Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, О комбинаторных разложениях конформных блоков, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 3–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 06:07:26

© 2010 г. А. В. Маршаков^{*†}, А. Д. Миронов^{*†}, А. Ю. Морозов^{*}

О КОМБИНАТОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ КОНФОРМНЫХ БЛОКОВ

Недавно было предложено представление для некрасовских статистических сумм в терминах нетривиальной двумерной конформной теории поля. Для ненулевого значения параметра деформации $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ инстантонная статистическая сумма отождествляется с конформным блоком в теории Лиувилля с центральным зарядом $c = 1 + 6\epsilon^2/\epsilon_1\epsilon_2$. В обратную сторону это наблюдение означает, что универсальная часть конформных блоков, которая единым образом определяется для всех двумерных конформных теорий поля с невырожденными представлениями алгебры Вирасоро, обладает нетривиальным разложением по диаграммам Юнга, которое отличается от естественного разложения в рамках конформной теории. Приведены некоторые детали этого нетривиального нового соответствия для простейшего случая четырехточечных корреляционных функций.

Ключевые слова: конформные теории, теория Виттена–Зайберга, функции Некрасова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Последние достижения в изучении нетривиальных многомерных квантовых теорий поля в сильной степени обусловлены определенными параллелями, по крайней мере в некоторой части, с некоторыми свойствами двумерных (2d) квантовых теорий поля. Известным примером такого соответствия является 2d-представление свободными полями тау-функций, которые возникают как эффективные действия в многомерных квантовых теориях поля. Класс универсальности многомерных квантовых теорий поля, которые могут быть переформулированы в терминах тау-функций двумерных интегрируемых систем, включает в себя чрезвычайно важный подкласс суперсимметричных калибровочных теорий, где эффективные действия описываются препотенциалами Виттена–Зайберга [1]–[3].

Некрасовские статистические суммы [4]–[11], являющиеся обобщением препотенциалов Виттена–Зайберга, изначально возникли из вычисления инстантонных сумм

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mars@itep.ru, mironov@itep.ru, morozov@itep.ru

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: mars@lpi.ru, mironov@lpi.ru

в деформированных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях. В терминах интегрируемых систем они имеют вид, весьма похожий на комбинаторное разложение по характеристам тау-функций [12], квазиклассические аналоги которых возникают при формулировке теории Виттена–Зайберга на языке интегрируемых систем [2], [13], [14]. Нетривиальной чертой некрасовских функций с этой точки зрения является их зависимость от дополнительных параметров ϵ_1, ϵ_2 (часто также вводят $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$). Эти параметры возникают из так называемой Ω -деформации, обеспечивающей инфракрасную регуляризацию интегралов по пространствам модулей инстантонов [15], [16], но до сих пор не имеющей наглядной теоретико-групповой интерпретации. При $\epsilon = 0$ некрасовские статистические суммы могут быть представлены в терминах свободных фермионов или двумерной конформной теории поля (2d-КТП) с центральным зарядом $c = 1$ [6], [7], [17], [18] и частично пересекаются с некоторыми тау-функциями типа Гурвица–Концевича [19], [20], в которых суммы по диаграммам Юнга возникают из комбинаторики накрытий и в конце концов приобретают хорошо знакомую форму групповых характеров. Однако теоретико-групповой смысл деформации к $\epsilon \neq 0$ остается неясным, даже несмотря на то, что уже найдены некоторые формулы, сохраняющие свойства теории с $\epsilon = 0$ в деформированном случае (см. работы [8] с наиболее интересными примерами этого явления), а следы связи с нетривиальными конформными теориями при $c \neq 1$ замечены в достаточно старых работах типа [21].

Таким образом, представляется чрезвычайно важным недавний результат работы [22], в которой подобное соотношение сформулировано в явном виде. Оно проявляет глубокие связи между теорией Виттена–Зайберга, некрасовскими статистическими суммами и 2d-КТП в очень непосредственной, хотя пока и загадочной форме. Утверждение работы [22], которое далее мы будем называть гипотезой Алдея–Гайотто–Тачикавы (АГТ) связывает конформную теорию Лиувилля с центральным зарядом $c = 1 + 6\epsilon^2/\epsilon_1\epsilon_2$ и конкретный набор “колчаных” некрасовских функций для теории с калибровочной группой, состоящей из произведения $U(2)$ -факторов. Диаграммы колчанов при этом ассоциируются с соответствующими (многоточечными) конформными блоками, в то время как калибровочная $SU(2)$ -симметрия некоторым образом соотносится с киральной алгеброй: алгеброй Вирасоро или даже алгеброй $\widehat{SL(2)}$ [23], [24] в теории Лиувилля. Старшие калибровочные группы в данном контексте вероятно имеют отношение к конформным моделям с большим числом полей и расширенной конформной симметрией W -типа [25].

К сожалению, в то время как гипотеза АГТ сформулирована явно и понятно, проверка ее обоснованности не представлена в какой бы то ни было ясной форме. Нам потребовалось некоторое количество усилий, чтобы воспроизвести данное утверждение уже в простейшем случае четырехточечного конформного блока, и мы приводим вычисления в настоящей работе в надежде, что это поможет читателю легче приобщиться к новому и интересному направлению исследований.

Мы начнем с того, что напомним классические результаты работ [26], [27] о конформных блоках в 2d-КТП, а затем перейдем к рассмотрению утверждения АГТ об их связи с некрасовскими статистическими суммами. Точный результат таков:

конформный блок для общего (т. е. невырожденного) модуля Верма, зависящего от пяти произвольных конформных размерностей $\Delta_i = \alpha_i(\epsilon - \alpha_i)/\epsilon_1\epsilon_2$ равен некоторой линейной комбинации некрасовских функций (см. формулу (39)). Это нетривиальным образом обобщает хорошо известное утверждение для случая свободных полей (см. работу [6] и формулу (38) ниже), где размерности связаны двумя линейными соотношениями $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \epsilon$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ в промежуточном канале. Другими словами, переход к α -параметризации размерностей позволяет преобразовать конформные блоки для вирасоровских модулей Верма в деформацию формул разложений по характерам, представляющую собой еще одну реализацию соотношения между алгебрами Вирасоро и алгеброй $\widehat{SL(2)}$.

2. КОНФОРМНЫЙ БЛОК

2.1. Конформный блок из операторного разложения. Основными входными данными 2d-КТП являются состояния, их нормы (определяемые двухточечными функциями) и структурные константы операторной алгебры. Состояния отвечают операторам $V_{\hat{\alpha}}(z)$, нормы возникают в результате диагонализации скалярных произведений

$$\mathcal{K}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \langle \hat{\alpha} | \hat{\beta} \rangle \sim \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_{\hat{\beta}}(\infty) \rangle, \quad (1)$$

а операторные разложения (ОР)¹⁾ определяются следующим образом:

$$V_{\hat{\alpha}}(z) V_{\hat{\beta}}(z') = \sum_{\hat{\gamma}} \frac{\mathcal{C}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} V_{\hat{\gamma}}(z')}{(z - z')^{\Delta_{\hat{\alpha}} + \Delta_{\hat{\beta}} - \Delta_{\hat{\gamma}}}}. \quad (2)$$

Вследствие свободы выбора аргумента операторов $V_{\hat{\gamma}}$ в правой части равенства структурные константы $\mathcal{C}$ на самом деле определены по модулю треугольного преобразования в пространстве операторов $V_{\hat{\gamma}}$ и их производных. Безусловно, как только выбор аргумента зафиксирован, скажем, как в формуле (2), константы $\mathcal{C}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}}$ определены уже однозначно. Преимущество асимметричного выбора формулы (2) будет понятно из уравнения (8) ниже.

В 2d-КТП гильбертово пространство состояний может быть описано в терминах представлений группы конформной симметрии, генерируемых сохраняющимся тензором энергии-импульса $\bar{\partial}T(z) = 0$, т. е. набора модулей Верма над выделенными состояниями (примарными или состояниями старшего веса) [26]. В действительности $\hat{\alpha} = \{\alpha, Y\}$ является мультииндексом, в котором α нумерует примарные состояния, в то время как Y -диаграммы Юнга (или целочисленные разбиения) $Y = \{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_l\}$ нумеруют их потомки, возникающие в результате действия генераторов Вирасоро

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (3)$$

¹⁾В настоящей работе мы сконцентрируемся только на голоморфных (киральных) частях (конформных блоках) корреляционных функций. Физические корреляторы являются билинейными комбинациями конформных блоков и обладают глобальной (модулярной) симметрией.

на примарные состояния $V_\alpha = V_{\alpha, \emptyset}$:

$$V_{\alpha, Y} = L_Y V_\alpha = L_{-k_l} \dots L_{-k_2} L_{-k_1} V_\alpha. \quad (4)$$

Размерность потомка есть $\Delta_{\hat{\alpha}} = \Delta_{\alpha, Y} = \Delta_\alpha + |Y|$, где $|Y| = k_1 + k_2 + \dots + k_l$ является размером, или числом ячеек диаграммы Юнга. Генераторы L_n уничтожают примарные состояния, $L_n V_\alpha = 0$ при $n > 0$, и поэтому не появляются в формуле (4). Аналогично, $L_0 V_\alpha = \Delta_\alpha V_\alpha$ и $L_{-1} V_\alpha = \partial V_\alpha$. Любая комбинация генераторов алгебры Вирасоро может быть приведена к упорядоченному виду (4) с помощью коммутационных соотношений

$$[L_m, L_n] = \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{m+n, 0} + (m - n) L_{m+n},$$

где c обозначает центральный заряд теории.

