Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Э. Степанова, А. В. Щепетилов, Задача двух тел на пространствах постоянной кривизны. II. Спектральные свойства гамильтониана, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 481–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 03:11:49

© 2000 г. И. Э. Степанова*, А. В. Щепетиллов†

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ НА ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ. II. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТониАНА

Рассмотрена задача двух тел с центральным взаимодействием на односвязных пространствах постоянной кривизны произвольной размерности. Найденное в части I нашей работы явное выражение квантового гамильтониана через радиальный дифференциальный оператор и генераторы групп изометрий конфигурационного пространства использовано для построения его самосопряженного расширения. В случае пространства S^3 для ряда потенциалов получены некоторые точные спектральные серии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является непосредственным продолжением работы [1]. Не повторяя результаты последней, мы используем прямые ссылки вида (I.n) на формулу (n) работы [1].

Для интегрируемости двухчастичной задачи с центральным потенциалом взаимодействия на пространствах постоянной кривизны недостаточно ее априори существующих симметрий. В настоящее время для нее неизвестны какие-либо скрытые симметрии. В работах [2, 3] найдены потенциалы на пространствах S^n и H^n , для которых одночастичный гамильтониан допускает разделение переменных более чем в одной системе координат. Однако для двухчастичной задачи с центральным взаимодействием неизвестны потенциалы, допускающие разделение переменных хотя бы в одной системе координат. В работе [4] гамильтониан двухчастичной задачи при $n = 2$ был выражен через радиальный дифференциальный оператор и генераторы групп изометрий. С помощью теории представлений для групп $SO(3)$ и $SO(1, 2)$ задача на собственные значения гамильтониана была сведена к последовательности систем (конечных в случае пространства S^2) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, нумеруемых неприводимыми представлениями данных групп. При равенстве масс частиц в пространстве S^2 возможно дальнейшее упрощение задачи, так как из указанной последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений выделяются восемь отдельных уравнений, из которых для некоторых потенциалов взаимодействия можно

*Объединенный институт физики Земли РАН, Москва, Россия

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: alexey@quant.phys.msu.ru

получить явные формулы для спектральных серий. В работе [1] классическая и квантовая задачи были рассмотрены совместно и, в частности, получены выражения для квантовых гамильтонианов через радиальный дифференциальный оператор и генераторы групп изометрий $SO(n+1)$, $SO(1, n)$ для произвольных n . В настоящей работе мы используем полученные в [1] выражения при доказательстве самосопряженности двухчастичных гамильтонианов, для случая пространства $\mathbb{S}^3$ выделяем все отдельные дифференциальные уравнения на спектральные значения и для ряда потенциалов взаимодействия получаем явный вид спектральных серий, соответствующих этим дифференциальным уравнениям. Тем самым, хотя двухчастичная задача на пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$, по-видимому, не является интегрируемой в каком-либо смысле, некоторые ее спектральные значения могут быть получены явно. Такая ситуация характеризует квазиточнорешаемые модели [5]. Однако имеется два существенных отличия. Во-первых, обычно квазиточнорешаемые модели являются искусственно построенными. Во-вторых, точные спектральные значения, как правило, выделяются из одного дифференциального уравнения со специально подобранным потенциалом, а в данной задаче мы выделяем отдельные дифференциальные уравнения из систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ДВУХЧАСТИЧНЫХ ГАМИЛЬТониАнов

В евклидовом пространстве самосопряженность многочастичных гамильтонианов с парным взаимодействием доказывается с помощью галилеевой инвариантности, аналог которой отсутствует для пространств $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ [6]. Самосопряженность одночастичных гамильтонианов с сингулярными потенциалами, не ограниченными снизу, эффективнее всего устанавливается при помощи теории возмущений соответствующих им квадратичных форм. Ключевым моментом доказательства для конкретных гамильтонианов является оценка, названная в [6] “принципом неопределенности”, следующего вида:

$$(U\psi, \psi) \leq \|\nabla\psi\|^2,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, ∇ – оператор градиента, а U – потенциал. Получение и использование подобной оценки в пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ потребует, как будет показано ниже, некоторых модификаций доказательства. Мы не будем стремиться к максимальной общности, имея в виду, прежде всего, физически осмысленные потенциалы.

