана с тем фактом, что 45 – единственное внутреннее ребро среди десяти ребер в правой части тетраэдра.

2.3. Возможный инвариант – сумма по состояниям в скалярном случае. Если имеется триангулированное ориентированное многообразие M с краем, то можно построить следующую функцию антикоммутирующих переменных a_{ijk} , сопоставленных *граничным* граням (и параметров ζ_i в вершинах):

$$\frac{1}{\prod' \zeta_{ij}} \int \cdots \int \prod \mathbf{f}_{klmn} \prod' da_{ijk}, \quad (4)$$

где произведение $\prod' \zeta_{ij}$ берется по всем внутренним ребрам ij , произведение $\prod \mathbf{f}_{klmn}$ – по всем тетраэдрам $klmn$, а произведение $\prod' da_{ijk}$ – по всем внутренним граням. Выражение (4) определено с точностью до общего знака, который может меняться при изменении порядка вершин (и/или тетраэдров, дифференциалов и т.д.). Из теоремы 1 и замечания 2 очевидно следует, что выражение (4) инвариантно по крайней мере относительно всех движений Пахнера $2 \leftrightarrow 3$, не изменяющих границу.

Оказывается, что в некоторых случаях функция (4) уже представляет собой работающий многокомпонентный (т.е. включающий многие коэффициенты при различных мономах по антикоммутирующим переменным) инвариант. Его можно назвать *суммой по состояниям* для многообразия M ; то, что здесь естественно появляются антикоммутирующие переменные, означает, что эта сумма по состояниям имеет

фермионную природу. Однако можно заметить, что имеются две проблемы с прямым применением формулы (4):

- 1) если триангуляция имеет по крайней мере одну внутреннюю (не граничную) вершину, то выражение (4) оказывается равным нулю;
- 2) если граница связного многообразия имеет более одной связной компоненты, то выражение (4) также оказывается равным нулю.

Следовательно, для получения инвариантов многообразия приходится использовать более мощный аппарат. Кроме того, некоммутативное (матричное) обобщение веса (2) не является ни непосредственным, ни очевидным. Оказывается, что эти задачи можно решить, вводя новые переменные, объединенные в *алгебраический (цепной) комплекс*.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ С МАТРИЧНЫМИ “КООРДИНАТАМИ”

3.1. Явные формулы. Рассмотрим триангулированное трехмерное компактное ориентированное связное многообразие M с однокомпонентной²⁾ границей ∂M . В разделе 6 мы представим набор инвариантов, построенных для заданной граничной триангуляции и зависящих от комплексных $(n \times n)$ -матриц ζ_i , приписываемых каждой граничной вершине i ; каждый отдельный инвариант из этого набора соответствует некоторому раскрашиванию граничных граней. Здесь раскрашивание означает выбор определенного множества $\mathcal{C}$ некоторых дифференциалов (см. ниже, второй абзац после замечания 3).

Представим простейший вариант нашей конструкции алгебраических комплексов, дающий, в частности, матричное обобщение веса (2). Мы приведем формулы, определяющие наши алгебраические комплексы в явном виде, по существу, как последовательность трех матриц f_2, f_3, f_4 . Эти формулы хорошо приспособлены для компьютерных вычислений, хотя из их вида вряд ли можно понять, как они были получены и по какой причине последовательность (5) векторных пространств и линейных отображений действительно является алгебраическим комплексом. Это будет объяснено в п. 3.2.

Обозначим через N_k , $k = 0, 1, 2, 3$, число k -симплексов в триангуляции, а через N'_k – число внутренних k -симплексов. Затем пронумеруем все вершины в некотором произвольном порядке числами $i = 1, \dots, N_0$. Наши инварианты возникают из алгебраических (цепных) комплексов следующего вида:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{n \cdot N'_0} \xrightarrow{f_2} \mathbb{C}^{2n \cdot N_3} \xrightarrow{f_3} \mathbb{C}^{2n \cdot N_3} \xrightarrow{f_4} \mathbb{C}^{n \cdot N'_0} \longrightarrow 0. \quad (5)$$

Элементы каждого векторного пространства в (5) считаем реализованными в виде вектор-столбцов с высотой, равной показателю u соответствующего $\mathbb{C}$. Таким

²⁾Случай, когда ∂M имеет ровно одну связную компоненту, оказывается самым простым с технической точки зрения. Сложности, возникающие, когда ∂M может иметь произвольное число $0, 1, 2, \dots$ компонент, не очень большие; для аналогичной конструкции такой случай был рассмотрен в работе [4].