Вирасоровская симметрия приводит к тому, что все нормы и структурные константы однозначно определяются соответствующими объектами только для примарных состояний:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} &= \mathcal{K}_{\alpha, Y; \alpha', Y'} = K_\alpha \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{|Y|, |Y'|} Q_\Delta(Y, Y'), \\ \mathcal{C}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}^{\alpha''} &= \mathcal{C}_{\alpha\alpha'}^{\alpha''}(Y, Y'; Y'') = C_{\alpha\alpha'}^{\alpha''} \beta_{\Delta, \Delta'}^{\alpha''}(Y, Y'; Y''), \end{aligned} \quad (5)$$

где Q и β являются составляющими из теории представлений алгебры Вирасоро, не зависящими вовсе от свойств конкретной конформной модели, информация о которой закодирована только в K и C . Функции Q и β зависят только от размерностей и центрального заряда модели и являются важными специальными функциями КТП.

Практическое вычисление Q и β представляет собой ясно определенную, но технически сложную задачу. По определению $Q_\Delta(Y, Y')$ является парным коррелятором двух потомков²⁾:

$$Q_\Delta(Y, Y') = \langle \Delta | L_Y L_{-Y'} | \Delta \rangle \sim \langle L_{-Y} V_\Delta(0) L_{-Y'} V_\Delta(\infty) \rangle. \quad (6)$$

Что касается β , простейший способ найти эту функцию – это выразить ее через γ , являющуюся аналогом β для трехточечной функции³⁾

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta, \Delta'; \Delta''}(Y, Y'; Y'') &= \sum_{\tilde{Y}} \beta_{\Delta, \Delta'}^{\Delta''}(Y, Y'; \tilde{Y}) Q_{\Delta''}(\tilde{Y}, Y'') = \\ &= \langle L_{-Y} V_\Delta(0) L_{-Y'} V_{\Delta'}(1) L_{-Y''} V_{\Delta''}(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

²⁾ При стремлении аргумента Λ в $V_\Delta(\Lambda)$ к бесконечности этот коррелятор ведет себя, как $\Lambda^{-2\Delta-2|Y'|}$. Чтобы сделать коррелятор хорошо определенным, следует умножить обе части равенства (6) на $\Lambda^{2\Delta+2|Y'|}$ и лишь потом переходить к указанному пределу. Аналогичным образом мы можем определить и другие корреляционные функции, содержащие $V_\Delta(\infty)$, просто аккуратно подобрав корректирующий множитель в каждом случае.

³⁾ Отметим, что из-за асимметрии в определениях (2) и (7) β и γ не симметричны даже по Y и Y' (так как положения трех точек в этих корреляторах выбраны специальным образом). Эта асимметрия, однако, удобна на следующем шаге и упрощает формулы для корреляторов и конформных блоков.

Более того, в дальнейшем для конкретных вычислений нам понадобятся только частные случаи $\beta_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta(Y) = \beta_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta(\emptyset, \emptyset; Y)$ и

$$\gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}(Y) = \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}(\emptyset, \emptyset; Y) = \sum_{\tilde{Y}} \beta_{\Delta, \Delta'}^\Delta(\tilde{Y}) Q_\Delta(\tilde{Y}, Y).$$

С учетом (2) четырехточечные функции могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & \langle V_{\hat{\alpha}_1}(z_1) V_{\hat{\alpha}_2}(z_2) V_{\hat{\alpha}_3}(z_3) V_{\hat{\alpha}_4}(z_4) \rangle = \\ & = \sum_{\hat{\alpha}_{12}, \hat{\alpha}_{34}} \frac{C_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_{(12)}} C_{\hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_4}^{\hat{\alpha}_{(34)}}}{(z_1 - z_2)^{\Delta_{\hat{\alpha}_1} + \Delta_{\hat{\alpha}_2} - \Delta_{\hat{\alpha}_{12}}} (z_3 - z_4)^{\Delta_{\hat{\alpha}_3} + \Delta_{\hat{\alpha}_4} - \Delta_{\hat{\alpha}_{34}}}} \langle V_{\hat{\alpha}_{(12)}}(z_2) V_{\hat{\alpha}_{(34)}}(z_4) \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Если теперь положить $z_2 = \infty$ и $z_4 = 0$, то двухточечные функции в правой части равенства превращаются в скалярные произведения (6), и это оправдывает асимметричный выбор в (2). Остается положить $z_1 = 0$, $z_3 = x$, выбрать примарные поля для всех четырех операторов, т. е. положить $\hat{\alpha}_i = \{\alpha_i, \emptyset\}$ для $i = 1, 2, 3, 4$, и использовать формулы факторизации (5). Наконец, зафиксировав вклад конкретного промежуточного канала $\alpha_{12} = \alpha_{34} = \alpha$ в сумме в правой части выражения (8), мы приходим к определению *четырёхточечного конформного блока*:

$$\mathcal{F}_\Delta(\Delta_1, \Delta_2; \Delta_3, \Delta_4 | x) \equiv x^\sigma (C_{\alpha_1, \alpha_2}^\alpha \mathcal{K}_\alpha C_{\alpha_3, \alpha_4}^\alpha) \mathcal{B}_\Delta(\Delta_1, \Delta_2; \Delta_3, \Delta_4 | x), \quad (9)$$

где σ представляет собой простую линейную комбинацию размерностей, которая несущественна для целей нашей работы, а $\mathcal{B}$ является чисто теоретико-групповым объектом:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Delta(\Delta_1, \Delta_2; \Delta_3, \Delta_4 | x) &= \sum_{|Y|=|Y'|} x^{|Y|} \mathcal{B}_{Y, Y'} = \\ &= \sum_{|Y|=|Y'|} x^{|Y|} \beta_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta(Y) Q_\Delta(Y, Y') \beta_{\Delta_3, \Delta_4}^\Delta(Y') = \\ &= \sum_{|Y|=|Y'|} x^{|Y|} \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}(Y) Q_\Delta^{-1}(Y, Y') \gamma_{\Delta_3, \Delta_4; \Delta}(Y'). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что даже при фиксированном промежуточном канале сохраняется сумма по вирасоровским потомкам $V_{\hat{\alpha}}$ примарного поля V_α , более того, эти потомки могут различаться в $\hat{\alpha}_{(12)} = \{\hat{\alpha}, Y\}$ и $\hat{\alpha}_{(34)} = \{\hat{\alpha}, Y'\}$, поэтому формула (10) представляет собой на самом деле двойную сумму по диаграммам Юнга. Подчеркнем еще раз, что β и γ являются асимметричными функциями всех трех размерностей как своих аргументов.

Аналогичным образом можно определить и многоточечные конформные блоки. Для этого следует знать более общий чем $\gamma(Y)$ объект из теории алгебр Вирасоро, а именно $\gamma(Y_1, Y_2, \emptyset)$, который зависит от двух разных диаграмм Юнга. Две диаграммы сводятся к одной для четырехточечных функций. Рассмотрение общих конформных блоков выходит за рамки настоящей статьи (хотя следует заметить, что гипотеза АГТ сформулирована в максимальной общности и включает многоточечные конформные блоки).

В большом числе задач в КТП рассматриваются модули Верма с нуль-векторами, и тогда соответствующие представления алгебры Вирасоро на самом деле являются факторами этих модулей; при этом формулы типа (10) содержат суммы только по этим факторам, в которых возникают модифицированные объекты вместо K и β . Как и в работе [22], мы будем рассматривать здесь только общий случай невырожденных модулей Верма.

2.2. Четырехточечный конформный блок для произвольного модуля Верма. Чтобы вычислить $\mathcal{B}$ в формуле (10), достаточно знать лишь два ингредиента: тройную вершину γ и форму Шаповалова Q для алгебры Вирасоро. Некоторые простые формулы для $Q_\Delta(Y, Y') = Q_\Delta([k_1 k_2 \dots], [k'_1 k'_2 \dots])$ (мы использовали сокращенные обозначения для аргументов) можно найти в следующей таблице.

$Y \backslash Y'$	$\emptyset$	[1]	[2]	[11]	[3]	[21]	[111]
$\emptyset$	1						
[1]		2Δ					
[2]			$(8\Delta + c)/2$	6Δ			
[11]			6Δ	$4\Delta(1 + 2\Delta)$			
[3]					$6\Delta + 2c$	$2(8\Delta + c)$	24Δ
[21]					$2(8\Delta + c)$	$8\Delta^2 + (34 + c)\Delta + 2c$	$36\Delta(\Delta + 1)$
[111]					24Δ	$36\Delta(\Delta + 1)$	$24\Delta(\Delta + 1) \times$ $\times (2\Delta + 1)$

Для произвольных трех примарных состояний

$$\gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}(Y) = \prod_i \left(\Delta + k_i \Delta_1 - \Delta_2 + \sum_{j < i} k_j \right) \sim \langle L_{-Y} V_\Delta(0) V_{\Delta_1}(1) V_{\Delta_2}(\infty) \rangle. \quad (11)$$

В частности,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([1]) &= \Delta + \Delta_1 - \Delta_2, \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([2]) &= \Delta + 2\Delta_1 - \Delta_2, \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([11]) &= (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1), \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([3]) &= \Delta + 3\Delta_1 - \Delta_2, \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([21]) &= (\Delta + 2\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 2), \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([111]) &= (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 2), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([n]) &= \Delta + n\Delta_1 - \Delta_2, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([1^n]) &= (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) \dots (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + n - 1).
 \end{aligned}$$