Операторы Лапласа–Бельтрами на пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ самосопряжены на областях

$$\begin{aligned} D_s(\Delta) &= \{\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^n) \mid \Delta\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{S}^n)\}, \\ D_h(\Delta) &= \{\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}^n) \mid \Delta\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^n)\} \end{aligned}$$

и самосопряжены в существенном на подпространствах этих пространств, состоящих из гладких функций с компактным носителем. Отсюда следует самосопряженность свободных двухчастичных гамильтонианов на соответствующих тензорных произведениях

данных функциональных пространств. Опираясь на этот факт, по теории возмущений квадратичных форм мы получим самосопряженность двухчастичных гамильтонианов с взаимодействием.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение на слоях кокасательного расслоения Q_s , отвечающее метрике $\tilde{g}_s$, $\|\cdot\|$ – соответствующая норма, ∇ – соответствующий оператор градиента, а $f, \psi \in C^\infty(Q_s)$ – вещественные функции¹⁾, причем f постоянна на слоях F_r^s , т.е. $f = f(r)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi\|^2 &= \left\| \frac{\nabla(f\psi)}{f} - \frac{\psi\nabla f}{f} \right\|^2 \geq \frac{\psi^2 \|\nabla f\|^2}{f^2} - \frac{2\psi(\nabla f, \nabla(f\psi))}{f^2} = \\ &= \frac{\psi^2 \tilde{g}_s^{rr}}{f^2} (f')^2 - \frac{2\psi}{f^2} \tilde{g}_s^{rr} f' \frac{\partial}{\partial r} (f\psi). \end{aligned}$$

Из (I.12) вытекает, что $\tilde{g}^{rr} = (1 + r^2)^2 / (8R^2 m)$. Интегрируя по Q_s с мерой $d\mu_s$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} \|\nabla\psi\|^2 d\mu_s &\geq \frac{1}{8R^2 m} \int_{Q_s} \left[\frac{(f')^2 \psi^2}{f^2} - \frac{2\psi f'}{f^2} \frac{\partial}{\partial r} (f\psi) \right] (1 + r^2)^2 d\mu_s = \\ &= \frac{1}{8R^2 m} \int_{Q_s} \frac{(f')^2 \psi^2}{f^2} (1 + r^2)^2 d\mu_s - \\ &\quad - \frac{1}{4R^2 m} \int_{F_r^s} \int_0^\infty \frac{\psi f' r^{n-1}}{f^2 (1 + r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} (f\psi) dr d\mu_f. \end{aligned} \quad (1)$$

Попробуем подобрать функцию f так, чтобы для любых ψ функция

$$\frac{\psi f' r^{n-1}}{f^2 (1 + r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} (f\psi)$$

имела вид $(\partial/\partial r)(\phi(r)\psi^2)$. При этом возможно тождественное обращение последнего интеграла в нуль. Решая систему уравнений

$$\frac{(f')^2 r^{n-1}}{f^2 (1 + r^2)^{n-2}} = \phi', \quad \frac{f' r^{n-1}}{f (1 + r^2)^{n-2}} = 2\phi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \left[4 \int \frac{(1 + r^2)^{n-2}}{r^{n-1}} dr \right]^{-1}, \\ \phi(r) &\sim \begin{cases} \frac{(n-2)r^{n-2}}{4}, & n \geq 3, \\ (4|\ln r|)^{-1}, & n = 2, \\ -\frac{(n-2)r^{2-n}}{4}, & n \geq 3, \\ -(4|\ln r|)^{-1}, & n = 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} r \rightarrow 0, \\ \\ r \rightarrow \infty, \end{matrix} \\ \left(\frac{f'}{f} \right)^2(r) &\sim \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4r^2}, & n \geq 3, \\ (4r^2 \ln^2 r)^{-1}, & n = 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} r \rightarrow 0, \\ r \rightarrow \infty. \end{matrix} \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾Все функциональные пространства предполагаются состоящими из комплекснозначных функций.