образом, все векторные пространства имеют естественные выделенные базисы, состоящие из векторов, у которых одна координата – единица, а остальные – нули³⁾; таким образом, мы можем их отождествить с отображениями с матрицами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Первое ненулевое отображение в выражении (5) обозначено как f_2 , а не f_1 , чтобы наши обозначения не отличались от обозначений в других работах, где появляются аналогичные, но более длинные комплексы, включающие еще два отображения, называемых f_1 и f_5 (см. также п. 3.2).

Вектор-столбец – элемент первого (слева) пространства $\mathbb{C}^{n \cdot N'_0}$ – по определению состоит из N'_0 векторов dz_i , соответствующих каждой внутренней вершине i и имеющих n компонент каждый.

Следующее пространство, $\mathbb{C}^{2n \cdot N_3}$, требует более развернутого объяснения. Пусть имеется двумерная грань ijk , где $i < j < k$. Такой грани по определению соответствует вектор-столбец $d\varphi_{ijk}$ высоты n . Интересующий нас элемент векторного пространства по определению состоит из всех элементов всех $d\varphi_{ijk}$, соответствующих N'_2 внутренним граням, и из некоторого множества $\mathcal{C}$ мощности $\#\mathcal{C} = n(2N_3 - N'_2)$, элементами которого являются компоненты векторов $d\varphi_{ijk}$, соответствующих граничным граням ijk .

В дальнейшем нам понадобятся еще и другие величины. Пусть b – любая упорядоченная тройка ijk вершин триангуляции, соответствующих некоторой двумерной грани из триангуляции. Здесь “упорядочение” означает, что мы берем их именно в этом точном порядке: i, j, k , вне зависимости от того, какое из чисел i, j, k больше или меньше. Теперь, если $i < j < k$, то по определению положим

$$d\varphi_{i,b} \stackrel{\text{def}}{=} d\varphi_b. \quad (6)$$

Далее определим $d\varphi_{i,b}$ для любой пары i, b , где $i \in b$, с помощью следующих условий:

- а) если b_2 получено из b_1 путем нечетной перестановки i, j, k , то $d\varphi_{i,b_2} = -d\varphi_{i,b_1}$ (таким образом, для четной перестановки оба $d\varphi_{i,b}$, конечно, равны между собой);
- б) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} d\varphi_{i,b} + d\varphi_{j,b} + d\varphi_{k,b} &= 0, \\ \zeta_i d\varphi_{i,b} + \zeta_j d\varphi_{j,b} + \zeta_k d\varphi_{k,b} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь перейдем к следующему пространству $\mathbb{C}^{2n \cdot N_3}$. Пусть имеется тетраэдр $ijkl$, $i < j < k < l$, который мы также обозначим одной буквой a . Такому тетраэдру по определению соответствуют два вектор-столбца $d\psi_{i,a}$ и $d\psi_{j,a}$, каждый из которых имеет высоту n . Элемент векторного пространства по определению состоит из всех таких вектор-столбцов, взятых вместе. Нам снова понадобятся дополнительные величины, а именно $d\psi_{i,a}$ для любой вершины i и любого тетраэдра $a \ni i$, вне зависимости от условия $i < j < k < l$. Введем их аналогично тому, как мы делали это для граней, наложив следующие условия:

³⁾ Выделенные базисы важны, когда мы имеем дело с объектами, связанными с кручениями типа кручения Райдемайстера (см. ниже раздел 6).

- а) если a_2 получено из a_1 путем нечетной перестановки i, j, k , то $d\psi_{i,a_2} = -d\psi_{i,a_1}$;
 б) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} d\psi_{i,a} + d\psi_{j,a} + d\psi_{k,a} + d\psi_{l,a} &= 0, \\ \zeta_i d\psi_{i,a} + \zeta_j d\psi_{j,a} + \zeta_k d\psi_{k,a} + \zeta_l d\psi_{l,a} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Наконец, элемент последнего пространства $\mathbb{C}^{n \cdot N'_0}$ аналогичен элементу первого пространства: он состоит из N'_0 векторов $d\chi_i$, соответствующих каждой внутренней вершине i и имеющих по n компонент каждый.