Подставляя эти явные формулы в (10), получаем

$$\mathcal{B}^{(0)} = 1, \quad (12)$$

$$\mathcal{B}_{\Delta}^{(1)} = \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{2\Delta}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Delta}^{(2)} = & \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 1)}{4\Delta(2\Delta + 1)} + \\ & + \frac{(\Delta_2 + \Delta_1)(2\Delta + 1) + \Delta(\Delta - 1) - 3(\Delta_2 - \Delta_1)^2}{2(2\Delta + 1)[2\Delta(8\Delta - 5) + (2\Delta + 1)c]} \times \\ & \times [(\Delta_3 + \Delta_4)(2\Delta + 1) + \Delta(\Delta - 1) - 3(\Delta_3 - \Delta_4)^2], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Delta}^{(3)} = & \frac{1}{2\Delta(3\Delta^2 + c\Delta - 7\Delta + 2 + c)} \times \\ & \times \left\{ (\Delta + 3\Delta_1 - \Delta_2)[(\Delta^2 + 3\Delta + 2)(\Delta + 3\Delta_3 - \Delta_4) - \right. \\ & - 2(\Delta + 1)(\Delta + 2\Delta_3 - \Delta_4)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 2) + \\ & + (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 1)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 2)] - \\ & - (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 2)(\Delta + 3\Delta_3 - \Delta_4)[2(\Delta + 2\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + 1) - \\ & - (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)] + \\ & + \frac{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 2}{16\Delta^2 + 2(c - 5)\Delta + c} \left[(\Delta + 2\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 2) \times \right. \\ & \times (2(6\Delta^3 + 9\Delta^2 - 9\Delta + 2c\Delta^2 + 3c\Delta + c)(\Delta + 2\Delta_3 - \Delta_4) - \\ & - (9\Delta^2 - 7\Delta + 3c\Delta + c)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 1)) - \\ & - (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 2) \times \\ & \times \left((9\Delta^2 - 7\Delta + 3c\Delta + c)(\Delta + 2\Delta_3 - \Delta_4) - (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4) \times \right. \\ & \left. \left. \times (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 1) \frac{24\Delta^2 - 26\Delta + 11c\Delta + 8c + c^2}{12} \right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

и т.д. Выражения (13) и (14) представляют собой хорошо известные формулы из работы [27] (мы исправили некоторые опечатки).

2.3. Комментарии по поводу вывода Q и γ . В этом разделе мы следуем стандартным рассуждениям КТП [26], [27]. Вычисление формы Шаповалова Q_{Δ} производится прямым путем. По определению формула (6) приводит к ненулевому результату лишь при $|Y| = |Y'|$. Первые несколько выражений для $Q_{\Delta}(Y, Y')$ (см. таблицу в предыдущем пункте) легко вычисляются: при $|Y| = 0$ и $|Y| = 1$

$$\begin{aligned} Q_{\Delta}(\emptyset, \emptyset) &= \langle \Delta | \Delta \rangle = 1, \\ Q_{\Delta}([1], [1]) &= \langle \Delta | L_1 L_{-1} | \Delta \rangle = \langle \Delta | L_{-1} L_1 + 2L_0 | \Delta \rangle = \\ &= (0 + 2\Delta) \langle \Delta | \Delta \rangle = 2\Delta; \end{aligned} \quad (16)$$

далее, для $|Y| = 2$

$$\begin{aligned}
 [2], [2] : \quad & L_2 L_{-2} = L_{-2} L_2 + 4L_0 + \frac{c}{2} \rightarrow 4\Delta + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}(8\Delta + c), \\
 [2], [11] : \quad & L_2 L_{-1}^2 = (L_{-1} L_2 + 3L_1) L_{-1} \rightarrow 3L_1 L_{-1} = 3L_{-1} L_1 + 6L_0 \rightarrow 6\Delta, \\
 [11], [11] : \quad & L_1^2 L_{-1}^2 = L_1 (L_{-1} L_1 + 2L_0) L_{-1} = \\
 & = L_1 L_{-1} (L_{-1} L_1 + 2L_0) + 2L_1 (L_{-1} L_0 + L_{-1}) \rightarrow \\
 & \rightarrow 0 + ((2+2)\Delta + 2)L_1 L_{-1} \xrightarrow{(16)} 4\Delta(1+2\Delta);
 \end{aligned} \tag{17}$$

для $|Y| = 3$

$$\begin{aligned}
 [3], [3] : \quad & L_3 L_{-3} \rightarrow 6\Delta + 2c, \\
 [3], [21] : \quad & L_3 L_{-1} L_{-2} \rightarrow 4L_2 L_{-2} \xrightarrow{(17)} 2(8\Delta + c), \\
 [3], [111] : \quad & L_3 L_{-1}^3 \rightarrow 4L_2 L_{-1}^2 \xrightarrow{(17)} 24\Delta, \\
 [21], [21] : \quad & L_2 L_1 L_{-1} L_{-2} = L_2 (L_{-1} L_1 + 2L_0) L_{-2} \rightarrow \\
 & \rightarrow 3L_2 L_{-1}^2 + 2L_2 L_{-2} (\Delta + 2) \xrightarrow{(17)} \\
 & \xrightarrow{(17)} 18\Delta + (8\Delta + c)(\Delta + 2) = 8\Delta^2 + (34 + c)\Delta + 2c, \\
 [21], [111] : \quad & L_2 L_1 L_{-1}^3 = L_2 (L_{-1} L_1 + 2L_0) L_{-1}^2 = \\
 & = L_2 L_{-1} (L_{-1} L_1 + 2L_0) L_{-1} + 2L_2 (L_{-1} L_0 + L_{-1}) L_{-1} \rightarrow \\
 & \rightarrow 2L_2 L_{-1}^2 (\Delta + (\Delta + 1) + (\Delta + 1) + 1) \xrightarrow{(17)} 36\Delta(\Delta + 1), \\
 [111], [111] : \quad & L_1^3 L_{-1}^3 = L_1^2 (L_{-1} L_1 + 2L_0) L_{-1}^2 = \\
 & = L_1^2 L_{-1} (L_{-1} L_1 + 2L_0) L_{-1} + 2L_1^2 (L_{-1} L_0 + L_{-1}) L_{-1} \rightarrow \\
 & \rightarrow 2L_1^2 L_{-1}^2 (\Delta + (\Delta + 1) + (\Delta + 1) + 1) \xrightarrow{(17)} \\
 & \xrightarrow{(17)} 24\Delta(1 + \Delta)(1 + 2\Delta).
 \end{aligned}$$

В общем случае

$$\begin{aligned}
 Q_\Delta([n], [n]) &= \langle \Delta | L_n L_{-n} | \Delta \rangle = \left\langle \Delta \left| L_{-n} L_n + \frac{c}{12} n(n^2 - 1) + 2nL_0 \right| \Delta \right\rangle = \\
 &= \frac{c}{12} n(n^2 - 1) + 2n\Delta, \\
 Q_\Delta([n], [n-1, 1]) &= \langle \Delta | L_n L_{-1} L_{-(n-1)} | \Delta \rangle = (n+1) \langle \Delta | L_{n-1} L_{-(n-1)} | \Delta \rangle = \\
 &= (n+1) Q([n-1], [n-1]) = \\
 &= \frac{c}{12} (n+1)n(n-1)(n-2) + 2(n^2 - 1)\Delta
 \end{aligned}$$

и т.д. вплоть до

$$\begin{aligned}
 Q_\Delta([1^n], [1^n]) &= \langle \Delta | L_1^n L_{-1}^n | \Delta \rangle = \\
 &= n(2\Delta + n - 1) \langle \Delta | L_1^{n-1} L_{-1}^{n-1} | \Delta \rangle = n! \frac{\Gamma(2\Delta + n)}{\Gamma(2\Delta)}.
 \end{aligned}$$

Последняя формула следует из рекуррентных соотношений

$$L_0 L_{-1}^n = L_{-1} L_0 L_{-1}^{n-1} + L_{-1}^n = \dots = L_{-1}^n (L_0 + n) = L_{-1}^n (\Delta + n) \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} L_1 L_{-1}^n &= L_{-1} L_1 L_{-1}^{n-1} + 2L_0 L_{-1}^{n-1} \stackrel{(18)}{=} \dots \stackrel{(18)}{=} L_{-1}^n L_1 + \\ &+ 2L_{-1}^{n-1} ((\Delta + n - 1) + (\Delta + n - 2) + \dots + \Delta) \rightarrow \\ &\rightarrow 0 + n(2\Delta + n - 1) L_{-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Замечательная формула произведений (11) для трехточечной функции γ может быть выведена [28] с использованием общей теории, изложенной в работах [26], [27]. Наиболее простым способом можно получить соотношение (11) для произвольной Y , используя явное выражение для действия генераторов Вирасоро на примарные поля,

$$[L_n, V_\Delta(z)] = \left(z^{n+1} \frac{d}{dz} + (n+1) z^n \Delta \right) V_\Delta(z),$$

и точное выражение для голоморфной части трехточечного коррелятора примарных полей,

$$\begin{aligned} \langle V_{\Delta_1}(z_1) V_{\Delta_2}(z_2) V_{\Delta_3}(z_3) \rangle &= \\ &= \frac{C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}}{(z_1 - z_2)^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} (z_1 - z_3)^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} (z_2 - z_3)^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}, \end{aligned}$$

взятое в точках $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = \infty$; после вычисления всех производных следует положить $z = 1$. В простейшем случае получаем

$$\begin{aligned} \langle V_{\Delta_1}(z_1) V_{\Delta_2}(z_2) L_{-1} V_\Delta(z) \rangle &= \frac{\partial}{\partial z} \langle V_{\Delta_1}(z_1) V_{\Delta_2}(z_2) V_\Delta(z) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}}{(z - z_1)^{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2} (z - z_2)^{\Delta + \Delta_2 - \Delta_1} (z_1 - z_2)^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta}}. \end{aligned}$$

Только производная множителя с $(z - z_1)$ дает вклад при $z_2 = \infty$, и это объясняет, почему $\gamma_{\Delta_1, \Delta_2; \Delta}([1]) = \Delta + \Delta_1 - \Delta_2$.