Нетрудно убедиться, что при любом выборе постоянной интегрирования для функции $\phi(r)$ она терпит разрыв в некоторой точке, чего не происходит, например, в евклидовом случае при $n \geq 3$. Пусть $\omega_\delta := \{x \in Q_s \mid r(x) < \delta\}$, а $\omega'_\delta := \{x \in Q_s \mid r(x) > \delta^{-1}\}$. Выберем $\delta > 0$ так, что функция $\phi(r)$ непрерывна на множестве $(\omega_{2\delta} \cup \omega'_{2\delta}) \setminus (F_0^s \cup F_\infty^s)$. На пространстве $Q_s \setminus (F_0^s \cup F_\infty^s)$ функция f'/f непрерывна там же, где и функция $\phi(r)$, и, как и $\phi(r)$, не обращается в нуль при $r \neq 0, \infty$. Положим

$$u_n(r) = \begin{cases} r^{-2} + r^2, & n \geq 3, \\ \frac{r^{-2} + r^2}{\ln^2 r}, & n = 2, \end{cases}$$

и выберем постоянную $\kappa > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\kappa u_n(r) \leq \frac{(1 + r^2)^2 (f')^2}{8R^2 m f^2}.$$

Тогда из (1) и (2) получаем для функции $\psi \in C^\infty(Q_s)$, $\text{supp } \psi \subset \omega_\delta \cup \omega'_\delta$,

$$\kappa \int_{Q_s} u_n(r) |\psi|^2 d\mu_s \leq \int_{Q_s} \|\nabla \psi\|^2 d\mu_s. \quad (3)$$

Записывая неравенство (3) отдельно для вещественной и мнимой частей комплекснозначной функции, мы приходим к справедливости оценки (3) для произвольной функции $\psi \in C^\infty(Q_s)$ с носителем в $\omega_\delta \cup \omega'_\delta$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть гладкая на пространстве $Q_s \setminus (F_0^s \cup F_\infty^s)$ вещественная функция $U = o(u_n(r))$ при $r \rightarrow 0, \infty$ равномерно по координатам на слоях F_r^s . Тогда двухчастичный гамильтониан $\hat{H}_s$ самосопряжен в существенном на любой существенной области самосопряженности свободного гамильтониана $\hat{H}_0^s$. В частности, $C^\infty(Q_s)$ есть область самосопряженности в существенном для $\hat{H}_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой X.17 книги [6] достаточно доказать, что $\forall \psi \in C^\infty(Q_s)$ справедливо неравенство

$$\int_{Q_s} |U| |\psi|^2 d\mu_s \leq a \int_{Q_s} \bar{\psi} \hat{H}_0^s \psi d\mu_s + b \int_{Q_s} |\psi|^2 d\mu_s,$$

где $0 < a < 1$, $b \in \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольное $a \in (0, 1)$. Выберем функции $\chi \in C^\infty(Q_s)$ так, чтобы $\text{supp } \chi \subset \omega_\delta \cup \omega'_\delta$, $\chi|_{\omega_{\delta/2} \cup \omega'_{\delta/2}} \equiv 1$, $0 \leq \chi \leq 1$. Пусть теперь $0 < \varepsilon \leq \delta/2$, причем $|U(x)| \leq \kappa u_n(r(x))/2$, $x \in \omega_\varepsilon \cup \omega'_\varepsilon$. Пусть

$$c := \sup_{x \in Q_s \setminus (\omega_\varepsilon \cup \omega'_\varepsilon)} |U(x)|,$$

а $\psi \in C^\infty(Q_s)$. Тогда

$$\int_{Q_s} |U| |\psi|^2 d\mu_s \leq \frac{a}{2} \kappa \int_{\omega_\varepsilon \cup \omega'_\varepsilon} u_n(x) |\chi \psi|^2 d\mu_s + c \int_{Q_s} |\psi|^2 d\mu_s.$$

К первому интегралу можно применить оценку (3), что дает

$$\kappa \int_{\omega_\varepsilon \cup \omega'_\varepsilon} u_n(x) |\chi\psi|^2 d\mu_s \leq \int_{Q_s} \|\nabla(\chi\psi)\|^2 d\mu_s \leq 2 \int_{Q_s} (|\nabla\psi|^2 + |\nabla\chi|^2 |\psi|^2) d\mu_s,$$

откуда получаем

$$\int_{Q_s} |U| |\psi|^2 d\mu_s \leq a \int_{Q_s} \|\nabla\psi\|^2 d\mu_s + b \int_{Q_s} |\psi|^2 d\mu_s = a \int_{Q_s} \bar{\psi} \hat{H}_0^s \psi d\mu_s + b \int_{Q_s} |\psi|^2 d\mu_s,$$

где $b = c + 2 \sup_{Q_s} (|\nabla\chi|^2)$.