Определим линейные отображения f_2 , f_3 и f_4 следующим образом.

1. По определению отображение f_2 переводит заданные dz_i в следующие $d\varphi_{ijk}$:

$$d\varphi_{ijk} = (\zeta_i - \zeta_j)^{-1}(dz_i - dz_j) - (\zeta_i - \zeta_k)^{-1}(dz_i - dz_k). \quad (9)$$

2. По определению отображение f_3 переводит заданные $d\varphi$ в следующие $d\psi_{i,a}$ и $d\psi_{j,a}$, где $a = ijkl$, $i < j < k < l$:

$$d\psi_{i,a} = d\varphi_{i,ijk} + d\varphi_{i,ikl} + d\varphi_{i,ilj}, \quad d\psi_{j,a} = d\varphi_{j,ijk} + d\varphi_{j,ilj} + d\varphi_{j,jlk}, \quad (10)$$

где величины $d\varphi$ в правых частях, конечно, вычислены с использованием (6), (7).

3. По определению отображение f_4 переводит заданные $d\psi_{i,a}$ в следующие $d\chi_i$:

$$d\chi_i = \sum_a d\psi_{i,a}, \quad (11)$$

где суммирование проводится по всем тетраэдрам a , окружающим заданную вершину i , причем все они берутся с положительной ориентацией, а все $d\psi$ в выражении (11) вычисляются с использованием формул (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как объяснялось выше, матрицы f_3 зависят от выбранного множества $\mathcal{C}$ компонент векторов $d\varphi_{ijk}$, соответствующих граничным граням ijk . Все такие матрицы являются, очевидно, подматрицами матрицы f_3^{full} , включающей все строки, соответствующие всем компонентам векторов $d\varphi_{ijk}$. Таким образом, матрица f_3^{full} действует из $\mathbb{C}^{n \cdot N_2}$ в $\mathbb{C}^{2n \cdot N_3}$, что мы используем ниже в разделе 5.

ТЕОРЕМА 2. *Последовательность (5) векторных пространств и линейных отображений действительно является алгебраическим комплексом, т.е.*

$$f_3 \circ f_2 = 0, \quad f_4 \circ f_3 = 0. \quad (12)$$

Теорему можно доказать прямым вычислением.

3.2. Математическое происхождение комплекса (5). Доказательство теоремы 2 путем прямого вычисления не проясняет математические причины того, что выражение (5) является комплексом. Поэтому мы кратко объясним математическое происхождение комплекса (5).

Линейные отображения f_2 , f_3 и f_4 появляются как дифференциалы dF_2 , dF_3 и dF_4 (с некоторыми модификациями при необходимости) некоторых отображений F_i , образующих нечто вроде “нелинейного комплекса” в том смысле, что

$$F_{i+1} \circ F_i = \text{const}. \quad (13)$$

Из (13), очевидно, имеем

$$dF_{i+1} dF_i = 0,$$

что следует сравнить с (12).

Фактически имеется пять отображений F_i , $i = 1, \dots, 5$. Принимая, однако, во внимание, что теорема 2 доказана и мы хотим лишь выяснить происхождение формул из п. 3.1, мы ограничимся выводом первых трех F_i .

Пусть имеется триангулированное трехмерное многообразие с фиксированной $(n \times n)$ -матрицей ζ_i , приписанной каждой вершине из триангуляции $i = 1, \dots, N_0$.

По определению F_1 переводит пару $(n \times n)$ -матриц (a, b) в

$$z_i = \zeta_i a + b \quad (14)$$

для каждой вершины i из триангуляции. Таким образом, a и b являются, по существу, параметрами *группы аффинных преобразований* $(n \times n)$ -матричной алгебры. Соответствующее касательное отображение $f_1 = dF_1$ в комплексе (5) не возникает, однако оно появится в его более общих вариантах.

Отображение F_2 по определению переводит матрицы z_i в вершинах в матрицы

$$\varphi_{ijk} = \zeta_{ij}^{-1} z_{ij} z_{ik}^{-1} \zeta_{ik} \quad (15)$$

для всех двумерных граней ijk , для которых $i < j < k$. Здесь и далее мы используем обозначения $\zeta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_i - \zeta_j$, $z_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} z_i - z_j$ и т.д. Заметим, что для $z_i = \zeta_i$ (эти значения z_i можно назвать *начальными*, ср. с (16)) выполнено $\varphi = 1$. Очевидно, выполнено первое из равенств (13), а именно $F_2 \circ F_1 = \text{const}$.