2.4. Свободные поля. Наиболее простым и известным примером КТП с произвольным центральным зарядом $c = 1 + 6Q^2$ является модель свободного скалярного безмассового поля ϕ с фоновым зарядом Q , являющимся произвольным вещественным или даже комплексным числом. Примарные поля $V_\alpha = :e^{\alpha\phi}:$ в этой теории имеют конформные размерности

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha), \quad (19)$$

а операторное разложение принимает очень простой вид

$$\begin{aligned} :e^{\alpha_1\phi(z_1)}: :e^{\alpha_2\phi(z_2)}: &= \frac{:e^{\alpha_1\phi(z_1) + \alpha_2\phi(z_2)}:}{(z_1 - z_2)^{2\alpha_1\alpha_2}} = z_{12}^{-2\alpha_1\alpha_2} : \left(1 + z_{12}\alpha_1\partial\phi(z_2) + \right. \\ &+ z_{12}^2 \frac{\alpha_1^2}{2} (\partial\phi(z_2))^2 + z_{12}^2 \frac{\alpha_1}{2} \partial^2\phi(z_2) + \dots \left. \right) e^{(\alpha_1 + \alpha_2)\phi(z_2)} : = \\ &= z_{12}^{-2\alpha_1\alpha_2} (1 + z_{12}\beta_{\text{free}}[1]L_{-1} + z_{12}^2(\beta_{\text{free}}[2]L_{-2} + \beta_{\text{free}}[11]L_{-1}^2) + \dots) :e^{(\alpha_1 + \alpha_2)\phi(z_2)}: \end{aligned}$$

и приводит к следующему правилу отбора для четырехточечного конформного блока:

$$\alpha \equiv \alpha_{(12)} = \alpha_1 + \alpha_2 = Q - \alpha_3 - \alpha_4. \quad (20)$$

Это означает, что в промежуточном канале появляется единственный примарный оператор с конформной размерностью

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha(Q - \alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2)(Q - \alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= (Q - \alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4). \end{aligned} \quad (21)$$

Четырехточечный конформный блок в данной теории просто равен

$$\langle e^{\alpha_1 \phi(z_1)} e^{\alpha_2 \phi(z_2)} e^{\alpha_3 \phi(z_3)} e^{\alpha_4 \phi(z_4)} \rangle = \prod_{i < j} z_{ij}^{-2\alpha_i \alpha_j}, \quad (22)$$

где $\sum_i \alpha_i = Q$. Полагая $z_1 = 1$, $z_2 = \infty$, $z_3 = x$, $z_4 = 0$, как требуется в (9), для правой части получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{free}}(x) &= x^{-2\alpha_3 \alpha_4} (1 - x)^{-2\alpha_1 \alpha_3} = x^{-2\alpha_3 \alpha_4} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{\Gamma(k + 2\alpha_1 \alpha_3)}{k! \Gamma(2\alpha_1 \alpha_3)} = \\ &= x^{-2\alpha_3 \alpha_4} \left(1 + 2\alpha_1 \alpha_3 x + \alpha_1 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_3 + 1) x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_3 + 1) (2\alpha_1 \alpha_3 + 1)}{3} x^3 + \dots \right). \end{aligned} \quad (23)$$

В частности, коэффициент при первом члене разложения в скобках равен $2\alpha_1 \alpha_3$, что следует сравнить с формулой (13), которая в данном случае приводит к

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{free}}^{(1)} &= \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{2\Delta} = \\ &= \frac{2\alpha_1(Q - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot 2\alpha_3(Q - \alpha_3 - \alpha_4)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)} \stackrel{(20)}{=} 2\alpha_1 \alpha_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогичным образом можно проверить, что и значения двух следующих коэффициентов совпадают с $\mathcal{B}^{(2)}$ и $\mathcal{B}^{(3)}$, если подставить размерности (21), параметризованные, как в теории свободного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{free}}^{(2)} &\stackrel{(14)}{=} \frac{2\alpha_1 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_3 + 1)}{2!}, \\ \mathcal{B}_{\text{free}}^{(3)} &\stackrel{(15)}{=} \frac{2\alpha_1 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_3 + 1) (2\alpha_1 \alpha_3 + 2)}{3!}. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что эти коэффициенты не зависят от Q , несмотря на то что эта зависимость присутствует в явном виде в выражениях для размерностей $\Delta_{\alpha\alpha}$. Следует ожидать, что если вычислить явные выражения, аналогичные (13)–(15), для старших членов разложения по x , то подстановка в них (21) приведет к следующему соотношению:

$$\mathcal{B}_{\text{free}}^{(k)} = \frac{\Gamma(k + 2\alpha_1 \alpha_3)}{k! \Gamma(2\alpha_1 \alpha_3)}. \quad (26)$$

Суммируя сказанное, мы получаем, что формула (10) из теории представлений приводит к удивительному результату: коррелятор в теории свободных полей (23) разлагается в билинейную сумму по диаграммам Юнга одинаковых размерностей.

2.5. Разложение по характеристам. Для удобства в этом разделе мы положим $\sqrt{2}\alpha_1 = m_1$, $\sqrt{2}\alpha_3 = m_2$; ниже станет ясно, что эти параметры играют роль перенормированных⁴⁾ масс μ в четырехмерной теории.

Выражение (23), очевидно, может быть альтернативным образом разложено в однократную сумму по разбиениям (см., например, работы [31]):

$$\begin{aligned} (1-x)^{-m_1 m_2} &= \sum_k \frac{x^k}{k!} \frac{\Gamma(m_1 m_2 + k)}{\Gamma(m_1 m_2)} = \\ &= \sum_Y x^{|Y|} \left(\prod_{(i,j) \in Y} \frac{(m_1 + j - i)(m_2 + j - i)}{h(i,j)^2} \right) \equiv \sum_Y x^{|Y|} \mathcal{Z}_Y^{U(1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь для $(i,j) \in Y = (k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_l)$ с координатами (i,j) такими, что $i = 1, 2, \dots, l$ и $j = 1, 2, \dots, k_i$, длина крюка $h(i,j)$ определена как $h(i,j) = k_i(Y) - j + k_j(Y^T) - i + 1$ и

$$\begin{aligned} \prod_{(i,j) \in Y} (m_f + j - i) &= \prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^{k_i} (m_f + j - i) = \prod_{i=1}^l (m_f + 1 - i) \dots (m_f + k_i - i) = \\ &= \prod_{i=1}^l \frac{\Gamma(m_f + k_i - i)}{\Gamma(m_f + 1 - i)}, \quad f = 1, 2. \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения в (27) уже имеют вид, характерный для некрасовских формул, в которых (в обозначениях работы [22])

$$\mathcal{Z}_Y^{U(1)} = \prod_{(i,j) \in Y} \frac{\phi_Y(m_1; i, j) \phi_Y(m_2; i, j)}{E_Y^2(0; i, j)}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_Y(m; i, j) &= m + i - j, \\ E_Y(\alpha; i, j) &= \alpha + (k_j^T - i + 1) + (k_i - j). \end{aligned} \quad (29)$$

В формулах выше k_i и k_j^T обозначают, соответственно, длину строки и высоту столбца в диаграмме Юнга Y и транспонированной диаграмме Y^T .

Формулы (27), (28) немедленно вытекают из формулы Коши для функций Шура (см., например, работы [31]; по поводу недавнего использования разложений характеров см. работы [6], [12], [32]),

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - \lambda_i \lambda_j'} = \sum_Y s_Y(\lambda) s_Y(\lambda'), \quad (30)$$

⁴⁾Эта перенормировка является артефактом неудобной нормировки, изначально выбранной в работах [26], [27], и может быть поглощена перенормировкой скалярного поля $\phi(z) = \sqrt{2}\varphi(z)$ (ср., например, нормировки в работах [29] и [30]).

которая, будучи переписанной в переменных Мивы

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k, \quad (31)$$

превращается в формулу разложения

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k t_k t'_k\right) = \sum_Y \chi_Y(t) \chi_Y(t') \quad (32)$$

для характеров (в силу первой формулы Вейля)

$$s_Y(\lambda) = \frac{\det_{ij} \lambda_j^{k_i + N - i}}{\det_{ij} \lambda_j^{N - i}} = \chi_Y(t), \quad (33)$$

отвечающих диаграммам Юнга Y , так что $\chi_Y = \chi[k_1 k_2 \dots k_l]$, например

$$\begin{aligned} \chi[0] &= 1, & \chi[1] &= t_1, \\ \chi[2] &= t_2 + \frac{t_1^2}{2}, & \chi[11] &= -t_2 + \frac{t_1^2}{2}, \\ \chi[3] &= t_3 + t_1 t_2 + \frac{t_1^3}{6}, & \chi[21] &= -t_3 + \frac{t_1^3}{3}, & \chi[111] &= t_3 - t_1 t_2 + \frac{t_1^3}{6} \end{aligned} \quad (34)$$

и т.д. В формуле (30) можно взять специальные значения

$$\{\lambda_i\} = \underbrace{\{\sqrt{x}, \sqrt{x}, \dots, \sqrt{x}, 0, 0, \dots\}}_m$$