Для пространства $\mathbb{H}^n$ справедлив аналогичный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть гладкая на $Q_h \setminus F_0^h$ и ограниченная на любом множестве вида $W \subset \subset Q_h \setminus F_0^h$ вещественная функция $U = o(r^{-2})$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по координатам на слоях F_r^h . Тогда двухчастичный гамильтониан $\hat{H}_h$ самосопряжен в существенном на любой существенной области самосопряженности свободного гамильтониана $\hat{H}_0^h$. В частности, $C^\infty(Q_h)$ есть область самосопряженности в существенном для $\hat{H}_h$.

3. СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\hat{H}_s$

Разложив пространство $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), K, d\eta_s)$ в прямую сумму пространств конечномерных неприводимых представлений T_m группы $\mathrm{SO}(n+1)$ (как это было сделано в работе [4]), мы получим выражение для ограничения оператора $\hat{H}_s$ на $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \otimes T_m$ в виде матричного обыкновенного дифференциального оператора.

В этой связи необходимо определить, какие неприводимые представления группы $\mathrm{SO}(n+1)$ содержатся в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), K, d\eta_s)$. Известно (см., например, [7]), что все неприводимые представления компактной группы Γ содержатся в ее регулярном представлении в пространстве $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\eta)$. Задача о характеристизации тех неприводимых представлений группы $\mathrm{SO}(n)$, которые содержатся в ее представлении в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-m))$, была решена в работах [8]. Каждое неприводимое представление группы $\mathrm{SO}(n)$ однозначно характеризуется своим старшим весом [9]: $m = (m_1, m_2, \dots, m_k)$, где $k = n/2$ для четных n и $k = (n-1)/2$ для нечетных n . Как было показано в работах [8], в пространство $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-m))$ входят только те неприводимые представления группы $\mathrm{SO}(n)$, для которых лишь первые m компонент старшего веса могут быть отличны от нуля. Таким образом, в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), K, d\eta_s)$ содержатся все неприводимые представления группы $\mathrm{SO}(n+1)$ при $n = 2, 3, 4$.

В работе [10] получены явные (и весьма громоздкие) выражения для действия инфинитезимальных генераторов группы $\mathrm{SO}(n)$ на базисные элементы ее неприводимого представления, характеризующиеся схемами Гельфанда–Цетлина.

Таким образом, матричный обыкновенный дифференциальный оператор, соответствующий ограничению $\hat{H}_s$ на $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \otimes T_m$, может быть вычислен явно. Интересно найти такие одномерные подпространства T'_m пространств T_m , что пространства

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \otimes T'_m$ инвариантны относительно оператора $\widehat{H}_s$, так как в этом случае можно выделить отдельные уравнения на собственные значения двухчастичного гамильтониана на пространстве $\mathbb{S}^n$, которые для некоторых потенциалов $U(r)$ могут быть явно решены. Из формул (I.11) и (I.13) видно, что при $m_1 \neq m_2$ для этого необходимо и достаточно найти общие собственные функции из пространства T_m для операторов

$$D_1 = (Y_1^{s,l})^2, \quad D_2 = \sum_{i=2}^n (X_{1i}^{s,l})^2, \quad D_3 = \sum_{i=2}^n (Y_i^{s,l})^2, \quad D_4 = \sum_{i=2}^n \{X_{1i}^{s,l}, Y_i^{s,l}\},$$

а при $m_1 = m_2$ в силу условия $B_s(r) \equiv 0$ – общие собственные функции операторов D_1, D_2 и D_3 .

Ввиду отсутствия метода нахождения общих собственных векторов некоммутирующих операторов, отличного от явных вычислений, мы ограничимся рассмотрением практически важного случая сферы $\mathbb{S}^3$. Напомним, что случай сферы $\mathbb{S}^2$ был рассмотрен в работе [4].