Линейное отображение f_2 в нашем конкретном комплексе (5) получено путем дифференцирования формулы (13) по z_i для внутренних вершин i при их начальных значениях $z_i = \zeta_i$, а значения $z_i = \zeta_i$ для граничных вершин i остаются постоянными. В результате получаем формулу (9), где как dz_i , так и $d\varphi_{ijk}$ являются $(n \times n)$ -матрицами. Поскольку очевидно, что (9) действует на каждый столбец dz_i по отдельности, переводя его в соответствующий столбец $d\varphi_{ijk}$, мы рассмотрим лишь один (например, первый) столбец в обеих матрицах, оставив для этого столбца, допуская некоторую вольность, то же самое обозначение dz_i или $d\varphi_{ijk}$.

Отображение F_3 по определению переводит матрицу φ_{ijk} в матрицу $\psi_{i,a}$, связанную с каждым тетраэдром $a = ijkl$ и его вершиной i , по формуле

$$\psi_{i,a} = \varphi_{ijk} \varphi_{ikl} \varphi_{ilj}. \quad (16)$$

Здесь все φ при любом порядке их вершин вычисляются согласно формулам

$$\varphi_{ikj} = \varphi_{ijk}^{-1}, \quad \zeta_{ij}^{-1} \zeta_{ik} - \varphi_{ijk} = -\zeta_{ji}^{-1} \zeta_{jk} \varphi_{kij}^{-1},$$

что согласуется с (15).

Как и раньше, достаточно очевидно, что $F_3 \circ F_2 = \text{const}$. Формулы (10) получаются из (16) путем дифференцирования при начальных значениях $z_i = \zeta_i$, $\varphi_{ijk} = 1$ и последующего взятия отдельных столбцов вместо матричных дифференциалов, аналогично тому, как это делалось для матриц f_2 .

4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ГРАССМАНОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Установим связь матриц (в основном имея в виду матрицу f_3^{full} из замечания 4) с функциями грассмановых переменных. Пусть A – произвольная матрица, элементами которой являются комплексные числа или комплекснозначные выражения, с единственным условием, что число столбцов этой матрицы не меньше числа ее строк⁴). С каждым столбцом k матрицы A свяжем грассманову образующую a_k , а с каждой матрицей A – производящую функцию, определяемую как

$$\mathbf{f}_A = \sum_C \det A|_C \prod_{k \in C} a_k, \quad (17)$$

где C пробегает все подмножества множества столбцов мощности, равной числу строк; $A|_C$ – квадратная подматрица матрицы A , содержащая все столбцы из C ; порядок a_k в произведении тот же, что и порядок столбцов в матрице $A|_C$ (напримр, наиболее естественный – в порядке возрастания индексов k в обоих случаях).

ЛЕММА 1. Пусть C – вертикальная конкатенация матриц A и B , имеющих равное число столбцов: $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{f}_C = \mathbf{f}_A \mathbf{f}_B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма легко следует из известного из линейной алгебры разложения вида

$$\text{minor } C = \sum \pm \text{minor } A \text{ minor } B \quad (18)$$

для каждого минора матрицы C с полным числом столбцов.

Пусть теперь имеется подмножество $\mathcal{I}$ множества всех столбцов матрицы A . Будем называть столбцы матрицы $\mathcal{I}$ *внутренними*, а остальные столбцы – *внешними* и определим производящую функцию матрицы A с множеством $\mathcal{I}$ внутренних столбцов как

$${}_{\mathcal{I}}\mathbf{f}_A = \sum_{C \supset \mathcal{I}} \det' A|_C \prod_{k \in C \setminus \mathcal{I}} a_k. \quad (19)$$

⁴)Заметим, что мы здесь поменяли местами строки и столбцы по сравнению с работой [4]!

Здесь $\det'$ означает, что по сравнению с детерминантом в формуле (17) мы изменяем порядок столбцов матрицы A следующим образом: все внутренние столбцы переносятся направо от матрицы; порядок столбцов в пределах множества $\mathcal{I}$ и его дополнения сохраняются; порядок переменных a_k в произведении (где k принадлежит упомянутому выше дополнению) тот же, что и порядок столбцов k .