(и после этого продолжить аналитически с целых значений m_f , это отвечает $t_k \sim (m/k)x^{k/2}$ в терминах переменных Мивы (31)), тогда

$$s_Y(\lambda) = x^{|Y|/2} \prod_{(i,j) \in Y} \frac{m + j - i}{h(i, j)}, \quad (35)$$

что можно интерпретировать как случай совпадающих λ в формуле Вейля (33) после применения правила Лопиталья. Полагая далее $x = 1/m^2$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем формулу

$$\begin{aligned} d_Y &\equiv \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-|Y|} \prod_{(i,j) \in Y} \frac{m + j - i}{h(i, j)} = \prod_{(i,j) \in Y} \frac{1}{h(i, j)} = \\ &= \frac{\dim R_Y}{|Y|!} = \prod_{i < j} \frac{k_i(Y) - k_j(Y) + j - i}{j - i}; \end{aligned} \quad (36)$$

величина $\mu_Y = d_Y^2$ известна также как мера Планшереля. Суммирование по разбиениям в (27) производится с использованием частных случаев формул (30), (32) (теоремы Бернсайда)

$$\begin{aligned} \sum_Y d_Y \chi_Y(t) &= e^{t_1}, & \text{если} & & t'_k &= \delta_{k,1}, \\ \sum_Y \mu_Y x^{|Y|} &= \sum_Y d_Y^2 x^{|Y|} = e^x, & \text{если также} & & t_k &= x \delta_{k,1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что в случае свободных полей существует комбинаторная интерпретация разложения конформного блока:

$$\sum_{Y, Y'} x^{|Y|} \mathcal{B}_{Y, Y'}^{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4) = (1 - x)^{-2\alpha_1\alpha_3} = (1 - x)^{-m_1 m_2} = \sum_Y x^{|Y|} \mathcal{Z}_Y^{U(1)}, \quad (38)$$

где коэффициенты $\mathcal{Z}_Y^{U(1)}$ определены в (28).

2.6. За пределами свободных полей. Произвольная КТП может быть эффективно описана в терминах свободных полей [29], [30], однако число свободных полей в общем случае больше единицы, и должны быть наложены связи (20) на промежуточное состояние. При этом возникает естественный вопрос: что происходит с уравнениями (24)–(26)? Гипотеза АГТ [22] гласит, что для произвольных α , не обязательно равных $\alpha_1 + \alpha_2$, коэффициенты $\mathcal{B}^{(k)} = \sum_{|Y|=|Y'|=k} \mathcal{B}_{Y, Y'}$ равны коэффициентам разложения некрасовских функций (которые будут явно определены ниже в п. 4.2):

$$\begin{aligned} \sum_{|Y|=|Y'|} x^{|Y|} \mathcal{B}_{Y, Y'}^{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4) &= \\ &= \sum_{Y, Y'} x^{|Y|} \mathcal{B}_{Y, Y'}^{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4) \sum_{Y, Y'} x^{|Y|+|Y'|} \mathcal{Z}_{Y, Y'}^{SU(2)} = \\ &= (1 - x)^{-\nu} \sum_{Y, Y'} x^{|Y|+|Y'|} \mathcal{Z}_{Y, Y'}^{SU(2)} = \sum_{Y, Y'} x^{|Y|+|Y'|} \mathcal{Z}_{Y, Y'}^{U(2)}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $U(1)$ -фактор $(1 - x)^{-\nu}$ сам по себе может быть представлен аналогичной формулой (38). Среди прочего первое равенство в (39) предполагают, что комбинация некрасовских $SU(2)$ -функций $\mathcal{Z}$ равна единице при $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Представляется, что ограничение на группу $SU(2)$ в правой части формулы (39) связано с ограничением на единственное свободное скалярное поле в левой части формулы. Заметим, что (39) является универсальным теоретико-групповым соотношением, не отвечающим конкретной конформной модели в левой части и конкретной суперсимметричной теории полей Янга–Миллса в правой части равенства: оно связывает лишь теоретико-групповые величины, канонически определенные по диаграммам Юнга. Единственным нетривиальным местом является то, что, даже будучи канонически определенными, эти соотношения не имеют ясной интерпретации в теории представлений линейных и симметрических групп.

3. СООТНОШЕНИЯ АГТ

Гипотеза АГТ на самом деле является более общей, чем соотношение (39): утверждается, что некрасовские статистические суммы факторизуются в точности так же, как конформные блоки в (9):

$$Z_{\text{Nek}} = Z_{\text{cl}} Z_{\text{pert}} Z_{\text{inst}}, \quad (40)$$

где

$$Z_{\text{inst}} = \mathcal{B}_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2; \Delta_3, \Delta_4 \mid x) \quad (41)$$

при некотором выборе размерностей $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ и

$$Z_{\text{cl}} = x^\sigma, \quad (42)$$

$$Z_{\text{pert}} = C_{\alpha_1 \alpha_2}^a \mathcal{K}_a C_{\alpha_3 \alpha_4}^a \quad (43)$$

для некоторого выбора КТП и ее примарных состояний. Более того, утверждается, что эта КТП является теорией Лиувилля с центральным зарядом

$$c = 1 + 6Q^2 = 1 + \frac{6(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \quad (44)$$

и размерностями⁵⁾

$$\Delta_\alpha = \frac{\alpha(\epsilon - \alpha)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2. \quad (45)$$

Параметры α – линейные комбинации параметров (калибровочных полей a и масс μ) некрасовских статистических сумм (см. ниже).

Кроме того, эти результаты обобщены на многоточечные конформные блоки и связаны с некрасовскими функциями для нетривиальных конфигураций бран (колчаные калибровочные теории). Соотношения АГТ относятся только к некрасовским функциям для “калибровочных” групп $SU(2)$ и $U(2)$. Как уже упоминалось, для произвольных групп предположительно они должны иметь отношение к конформным блокам редуцированной модели ВЗВН [30] (конформной модели Тоды; более конкретно см. в работе [25]), выражающимся через более чем одно скалярное поле.

Заметим, что, в то время как (41) – это просто универсальное выражение для (39), уравнение (43) включает в себя изысканные выражения для структурных констант в теории Лиувилля (вершины в терминах работ [33]), которые, похоже, являются нетривиальными величинами в теории представлений квантовых алгебр Каца–Мури (см. также работы [24]). Мы оставляем соотношения (40) и (43) за рамками настоящей статьи и собираемся сконцентрироваться на функции (41), записанной в форме (39).

4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ НЕКРАСОВА

Статистические суммы Некрасова – это недавно открытые специальные функции $Z_{Y,Y'}[\epsilon_1, \epsilon_2]$, имеющие все растущее количество приложений в задачах современной математической физики. При $\epsilon_1 = -\epsilon_2 \equiv \hbar$ они тесно связаны с характеристиками симметрических и линейных групп; если при этом $\hbar \rightarrow 0$, то они воспроизводят препотенциалы Виттена–Зайберга. Гипотеза АГТ может рассматриваться в качестве еще одного приложения: некрасовские инстантонные статистические суммы описывают конформные блоки с алгеброй Вирасоро в роли киральной алгебры. Число

⁵⁾Заметим, что перемасштабирование с помощью множителя $\epsilon_1 \epsilon_2$ по сравнению со стандартными обозначениями (19) вполне невинно, но упрощает формулы. Если Q параметризовано стандартным для конформной теории образом, $Q = b + 1/b$, то $b = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$. Подчеркнем, что мы не видим никакой необходимости требовать выполнения условия $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$ для идентификации конформных блоков и некрасовских инстантонных статистических сумм.

ϵ -параметров может быть таким путем увеличено, и эти параметры могут, в действительности, играть роль в обобщениях на другие киральные алгебры. Интерпретация общих некрасовских функций с точки зрения теории представлений все еще отсутствует, и их можно (временно) рассматривать как базис для комбинаторных разложений скорее, чем разложений по характерам.

4.1. $U(1)$ -случай для функции Z_Y . В частном случае $\epsilon = 0$ свободной конформной теории с зарядом $c = 1$ уравнение (38) является хорошо известным $U(1)$ -предшественником соотношения АГТ (39) и описывает некрасовскую статистическую сумму калибровочной $U(1)$ -теории с $N_f = 2$ ароматами как конформный блок [6]:

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}}^{U(1), N_f}(x; m_1, m_2) &= \langle e^{i(\alpha+m_2)\varphi(\infty)} e^{-im_2\varphi(1)} x^{L_0} e^{im_1\varphi(1)} e^{-i(\alpha+m_1)\varphi(0)} \rangle = \\ &= x^{m_1^2 + (\alpha+m_1)^2} \langle e^{i(\alpha+m_2)\varphi(\infty)} e^{-im_2\varphi(1)} e^{im_1\varphi(x)} e^{-i(\alpha+m_1)\varphi(0)} \rangle = \\ &= x^{\alpha^2} (1-x)^{-m_1 m_2}, \end{aligned} \quad (46)$$

где для простоты мы положили $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \hbar = 1$. Как и ожидалось, промежуточный канал для конформного блока проецируется на единственное представление с размерностью примарного поля $\Delta_\alpha \sim \alpha^2$. Конформный блок (46) имеет разложение (27) по одному набору диаграмм Юнга, как мы уже обсуждали в п. 2.5. Формула (46) задает матричный элемент в конформной $\widehat{U(1)}$ -теории с $c = 1$, для которой имеется не только представление свободными бозонами, но и свободными фермионами [6], [7] для тока

$$J(z) = \partial\varphi(z) = :\tilde{\psi}(z)\psi(z): = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}, \quad (47)$$

так что тензор энергии-импульса (3) есть просто $T(z) \sim J(z)^2$.