Вследствие изоморфизмов $\mathrm{SO}(4) \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) / \{\pm(1 \otimes 1)\}$, $\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SU}(2) / \{\pm 1\}$ неприводимые представления группы $\mathrm{SO}(4)$ являются тензорными произведениями представлений группы $\mathrm{SU}(2)$, отвечающих одновременно целым или полуцелым значениям веса.

Базис алгебры $\mathfrak{so}(4)$, состоящий из элементов $L_1, L_2, L_3, G_1, G_2, G_3$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(X_{23}^s + Y_1^s), & L_2 &= \frac{1}{2}(X_{31}^s + Y_2^s), & L_3 &= \frac{1}{2}(X_{12}^s + Y_3^s), \\ G_1 &= \frac{1}{2}(X_{23}^s - Y_1^s), & G_2 &= \frac{1}{2}(X_{31}^s - Y_2^s), & G_3 &= \frac{1}{2}(X_{12}^s - Y_3^s), \end{aligned}$$

соответствует разложению $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$. При этом имеют место коммутационные соотношения

$$[L_m, L_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{mjk} L_k, \quad [G_m, G_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{mjk} G_k, \quad [L_m, G_j] = 0, \quad m, j = 1, 2, 3,$$

где ε_{mjk} – полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$. Неприводимые представления группы $\mathrm{SO}(4)$ нумеруются тем самым двумя одновременно целыми или полуцелыми неотрицательными числами l_1 и l_2 , и в пространстве неприводимого представления можно выбрать базис, элементы которого $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ нумеруются числами n_1 и n_2 , целыми или полуцелыми одновременно с l_1 и l_2 , причем $-l_j \leq n_j \leq l_j$, $j = 1, 2$, и выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L_1|n_1\rangle &= -in_1|n_1\rangle, & G_1|n_2\rangle &= -in_2|n_2\rangle, \\ H_+|n_1\rangle &= -\sqrt{(l_1 - n_1)(l_1 + n_1 + 1)}|n_1 + 1\rangle, \\ H_-|n_1\rangle &= -\sqrt{(l_1 + n_1)(l_1 - n_1 + 1)}|n_1 - 1\rangle, \\ P_+|n_2\rangle &= -\sqrt{(l_2 - n_2)(l_2 + n_2 + 1)}|n_2 + 1\rangle, \\ P_-|n_2\rangle &= -\sqrt{(l_2 + n_2)(l_2 - n_2 + 1)}|n_2 - 1\rangle, \end{aligned}$$

где $H_{\pm} := iL_2 \pm L_3$, $P_{\pm} := iG_2 \pm G_3$. Операторы D_m , $m = 1, 2, 3$, имеют вид

$$\begin{aligned} D_1 &= L_1^2 + G_1^2 - 2L_1G_1, & D_2 &= F_1 + F_2 - L_1^2 - G_1^2 + 2L_2G_2 + 2L_3G_3, \\ D_3 &= F_1 + F_2 - L_1^2 - G_1^2 - 2L_2G_2 - 2L_3G_3, & D_4 &= 4(L_2G_3 - L_3G_2), \end{aligned}$$

где $F_1 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, $F_2 := G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$ – операторы Казимира алгебры $\mathfrak{so}(3)$, ограничения которых на неприводимые представления являются скалярными операторами $-l_1(l_1 + 1)$ и $-l_2(l_2 + 1)$, соответственно. Следовательно, общие собственные векторы операторов D_1 , D_2 и D_3 должны быть собственными векторами операторов $L_1^2 + G_1^2$, L_1G_1 , $L_2G_2 + L_3G_3$. Прямые, но громоздкие вычисления приводят к следующим пяти частично перекрывающимся сериям общих собственных векторов операторов D_1 , D_2 и D_3 :

- 1) $l_1 = l_2 =: l \geq 1$; $|l - 2, l| - |l, l - 2|$, $|-l + 2, -l| - |-l, -l + 2|$;
- 2) $l_2 \geq l_1 = 1$ или $l_1 \geq l_2 = 1$; $|1, -1| - |-1, 1|$;
- 3) $l_1 = l_2 =: l \geq 1/2$; $|l - 1, l| \pm |l, l - 1|$, $|-l + 1, -l| \pm |-l, -l + 1|$;
- 4) $l_2 \geq l_1 = 1/2$ или $l_1 \geq l_2 = 1/2$; $|1/2, -1/2| \pm |-1/2, 1/2|$;
- 5) $|l_1, l_2|$; $|-l_1, -l_2|$.