ЛЕММА 2. *Производящая функция матрицы A с множеством $\mathcal{I}$ внутренних столбцов является следующим интегралом Березина обычной производящей функции:*

$$\mathcal{I} \mathbf{f}_A = \int \dots \int \mathbf{f}_A \prod_{l \in \mathcal{I}} da_l, \quad (20)$$

где дифференциалы записаны в том же порядке⁵⁾, что и строки в матрице A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что после интегрирования в правой части формулы (20) остаются только те члены из выражения для $\mathbf{f}_A$, которые содержат все переменные a_k при $k \in \mathcal{I}$. Возьмем функцию $\mathbf{f}_A$, определенную в (17), оставив в ней лишь упомянутые выше члены, и заметим, что ни один из них не изменится, если мы перенесем столбцы k матрицы A при всех $k \in \mathcal{I}$ в правую часть матрицы, а соответствующие генераторы a_k — направо в произведении, не изменяя порядка ни внутри множества $\mathcal{I}$, ни внутри его дополнения⁶⁾. Тогда интегрирование в (20) просто убирает переменные a_k при $k \in \mathcal{I}$, что и требовалось доказать.

5. УРАВНЕНИЕ ПЕНТАГОНА С МАТРИЧНЫМИ КООРДИНАТАМИ

5.1. Уравнение пентагона. Оказывается, что матричный вариант веса тетраэдра (2), удовлетворяющий уравнению пентагона (матричному варианту), можно построить как производящую функцию для матрицы f_3^{full} (см. замечание 4), соответствующей единственному тетраэдру $a = i_1 i_2 i_3 i_4$, рассматриваемому как многообразие с краем⁷⁾. Матрицу f_3^{full} можно вычислить, используя формулы (10) и (7); она имеет вид

$$f_3^{\text{full}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ \zeta_{i_2 i_3}^{-1} \zeta_{i_3 i_1} & -\zeta_{i_2 i_4}^{-1} \zeta_{i_4 i_1} & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

⁵⁾Мы принимаем соглашение, согласно которому кратный интеграл Березина вычисляется по правилу

$$\iint f(a)g(b) da db = \int f(a) da \cdot \int g(b) db.$$

Это соглашение кажется наиболее общепринятым. Заметим, что в работе [4] мы использовали другое соглашение, согласно которому дифференциалы в кратном интеграле записывались в обратном порядке. Отсюда и различие между формулой (20) и формулой (52) из работы [4].

⁶⁾После любой элементарной перестановки столбцов появляется знак минус, который сокращается со знаком минус, появляющимся в результате соответствующей перестановки переменных a_k .

⁷⁾Заметим, что поскольку в этом тетраэдре нет внутренних вершин, то матриц f_2 и f_4 нет в комплексе (5), записанном для одиночного тетраэдра, в том смысле, что одна из размерностей в обеих матрицах равна нулю. В левой и правой частях движения Пахнера $2 \rightarrow 3$ тоже нет внутренних вершин (см. ниже лемму 3).

Матрица (21) является, конечно же, блочной, причем $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – нулевая и единичная $(n \times n)$ -матрицы. Блочные строки матрицы (21) соответствуют дифференциалам $d\psi_{i_1,a}$ и $d\psi_{i_2,a}$, а блочные столбцы – дифференциалам $d\varphi_{i_1i_2i_3}$, $d\varphi_{i_1i_2i_4}$, $d\varphi_{i_1i_3i_4}$ и $d\varphi_{i_2i_3i_4}$ (в обоих случаях именно в таком порядке). Пусть $\mathbf{f}_{i_1i_2i_3i_4}$ – производящая функция (17) для матрицы (21); здесь мы не будем ее выписывать, поскольку, как показывают компьютерные вычисления, уже в случае $n = 2$ она содержит 60 ненулевых мономов.

Таким образом, каждому $d\varphi_{ijk}$ соответствует вектор a_{ijk} из n антикоммутирующих переменных.