Предел бесконечных масс $m_{1,2} \rightarrow \infty$ в (46) отвечает отщеплению полей материи от калибровочных полей и дает

$$Z^{U(1)}(\alpha, \Lambda) = \langle \alpha | e^{J_1} \Lambda^{L_0} e^{J_{-1}} | \alpha \rangle = \Lambda^{\alpha^2/2} \sum_Y \mu_Y \Lambda^{|Y|} \stackrel{(37)}{=} \Lambda^{\alpha^2/2} e^\Lambda \quad (48)$$

с фиксированным $\Lambda^2 = m_1 m_2 x^2$ при $x \rightarrow 0$, причем $m_{1,2} \rightarrow \infty$ являются масштабными параметрами чистой калибровочной $U(1)$ -теории. Как уже отмечалось в п. 2.5, эти формулы остаются неизменными при произвольном $\epsilon \neq 0$, поскольку “включение” ϵ отвечает не чему иному, как твистованию тензора энергии-импульса $T(z) \rightarrow T(z) + \epsilon \partial J(z)$ в $\widehat{U(1)}$ -теории. Это просто сдвигает веса твистованных фермионов и деформирует комбинаторные формулы, суммирование которых приводит к тем же, по сути, результатам.

4.2. $SU(2)$ -случай для функции $Z_{Y,Y'}$. В $SU(2)$ -случае функции Некрасова $Z_{Y,Y'}$ гораздо более сложные. Они даются следующей явной формулой:

$$Z_{Y,Y'} = \frac{\eta(Y_1, Y_2)}{\xi(Y_1, Y_2)},$$

в которой

$$\begin{aligned}
\eta(Y_1, Y_2) &= \prod_{(i,j) \in Y_1} \prod_{\alpha=1}^4 (\phi(a_1, i, j) + \mu_\alpha) \prod_{(i,j) \in Y_2} \prod_{\alpha=1}^4 (\phi(a_2, i, j) + \mu_\alpha), \\
\xi(Y_1, Y_2) &= \prod_{(i,j) \in Y_1} E(a_1 - a_1, Y_1, Y_1, i, j) (\epsilon - E(a_1 - a_1, Y_1, Y_1, i, j)) \times \\
&\times \prod_{(i,j) \in Y_1} E(a_1 - a_2, Y_1, Y_2, i, j) (\epsilon - E(a_1 - a_2, Y_1, Y_2, i, j)) \times \\
&\times \prod_{(i,j) \in Y_2} E(a_2 - a_1, Y_2, Y_1, i, j) (\epsilon - E(a_2 - a_1, Y_2, Y_1, i, j)) \times \\
&\times \prod_{(i,j) \in Y_2} E(a_2 - a_2, Y_2, Y_2, i, j) (\epsilon - E(a_2 - a_2, Y_2, Y_2, i, j)),
\end{aligned} \tag{49}$$

где $a_2 = -a_1$ и

$$\begin{aligned}
\phi(a, i, j) &= a + \epsilon_1(i - 1) + \epsilon_2(j - 1), \\
E(a, Y_1, Y_2, i, j) &= a + \epsilon_1(k_j^T(Y_1) - i + 1) - \epsilon_2(k_i(Y_2) - j)
\end{aligned}$$

определены для двух диаграмм Юнга Y_1 и Y_2 . Эти функции являются естественным обобщением $U(1)$ -величин в (29). Заметим, что для $U(1)$ -случая $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, кроме того, в (29) не был введен масштабный множитель $\epsilon_1 \epsilon_2$. Заметим также, что, в отличие от $U(1)$ -случая, где $\sqrt{2}\alpha = t$ входит в произведение в числителе (29), в $SU(2)$ -случае в формуле (49) нет квадратных корней перед a_i .

Явные выражения для первых нескольких членов таковы: для инстантонного заряда $k = |Y| + |Y'| = 1$

$$\mathcal{Z}_{[1][0]} = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)}{2a(2a + \epsilon)}, \quad \mathcal{Z}_{[0][1]} = -\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)}{2a(2a - \epsilon)}; \tag{50}$$

для $k = 2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{[2][0]} &= \frac{1}{2! \epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)(a + \mu_r + \epsilon_2)}{2a(2a + \epsilon_2)(2a + \epsilon)(2a + \epsilon + \epsilon_2)}, \\
\mathcal{Z}_{[0][2]} &= \frac{1}{2! \epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)(a - \mu_r - \epsilon_2)}{2a(2a - \epsilon_2)(2a - \epsilon)(2a - \epsilon - \epsilon_2)}, \\
\mathcal{Z}_{[11][0]} &= -\frac{1}{2! \epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)(a + \mu_r + \epsilon_1)}{2a(2a + \epsilon_1)(2a + \epsilon)(2a + \epsilon + \epsilon_1)}, \\
\mathcal{Z}_{[0][11]} &= -\frac{1}{2! \epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)(a - \mu_r - \epsilon_1)}{2a(2a - \epsilon_1)(2a - \epsilon)(2a - \epsilon - \epsilon_1)}, \\
\mathcal{Z}_{[1][1]} &= \frac{1}{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)(a - \mu_r)}{(4a^2 - \epsilon_1^2)(4a^2 - \epsilon_2^2)};
\end{aligned} \tag{51}$$

для $k = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{[3][0]} = & -\frac{1}{3! \epsilon_1 \epsilon_2^3 (\epsilon_1 - \epsilon_2) (\epsilon_1 - 2\epsilon_2)} \times \\ & \times \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r) (a + \mu_r + \epsilon_2) (a + \mu_r + 2\epsilon_2)}{2a(2a + \epsilon_2)(2a + 2\epsilon_2)(2a + \epsilon)(2a + \epsilon + \epsilon_2)(2a + \epsilon + 2\epsilon_2)} \end{aligned} \quad (52)$$

и т.д. Очевидно, имеются симметрии

$$\mathcal{Z}_{Y', Y}(a, \epsilon_1, \epsilon_2) = \mathcal{Z}_{Y, Y'}(-a, \epsilon_1, \epsilon_2), \quad \mathcal{Z}_{Y, Y'}(a, \epsilon_1, \epsilon_2) = \mathcal{Z}_{Y^T, Y'^T}(a, \epsilon_2, \epsilon_1).$$

Мнемоническое правило при конструировании этих выражений довольно простое: при переходе $[n] \rightarrow [n+1]$ вводятся добавочные множители с дополнительным ϵ_2 как в числителе, так и в знаменателе, а при переходе $[1^n] \rightarrow [1^{n+1}]$ появляется дополнительный множитель ϵ_1 .

5. ЗА ПРЕДЕЛАМИ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ, ПРОДОЛЖЕНИЕ

5.1. Случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$: конформный блок. Вернемся теперь к рассмотрению конформных блоков $\mathcal{B}_\Delta$ с произвольной размерностью Δ_α . Простейшим является случай, когда все другие размерности исчезают, т. е. четыре “внешних” примарных поля суть единичные операторы с $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, в то время как “промежуточная” $\Delta = \alpha(\epsilon - \alpha)/\epsilon_1 \epsilon_2$ остается нетривиальной и произвольной. Тогда формулы (13)–(15) сводятся к

$$\mathcal{B}^{(1)}(0, 0; 0, 0) \stackrel{(13)}{=} \frac{\Delta}{2} \stackrel{(45)}{=} \frac{\alpha(\epsilon - \alpha)}{2\epsilon_1 \epsilon_2} = -\frac{4a^2 - \epsilon^2}{8\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(2)}(0, 0; 0, 0) & \stackrel{(14)}{=} \frac{\Delta(8\Delta^3 + (c+8)\Delta^2 + (2c-8)\Delta + c)}{4(16\Delta^2 + (2c-10)\Delta + c)} = \\ & = \frac{4a^2 - \epsilon^2}{256\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (4a^2 - (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2) (4a^2 - (\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2)} \times \\ & \times (128a^6 - 48a^4(4\epsilon_1^2 + 11\epsilon_1 \epsilon_2 + 4\epsilon_2^2) + \\ & + 24a^2(3\epsilon_1^4 + 23\epsilon_1^3 \epsilon_2 + 36\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 + 23\epsilon_1 \epsilon_2^3 + 3\epsilon_2^4) - \\ & - (8\epsilon_1^6 + 105\epsilon_1^5 \epsilon_2 + 420\epsilon_1^4 \epsilon_2^2 + 662\epsilon_1^3 \epsilon_2^3 + 420\epsilon_1^2 \epsilon_2^4 + 105\epsilon_1 \epsilon_2^5 + 8\epsilon_2^6)), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(3)}(0, 0; 0, 0) & \stackrel{(15)}{=} \frac{\Delta(\Delta + 2)(8\Delta^3 + (c+18)\Delta^2 + (3c-14)\Delta + 2c)}{24(16\Delta^2 + (2c-10)\Delta + c)} = \\ & = -\frac{(4a^2 - \epsilon^2)(4a^2 - (\epsilon_1^2 + 10\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2))}{6144\epsilon_1^3 \epsilon_2^3 (4a^2 - (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2) (4a^2 - (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2)} \times \\ & \times (128a^6 - 16a^4(12\epsilon_1^2 + 43\epsilon_1 \epsilon_2 + 12\epsilon_2^2) + \\ & + 8a^2(9\epsilon_1^4 + 91\epsilon_1^3 \epsilon_2 + 142\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 + 91\epsilon_1 \epsilon_2^3 + 9\epsilon_2^4) - \\ & - (8\epsilon_1^6 + 139\epsilon_1^5 \epsilon_2 + 632\epsilon_1^4 \epsilon_2^2 + 1034\epsilon_1^3 \epsilon_2^3 + 632\epsilon_1^2 \epsilon_2^4 + 139\epsilon_1 \epsilon_2^5 + 8\epsilon_2^6)), \end{aligned} \quad (55)$$

где на последнем шаге мы сделали сдвиг $\alpha = a + \epsilon/2$, который симметризует и слегка упрощает формулы. Знаменатели (определители Каца) в (13)–(15) очевидным

образом замечательно согласуются с подстановками (44) и (45); этот факт хорошо известен в общей конформной теории. Заметим также, что знаменатели не зависят от остальных размерностей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, поэтому такая согласованность продолжается на общий четырехточечный конформный блок.