Только пятая серия состоит из собственных векторов оператора D_4 . Разыскивая собственную функцию оператора $\hat{H}_s$ в виде $\psi(r)\tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ – один из векторов серий 1–5, мы получаем следующие уравнения на функцию $\psi(r)$ при $m_1 = m_2 = 2m$ в случаях 1–4 и при произвольных m_1 и m_2 в случае 5:

$$L\psi + \left(\frac{1}{2mR^2} \left((3l - 2) \frac{(1 + r^2)^2}{2r^2} + 1 \right) + U - E \right) \psi = 0, \quad l \geq 1, \quad (4)$$

$$L\psi + \left(\frac{1}{2mR^2} \left((l_2 + 1)l_2 \frac{(1 + r^2)^2}{4r^2} + 1 \right) + U - E \right) \psi = 0, \quad l_2 \geq 1, \quad (5)$$

$$L\psi + \left(\frac{1}{8mR^2} \left((4l - 1) \frac{(1 + r^2)^2}{r^2} + 1 \pm 2l \frac{1 - r^4}{r^2} \right) + U - E \right) \psi = 0, \quad l \geq \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} L\psi + \left(\frac{1}{8mR^2} \left(\left(l_2(l_2 + 1) + \frac{1}{4} \right) \frac{(1 + r^2)^2}{r^2} + 1 \pm \left(l_2 + \frac{1}{2} \right) \frac{1 - r^4}{r^2} \right) \right) \psi + \\ + (U - E)\psi = 0, \quad l_2 \geq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$L\psi + \left(\frac{(l_1 - l_2)^2}{2(m_1 + m_2)R^2} + \frac{(l_1 + l_2)(1 + r^2)^2}{8mR^2r^2} + U - E \right) \psi = 0, \quad l_1, l_2 \geq 0, \quad (8)$$

где

$$L = -\frac{(1 + r^2)^3}{8mR^2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{1 + r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Отметим, что уравнение для радиальной компоненты $\psi(r)$ собственной функции одной частицы имеет вид

$$L\psi + \left(\frac{l(l + 1)}{8mR^2} (r^{-2} + 2 + r^2) + U - E \right) \psi = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Таким образом, энергетические уровни вычисляются точно из уравнений (4), (5), (8) всегда, когда они вычисляются точно для того же потенциала в одночастичном случае.

Как правило, возможность точного вычисления спектра обыкновенного дифференциального оператора обусловлена либо разрешимостью соответствующего уравнения в элементарных функциях, либо его сводимостью к гипергеометрическому уравнению (или его предельным случаям). Гипергеометрическое уравнение является, в свою очередь, частным случаем уравнения Римана, а последнее сводится к первому степенным преобразованием. Уравнение

$$L\psi + (\eta r^{-2} + \nu r^2 - E)\psi = 0, \quad \eta, \nu = \text{const}, \quad (10)$$

является уравнением Римана относительно переменной $\xi = r^2$. При $\eta, \nu > 0$ соответствующий дифференциальный оператор допускает самосопряженное расширение по Фридрихсу [4], а уровни энергии имеют вид

$$E_k = \mu \left[k(k+1) - \frac{5}{8} + (2k+1) \left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{\mu}} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\nu}{\mu}} \right) + 2 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{\mu}} \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\nu}{\mu}} \right], \quad \mu = \frac{1}{2mR^2}. \quad (11)$$

Для потенциала $U = ar^{-2} + br^2$, $a, b \geq 0$, из этой формулы заменой коэффициентов можно получить энергетические уровни для уравнений (4)–(8).