ТЕОРЕМА 3. *Производящие функции $\mathbf{f}_{i_1i_2i_3i_4}$ для матриц (21) удовлетворяют уравнению пентагона*

$$\begin{aligned} \frac{\det \zeta_{23}}{\det \zeta_{34} \det \zeta_{35}} \underbrace{\int \dots \int}_n \mathbf{f}_{1234} \mathbf{f}_{1235} \mathcal{D}a_{123} = \\ = \frac{1}{\det \zeta_{45}} \underbrace{\int \dots \int}_{3n} \mathbf{f}_{1245} \mathbf{f}_{2345} \mathbf{f}_{1345} \mathcal{D}a_{145} \mathcal{D}a_{245} \mathcal{D}a_{345}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathcal{D}a_{i_1i_2i_3}$ означает произведение всех компонент $da_{i_1i_2i_3}$, взятых в их естественном порядке.

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. *n -Кратный и $3n$ -кратный интегралы в левой и правой частях уравнения (22) являются производящими функциями для матриц f_3^{full} , соответствующих левой и правой частям движения Пазнера $2 \rightarrow 3$, рассматриваемых как триангулированные многообразия с краем.*

Обе эти матрицы f_3^{full} являются вертикальными конкатенациями матриц (21), расширенных с помощью необходимых столбцов, соответствующих двумерным граням, отсутствующим в заданном тетраэдре, и заполненных нулями. Приведем в качестве примера матрицу f_3^{full} для левой части движения $2 \rightarrow 3$:

$$(f_3^{\text{full}})_{\text{l.h.s.}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{23}^{-1} \zeta_{31} & -\zeta_{24}^{-1} \zeta_{41} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \zeta_{23}^{-1} \zeta_{31} & 0 & -\zeta_{25}^{-1} \zeta_{51} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Как и в (21), каждый элемент матрицы (23) представляет собой матрицу размера $n \times n$. Первый блочный столбец в матрице (23) соответствует n -компонентному дифференциалу $d\varphi_{123}$ на внутренней грани 123, остальные столбцы – следующим граничным граням, слева направо: $d\varphi_{124}$, $d\varphi_{125}$, $d\varphi_{134}$, $d\varphi_{135}$, $d\varphi_{234}$ и $d\varphi_{235}$. Строки соответствуют дифференциалам $d\psi_{1,1234}$, $d\psi_{2,1234}$, $d\psi_{1,1235}$ и $d\psi_{2,1235}$.

где произведение, обозначенное как $\prod^{(e)}$, берется по всем внутренним ребрам $i_1 i_2$; оба произведения, обозначенные как $\prod^{(f)}$, берутся по всем внутренним двумерным граням $j_1 j_2 j_3$, $j_1 < j_2 < j_3$; оба произведения, обозначенные как $\prod^{(t)}$, берутся по всем тетраэдрам $k_1 k_2 k_3 k_4$, $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$. Мы поставили знак “ $\pm$ ” в выражении (25), поскольку выбор порядка множителей в произведении весов $\mathbf{f}$, аналогично выбору порядка интегрирования по различным переменным, представляет собой отдельную задачу; поэтому мы просто оставляем функцию (25) определенной с точностью до знака⁸⁾.

5.3. Случай $n = 1$: воспроизведение формулы (2). Возьмем матрицу (21) при $n = 1$ и сделаем следующее: умножим первый столбец, соответствующий $d\varphi_{i_1 i_2 i_3}$, на $\zeta_{i_2 i_3}$, аналогично остальные столбцы умножим на $\zeta_{i_2 i_4}$, $\zeta_{i_3 i_4}$ и снова на $\zeta_{i_3 i_4}$ соответственно; затем поделим вторую строку на $(-\zeta_{i_3 i_4})$. Производящая функция (17) для такой “калибровочно преобразованной” матрицы – это не что иное, как “скалярный” вес (2). Теперь вывод уравнения (3) из общего матричного уравнения (22) представляет собой несложное упражнение.

6. ПРОИЗВОЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ С ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ГРАНИЦЕЙ: КРУЧЕНИЕ И НАБОР ИНВАРИАНТОВ

Как уже упоминалось в п. 3.1, мы рассматриваем триангулированное трехмерное компактное ориентированное связное многообразие M с однокомпонентной границей ∂M . Можно показать, что если триангуляция действительно содержит внутренние вершины, то пробный инвариант, построенный в (25), просто обращается в нуль. Более того, выражение (25) явным образом инвариантно только относительно движений $2 \leftrightarrow 3$, а по поводу движений $1 \leftrightarrow 4$ априори ничего не известно. Именно поэтому в данном разделе мы собираемся построить инварианты в случае, когда решены внутренние вершины, а также доказать их инвариантность по отношению ко всем движениям Пахнера.