Однако числители в (53)–(55) выглядят более запутанно. Возникает вопрос: что является подходящим аналогом разложения по характерам (38) для этих величин? В соответствии с гипотезой АГТ – это формула (39), и мы собираемся проверить и проанализировать это соотношение.

5.2. Случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$: функции Некрасова. В этом случае мы полагаем $\nu = 0$ в (39). Теперь нам надо подогнать четыре параметра $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ так, чтобы соотношение (39) выполнялось для явных выражений (53)–(55) и (50)–(52).

Прежде всего, надо согласовать (53) и (50):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(1)}(0, 0; 0, 0) &= -\frac{4a^2 - \epsilon^2}{8\epsilon_1\epsilon_2} = \mathcal{Z}_{[1][0]} + \mathcal{Z}_{[0][1]} = \\ &= -\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)}{2a(2a + \epsilon)} - \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)}{2a(2a - \epsilon)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Для того чтобы избежать полюсов в правой части, один из параметров μ_i (скажем, μ_4) должен быть равен $\epsilon/2$. Тогда правая часть (56) превращается в

$$-\frac{a^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3}{2\epsilon_1\epsilon_2},$$

а условие согласованности с левой частью – в

$$s_2 \equiv \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = -\frac{\epsilon^2}{4}.$$

Гораздо менее тривиально согласование между (54) и (51):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(2)}(0, 0; 0, 0) &= \frac{4a^2 - \epsilon^2}{256\epsilon_1^2\epsilon_2^2(4a^2 - (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2)(4a^2 - (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2)} \times \\ &\times (128a^6 - 48a^4(4\epsilon_1^2 + 11\epsilon_1\epsilon_2 + 4\epsilon_2^2) + \\ &+ 24a^2(3\epsilon_1^4 + 23\epsilon_1^3\epsilon_2 + 36\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + 23\epsilon_1\epsilon_2^3 + 3\epsilon_2^4) - \\ &- (8\epsilon_1^6 + 105\epsilon_1^5\epsilon_2 + 420\epsilon_1^4\epsilon_2^2 + 662\epsilon_1^3\epsilon_2^3 + 420\epsilon_1^2\epsilon_2^4 + 105\epsilon_1\epsilon_2^5 + 8\epsilon_2^6)) = \\ &= \mathcal{Z}_{[2][0]} + \mathcal{Z}_{[0][2]} + \mathcal{Z}_{[11][0]} + \mathcal{Z}_{[0][11]} + \mathcal{Z}_{[1][1]} = \\ &= \frac{1}{\epsilon_1^2\epsilon_2^2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)(a - \mu_r)}{(4a^2 - \epsilon_1^2)(4a^2 - \epsilon_2^2)} + \\ &+ \frac{1}{2!\epsilon_1\epsilon_2^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)(a + \mu_r + \epsilon_2)}{2a(2a + \epsilon_2)(2a + \epsilon)(2a + \epsilon + \epsilon_2)} + \\ &+ \frac{1}{2!\epsilon_1\epsilon_2^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)(a - \mu_r - \epsilon_2)}{2a(2a - \epsilon_2)(2a - \epsilon)(2a - \epsilon - \epsilon_2)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2! \epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)(a + \mu_r + \epsilon_1)}{2a(2a + \epsilon_1)(2a + \epsilon)(2a + \epsilon + \epsilon_1)} - \\
& - \frac{1}{2! \epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)(a - \mu_r - \epsilon_1)}{2a(2a - \epsilon_1)(2a - \epsilon)(2a - \epsilon - \epsilon_1)} = \\
& = \frac{128a^{14} + \dots}{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (4a^2 - \epsilon_1^2)(4a^2 - \epsilon_2^2)(4a^2 - \epsilon^2)(4a^2 - (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2)(4a^2 - (\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2)}. \quad (57)
\end{aligned}$$

Числитель в правой части – полином степени 7 по a^2 , что должно согласовываться с левой частью, которую мы умножаем на $(4a^2 - \epsilon^2)(4a^2 - \epsilon_1^2)(4a^2 - \epsilon_2^2)$ для того, чтобы превратить ее в подобный полином степени 14 с первым членом $128a^{14}$. Коэффициенты при a^{12} для этих двух полиномов таковы: $-288\epsilon^2 - 80\epsilon_1\epsilon_2$ для левой части и

$$256 \sum_{r < s}^4 \mu_r \mu_s - 128 \epsilon \sum_{r=1}^4 \mu_r - 160\epsilon^2 - 80\epsilon_1\epsilon_2 = 256 \sum_{r < s}^3 \mu_r \mu_s - 224\epsilon^2 - 80\epsilon_1\epsilon_2$$

для правой части. Коэффициенты при младших степенях в правой части весьма сложны. К примеру, коэффициент перед a^{10} равен

$$\begin{aligned}
& 16[6s_4 + 8s_2^2 - 8\epsilon(s_1s_2 + s_3) - (16\epsilon_1^2 + 16\epsilon_2^2 + 38\epsilon_1\epsilon_2)s_2 + (2\epsilon_1^2 + 2\epsilon_2^2 + 3\epsilon_1\epsilon_2)s_1^2 + \\
& + (8\epsilon_1^3 + 8\epsilon_2^3 + 29\epsilon\epsilon_1\epsilon_2)s_1 + (30\epsilon_1\epsilon_2 + 18\epsilon_1^2 + 18\epsilon_2^2)\epsilon_1\epsilon_2],
\end{aligned}$$

где s_k обозначает симметрические полиномы от четырех μ_i степени k , $s_4 \equiv \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, $s_3 = \sum_{a>b>c} \mu_a\mu_b\mu_c$ и т.д. Мы не выписываем здесь аналог этого выражения из левой части и остальные коэффициенты – формулы получаются очень длинные, а процедура уже, должно быть, понятна.

Последний коэффициент в правой части получается после подстановки $\mu_4 = \epsilon/2$. Он совпадает с выражением в левой части, если μ_i выбраны следующим образом: $\mu_{1,2} = \pm\epsilon/2$ и $\mu_{3,4} = \mp\epsilon/2$, или $\mu_{1,2} = -\epsilon/2$ и $\mu_{3,4} = \epsilon/2$, или $\mu_1 = -\epsilon/2$ и $\mu_2 = 3\epsilon/2$, $\mu_{3,4} = \epsilon/2$ (конечно, со всеми возможными перестановками μ_i). Причина, по которой существует несколько решений, станет ясна в следующем пункте. С таким выбором μ_i коэффициенты при всех остальных степенях a^2 в обеих частях равенства также согласуются.

Аналогичная проверка работает и на уровне 3.

5.3. Восстановление размерностей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Включение ненулевых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ теперь является простым упражнением. Начнем с первого уровня:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}^{(1)}(\Delta_1, \Delta_2; \Delta_3, \Delta_4) = \\
& = - \frac{2a^4 + 2a^2(\epsilon(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 - \epsilon^2/2)}{\epsilon_1\epsilon_2(4a^2 - \epsilon^2)} - \\
& - \frac{2(\alpha_1(\epsilon - \alpha_1) - \alpha_2(\epsilon - \alpha_2) + \epsilon^2/4)(\alpha_3(\epsilon - \alpha_3) - \alpha_4(\epsilon - \alpha_4) + \epsilon^2/4)}{\epsilon_1\epsilon_2(4a^2 - \epsilon^2)}
\end{aligned}$$

должно сравниться с

$$\mathcal{Z}_{[1][0]} + \mathcal{Z}_{[0][1]} + \nu = -\frac{2a^4 + (2s_2 - \epsilon s_1 - 4\epsilon_1\epsilon_2\nu)a^2 + 2s_4 - \epsilon s_3 + \epsilon_1\epsilon_2\epsilon^2\nu}{\epsilon_1\epsilon_2(4a^2 - \epsilon^2)}.$$

Это дает два соотношения для определения четырех μ_i и ν :

$$\begin{aligned} 2\left(\epsilon(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) &= 2s_2 - \epsilon s_1 - 4\epsilon_1\epsilon_2\nu, \\ 2\left(\alpha_1(\epsilon - \alpha_1) - \alpha_2(\epsilon - \alpha_2) + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\left(\alpha_3(\epsilon - \alpha_3) - \alpha_4(\epsilon - \alpha_4) + \frac{\epsilon^2}{4}\right) &= \\ &= 2s_4 - \epsilon s_3 + \epsilon^2\epsilon_1\epsilon_2\nu. \end{aligned}$$