На сфере $\mathbb{S}^n$ известны аналоги кулоновского и осцилляторного потенциалов [11]

$$U_q = \frac{\kappa}{2R} \left(r - \frac{1}{r} \right), \quad U_o = \frac{2\omega^2 R^2 r^2}{(1 - r^2)^2}.$$

Они характеризуются условием замкнутости всех траекторий классического одночастичного движения. Уравнение (9) для этих потенциалов сводится к уравнению Римана относительно переменных $u = (1 - r^2)/r$ и $v = u^2$, соответственно. Однако коэффициенты уравнения (10) рациональны относительно переменных u и v лишь при $\eta = \nu$. Таким образом, указанные замены при $U = U_q$ или $U = U_o$ сводят уравнения (4), (5) и (8) к уравнению Римана и не сводят к нему уравнения (6) и (7).

Теорема 1 дает самосопряженность оператора $\hat{H}_s$ при $U = U_q$ для любых $n \geq 2$, а самосопряженность $\hat{H}_s$ при $U = U_o$ получается расширением по Фридрихсу. Записав энергетические уровни для уравнения (9) при $U = U_q$:

$$E_k = -\frac{1}{2mR^2} + \frac{(k+l)^2}{2mR^2} - \frac{m\kappa^2}{2(k+l)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

и при $U = U_o$:

$$E_k = -\frac{1}{2mR^2} \left(\frac{3}{4} - \left(2k + l + \frac{3}{2} \right)^2 \right) + \frac{\omega(2k + l + \frac{3}{2})}{\sqrt{m}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\omega^2 R^4 m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и сделав замену коэффициентов, можно легко получить энергетические уровни для уравнений (4), (5) и (8).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы показали, что для ряда потенциалов взаимодействия некоторые серии энергетических уровней квантовой задачи двух частиц на сфере $\mathbb{S}^3$ могут быть явно вычислены. Случай равных масс частиц предоставляет для этого больше возможностей.

Такое квазиточнорешаемое поведение данной задачи, по-видимому, связано с наличием некоторого множества замкнутых траекторий для соответствующей классической механической системы. Ясно, что при равных массах нетрудно найти замкнутые траектории в виде “окружностей”, когда частицы все время остаются на одинаковом максимальном расстоянии друг от друга. Связь наличия некоторого множества замкнутых траекторий классической задачи в неинтегрируемом случае со свойствами спектра соответствующей квантовой задачи изучалась в ряде работ для различных ситуаций (см. [12] и приведенную там литературу). Было бы интересно найти такую связь с классической системой в явном виде в рассмотренной задаче, а также обобщить метод нахождения точных спектральных серий на случай произвольной размерности пространства $\mathbb{S}^n$.

Как было отмечено в работе [4], для пространства $\mathbb{H}^2$ оператор двухчастичной квантовой задачи, по-видимому, не имеет дискретного спектра. Вероятно, то же самое справедливо и для пространства $\mathbb{H}^n$.

Список литературы

- [1] *А. В. Шепетилов*. ТМФ. 2000. Т. 124. № 2. С. 249.
- [2] *E. G. Kalnins, W. Miller Jr., G. S. Pogosyan*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 6439; 1997. V. 38. P. 5416.
- [3] *E. G. Kalnins, W. Miller Jr., Ye. M. Hakobyan, G. S. Pogosyan*. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 2291.
- [4] *А. В. Шепетилов*. ТМФ. 1999. Т. 118. С. 248.
- [5] *А. Г. Ушверидзе*. ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 1185; 1992. Т. 23. С. 58.
- [6] *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
- [7] *Н. Я. Виленкин*. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
- [8] *D. A. Levin*. Trans. Am. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 493; *S. S. Gelbart*. Trans. Am. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 29; *R. S. Strichartz*. Canad. J. Math. 1975. V. 27. P. 294.
- [9] *А. Барут, Р. Рончка*. Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980.
- [10] *U. Ottoson*. Commun. Math. Phys. 1968. V. 8. P. 228; 1968. V. 10. P. 114.
- [11] *P. W. Higgs*. J. Phys. A. 1979. V. 12. P. 309.
- [12] *M. C. Gutzwiller*. Chaos in classical and quantum mechanics. New York: Springer, 1992.

Поступила в редакцию 12.XI.1999 г.,
после доработки 3.IV.2000 г.