Определим кручение комплекса (5) как

$$\tau = \frac{\text{minor } f_3}{\text{minor } f_2 \text{ minor } f_4}, \quad (26)$$

где миноры соответствуют некоторой невырожденной τ -цепочке по обычным правилам [12]; если такой τ -цепочки не существует, то $\tau = 0$.

ТЕОРЕМА 4. Выражение

$$I_C(M) = \pm \frac{\prod^{(f)} \det \zeta_{j_2 j_3}}{\prod^{(e)} \det \zeta_{i_1 i_2} \cdot \prod^{(t)} \det \zeta_{k_3 k_4}} \cdot \tau, \quad (27)$$

где произведения определяются точно так же, как в (25), взятое для заданного подмножества S компонент граничных $d\varphi$, как это объяснялось после формулы (5), представляет собой инвариант многообразия M с триангулированным однокомпонентным краем ∂M .

⁸⁾Случай довольно частый, когда речь идет о кручениях, см. раздел 6.

Другими словами, величина $I_C(M)$ не изменяется при движениях $2 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 4$ в многообразии M , не затрагивающих фиксированную триангуляцию границы ∂M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Движение $2 \leftrightarrow 3$ изменяет только $\min f_3$ в выражении (26). Множитель, на который умножается $\min f_3$, определяется по существу так же, как в доказательстве теоремы 3; дополнительные тетраэдры (по отношению к случаю, когда имеется всего два тетраэдра в левой части и три тетраэдра в правой части) не влияют на этот множитель.

Что касается движения $1 \rightarrow 4$, его можно рассматривать как композицию движений $0 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$, где $0 \rightarrow 2$ означает, что мы выбираем внутреннюю двумерную грань, пусть это будет грань 123, и приклеиваем на ее место два противоположно ориентированных тетраэдра, скажем 1234, таким образом, что они оказываются приклеенными друг к другу по одноименным граням 124, 134 и 234. Таким образом, старая грань 123 заменяется на “треугольную подушку” с новой вершиной 4 внутри.

Итак, мы рассматриваем движение $0 \rightarrow 2$. Одна из возможностей изменения миноров в выражении (26) при этом движении состоит в том, чтобы:

а) расширить $\min f_2$ за счет блочной строки, соответствующей $d\varphi_{124}$, и блочного столбца, соответствующего dz_4 ;

б) расширить $\min f_3$ за счет блочных строк, соответствующих $d\psi_{1,1234}^{(1)}$, $d\psi_{2,1234}^{(1)}$ и $d\psi_{1,1234}^{(2)}$, где индекс “(1)” обозначает один тетраэдр, а “(2)” – другой, и блочных столбцов, соответствующих $d\varphi_{134}$, $d\varphi_{234}$ и одному из двух $d\varphi_{123}$;

в) расширить $\min f_4$ за счет блочной строки, соответствующей $d\chi_4$, и блочного столбца, соответствующего $d\psi_{2,1234}^{(2)}$.

Стандартные рассуждения, использующие блочную треугольность, показывают, что три упомянутых минора при этом умножаются на

$$\frac{\mathcal{D}\varphi_{124}}{\mathcal{D}z_4}, \quad \frac{\mathcal{D}\psi_{1,1234}^{(1)} \wedge \mathcal{D}\psi_{2,1234}^{(1)} \wedge \mathcal{D}\psi_{1,1234}^{(2)}}{\mathcal{D}\varphi_{134} \wedge \mathcal{D}\varphi_{234} \wedge \mathcal{D}\varphi_{123}}, \quad \frac{\mathcal{D}\chi_4}{\mathcal{D}\psi_{2,1234}^{(2)}},$$

где $\mathcal{D}$ обозначает внешнее произведение дифференциалов n компонент соответствующей переменной. Первая из этих величин вычисляется с использованием соотношения (9), вторая – с использованием (21), а последняя – с использованием (11), а также (8). В результате получаем, что τ умножается (с точностью до знака) на $\det \zeta_{14} \det \zeta_{34} / \det \zeta_{23}$. Можно видеть, что удивительным образом это согласуется с тем, как изменяются произведения в формуле (27). Теорема доказана.

Конечно, в случае отсутствия внутренних вершин инварианты (27) являются не чем иным, как коэффициентами при произведениях антикоммутирующих переменных в (25). Таким образом, мы доказали, что эти коэффициенты являются топологическими инвариантами, при условии существования триангуляции без внутренних точек (и, конечно, без ребер, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине).

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы впервые построили решение уравнения пентагона с антикоммутирующими переменными, существенным образом включающее некоммутативное матричное умножение; это можно видеть из формулы (21), из которой вес тетраэдра строится согласно (17). В разделе 6 на примере самых простых алгебраических комплексов мы также показали, как полученные инварианты связаны с кручением ациклических комплексов. Это также демонстрирует хорошее поведение наших инвариантов при движениях Пахнера $1 \leftrightarrow 4$ (в то время как уравнение пентагона относится только к движениям $2 \leftrightarrow 3$).

Мы планируем написать работу, в которой будут содержаться интересные вычисления, в особенности для скрученных комплексов (таких, как в работах [9], [10], но для многообразий с краем), а также другие материалы, такие как обобщение комплекса (5) на случай края с любым числом компонент. Более того, оказывается, что комплекс (5) допускает прямое обобщение на случай четырехмерных многообразий, что представляет собой тему для отдельного исследования.

Существование инвариантов типа (27), содержащих множитель, мультипликативный по некоторым величинам, относящимся к симплексам триангуляции, умноженный на кручение типа кручения Райдемайстера, всякий раз воспринимается как чудо. Дело в том, что мы сначала строим комплекс, подобный (5) (уже руководствуясь довольно неформальными соображениями), причем комплекс (5) относится к фиксированной триангуляции многообразия M . Однако всякий раз оказывается, что кручение такого комплекса красиво ведет себя при всех типах движений Пахнера, изменяющих триангуляцию.

В заключение заметим, что переход от “наивного” инварианта – суммы по состояниям типа (4) или (25), во многих случаях обращающейся в нуль, – к инвариантам, включающим кручение, можно рассматривать как разновидность процедуры перенормировки. Такая процедура вводит новые переменные dz_i и $d\chi_i$, а в физике такие переменные могут соответствовать новым физическим сущностям. Это поднимает интересный вопрос о возможных связях между ациклическими комплексами и перенормировкой.

Благодарности. И. Г. Корепанов благодарит И. Я. Арефьеву и всех организаторов Второй международной конференции “Струнная теория поля и смежные вопросы” (Москва, 2009 г.) за предоставленную возможность сделать доклад, а также за гостеприимство. Идею использования формул, подобных (14)–(16), предложил И. Г. Корепанову Р. М. Кашаев. Мы благодарим его за это предложение. Работа И. Г. Корепанова была частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00081_а).

Список литературы

- [1] U. Pachner, *European. J. Combin.*, **12**:2 (1991), 129–145.
- [2] W. B. R. Lickorish, “Simplicial moves on complexes and manifolds”, *Proceedings of the Kirbyfest*, *Geom. Topol. Monogr.*, **2**, eds. J. Hass, M. Scharlemann, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 1999, 299–320.
- [3] E. Moise, *Ann. Math.* (2), **56**:1 (1952), 96–114.
- [4] S. I. Bel'kov, I. G. Korepanov, E. V. Martyshev, *A simple topological quantum field theory for manifolds with triangulated boundary*, [arXiv: 0907.3787](https://arxiv.org/abs/0907.3787).

- [5] I. G. Корепапов, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 196–210.
- [6] И. Г. Корепапов, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 98–114.
- [7] И. Г. Корепапов, *ТМФ*, **158**:3 (2009), 405–418.
- [8] Е. В. Мартюшев, *Частное сообщение*, 2008.
- [9] Е. В. Мартюшев, *Изв. Челябинск. научн. центра*, 2003, № 2(19), 1–5.
- [10] Е. В. Мартюшев, *Изв. Челябинск. научн. центра*, 2004, № 4(26), 1–5.
- [11] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, Изд. МГУ, М., 1983.
- [12] В. Г. Тураев, *Введение в комбинаторные кручения*, МЦНМО, М., 2004.