Еще три соотношения, более сложных, получаются на уровне 2, также мы имеем соотношения на уровне 3 и т.д. Однако, несмотря на то что количество условий согласования велико, все они непротиворечивы (!), и у них существует общее решение. В этом как раз и состоит наблюдение из работы [22]. На самом деле имеются *восемь* общих решений (конечно, по модулю 24 перестановок $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$):

$$\begin{aligned} \text{I :} \quad & \mu_1 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_3 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 + \alpha_4, \\ & \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 - \alpha_4, \quad \nu = \frac{2\alpha_1\alpha_3}{\epsilon_1\epsilon_2}; \\ \text{II :} \quad & \mu_1 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_2 - \alpha_1, \quad \mu_3 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_3 - \alpha_4, \\ & \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_4 - \alpha_3, \quad \nu = \frac{2(\epsilon - \alpha_1)(\epsilon - \alpha_3)}{\epsilon_1\epsilon_2}; \\ \text{III :} \quad & \mu_1 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_3 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_3 - \alpha_4, \\ & \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_4 - \alpha_3, \quad \nu = \frac{2\alpha_1(\epsilon - \alpha_3)}{\epsilon_1\epsilon_2}; \\ \text{IV :} \quad & \mu_1 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_2 - \alpha_1, \quad \mu_2 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_3 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 + \alpha_4, \\ & \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 - \alpha_4, \quad \nu = \frac{2(\epsilon - \alpha_1)\alpha_3}{\epsilon_1\epsilon_2}; \\ \text{V :} \quad & \mu_1 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_2 - \alpha_1, \quad \mu_3 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 + \alpha_4, \\ & \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_4 - \alpha_3, \\ & \nu = \frac{(\alpha_2 + \alpha_4)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_3)\epsilon}{\epsilon_1\epsilon_2}; \\ \text{VI :} \quad & \mu_1 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_3 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 + \alpha_4, \\ & \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_4 - \alpha_3, \\ & \nu = \frac{(\alpha_2 - \alpha_4)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 + (\alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_3)\epsilon}{\epsilon_1\epsilon_2}; \\ \text{VII :} \quad & \mu_1 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_2 - \alpha_1, \quad \mu_3 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_3 - \alpha_4, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= \frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 - \alpha_4, \\
\nu &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_4)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 + (\alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_3)\epsilon}{\epsilon_1 \epsilon_2}; \\
\text{VIII : } \quad \mu_1 &= \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_3 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_3 - \alpha_4, \\
\mu_4 &= \frac{\epsilon}{2} + \alpha_3 - \alpha_4, \\
\nu &= \frac{2\epsilon^2 + (\alpha_2 + \alpha_4)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 + (\alpha_1 + \alpha_3 - 3\alpha_2 - 3\alpha_4)\epsilon}{\epsilon_1 \epsilon_2}.
\end{aligned}$$

При этих значениях параметров легко проверить согласованность (39) на уровнях 2 и 3. Решение III совпадает с решением из работ [22], [25] (после подходящего сдвига μ и изменения обозначений $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$). Первое равенство в (39) соответствует выбору решения I, при других выборах нужно заменить $\alpha_1 + \alpha_2$ подходящим образом.

Таким образом, в самом деле легко поверить, что соответствие “выживает” на всех старших уровнях, но проверка этого факта требует либо трудоемких вычислений, либо нетривиального теоретического доказательства, которое должно являться следующим шагом в изучении гипотезы АГТ.

5.4. Симметрии, нули и полюсы. Обсудим теперь, что является причиной существования восьми решений (58) для соответствия (39). Первые четыре решения связаны друг с другом преобразованием типа $\alpha \rightarrow \epsilon - \alpha$. Действительно, решение I переходит в решение II, когда $\alpha_i \rightarrow \epsilon - \alpha_i$ для всех i ; решение II переходит в решение III при $\alpha_{1,2} \rightarrow \epsilon - \alpha_{1,2}$ и в решение IV при $\alpha_{3,4} \rightarrow \epsilon - \alpha_{3,4}$. Подобным образом связаны и следующие четыре решения: $V \rightarrow VI \rightarrow VII \rightarrow VIII$ задается цепочкой преобразований $\alpha_{1,2} \rightarrow \epsilon - \alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,2,3,4} \rightarrow \epsilon - \alpha_{1,2,3,4}$, $\alpha_{1,2} \rightarrow \epsilon - \alpha_{1,2}$. Другие возможные отражения $\alpha \rightarrow \epsilon - \alpha$ не ведут к новым решениям. Действительно, изменение, скажем, $\alpha_1 \rightarrow \epsilon - \alpha_1$ переводит I в IV и т.д. Таким образом, соотношение АГТ инвариантно относительно отражений любых α_i . Эта симметрия очевидна на конформной стороне соотношения АГТ, поскольку размерности операторов (19) инварианты относительно отражения любых α .

Более интригующей является вторая симметрия, а именно $\mathbb{Z}_2$ -симметрия, которая связывает первые четыре решения из (58) со второй четверкой решений. Эта симметрия задается перестановками $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$, $\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_4$. Заметим, что вместе с этим необходимо также изменить “ $U(1)$ -параметр” ν :

$$\frac{2\alpha_1\alpha_3}{\epsilon_1\epsilon_2} \rightarrow \frac{(\alpha_2 + \alpha_4)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_3)\epsilon}{\epsilon_1\epsilon_2}. \quad (59)$$

Это преобразование ν тривиально только в случае свободных полей, т.е. когда на α наложены условия (20): при этом правая часть (59) совпадает с левой частью. Вообще говоря, это выглядит нетривиальной симметрией (дуальностью) некрасовских статистических сумм для конформных теорий:

$$\sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(m-k+\nu)}{k! \Gamma(\nu)} \sum_{|Y|+|Y'|=k} Z_{Y,Y'}\{\mu\} = \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(m-k+\tilde{\nu})}{k! \Gamma(\tilde{\nu})} \sum_{|Y|+|Y'|=k} Z_{Y,Y'}\{\tilde{\mu}\}.$$

Как уже упоминалось, левая часть (39) подразумевает, что некрасовские статистические суммы $Z_{Y,Y'}$ с нетривиальными $Y, Y' \neq \emptyset$ должны исчезать, если мы положим $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \epsilon$. Это может иметь место, если $a + \mu_i = 0$ и $-a + \mu_j = 0$ при некоторых i и j , что, в свою очередь, подразумевает $\mu_i + \mu_j = 0$. Смотри на решение I в (58), мы убеждаемся, что это действительно так: $\mu_1 + \mu_3 = 0$, если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \epsilon$. Заметим, что все функции $Z_{Y,Y'}$, кроме тривиальной, исчезают в этой точке.

В конформных блоках $\mathcal{B}^{(k)}$ присутствуют полюсы в нулях определителя Каца, которые имеют место при $a = \pm(s_1\epsilon_1 + s_2\epsilon_2)$ и при всех положительных полуцелых s_1 и s_2 таких, что $4s_1s_2 \leq N$ на уровне N . Легко видеть, что знаменатели обращаются в нуль в этих точках, а функции $Z_{Y,Y'}$ имеют в этих точках полюсы в соответствии с формулой (39).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проверили гипотезу АГТ из работы [22] для нескольких первых членов x -разложения четырехточечного конформного блока. Утверждение заключается в том, что универсальная часть конформного блока, зависящего только от пяти размерностей (четыре внешних линии и одна промежуточная) и центрального заряда 2d-КТП, может быть разложена в линейную комбинацию некрасовских статистических сумм для конформно-инвариантной четырехмерной $U(2)$ -теории с четырьмя фундаментальными мультиплетами. Соотношение между подходящим образом параметризованными размерностями и параметрами $a, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ некрасовских функций линейно: если $\Delta_i = \alpha_i(\epsilon - \alpha_i)/\epsilon_1\epsilon_2$ и $c = 1 + 6\epsilon^2/\epsilon_1\epsilon_2$, то $a = \alpha - \epsilon/2$ и μ_i даются любым из восьми выражений в (58). Можно одновременно перемасштабировать все семь параметров $a, \mu_i, \epsilon_1, \epsilon_2$ в некрасовских функциях для $U(2)$, и общий множитель не входит в ответ в конформном случае ($\beta \sim N_f - 2N_c = 0$), поэтому в действительности мы имеем *шесть* свободных параметров – в точности столько же $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta$ и $c)$, сколько на конформной стороне соотношения АГТ.

Проведенная нами проверка касается только малой части гипотезы АГТ. В частности, мы не коснулись технически тривиальной, но концептуально глубокой связи между пертурбативной частью некрасовских функций и структурными константами теории Лиувилля, которая, возможно, является наиболее замечательной частью гипотезы. Обобщения гипотезы очевидны, однако сложность явных вычислений растет, и на настоящем уровне понимания проверки могут быть сделаны только с помощью компьютеров (см. статью [22]). Тем не менее явная проверка “руками” в простейшем случае важна для понимания утверждения, и наша цель в настоящей работе была объяснить в деталях, как это работает, избегая обсуждения физики, стоящей за соответствием. Мы надеемся, что представленная проверка проливает некоторый свет на предлагаемое соотношение между 2d-КТП и четырехмерными калибровочными теориями. Мы предполагаем вернуться к обсуждению различных аспектов этого соотношения в другой работе.

Благодарности. Мы благодарны А. А. Белавину за проясняющие обсуждения. Работа частично поддержана Российским федеральным агентством по атомной

энергии и РФФИ (совместные гранты № 09-02-90493-Ukr, 09-02-93105-CNRS, 09-01-92440-CE, а также гранты № 08-01-00667 (А. В. Маршаков), № 07-02-00878_a (А. Д. Миронов) и № 07-02-00645 (А. Ю. Морозов)). А. В. Маршаков благодарит Программу поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1615.2008.2) и фонд “Династия”; работа А. Д. Миронова и А. Ю. Морозова поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2) и совместной программой 09-02-91005-ANF. А. В. Маршаков благодарен теоретическому отделу ЦЕРН (где данная работа была завершена) за теплый прием.

Список литературы

- [1] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; **431**:3 (1994), 484–550.
- [2] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474.
- [3] R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334.
- [4] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2004), 831–864.
- [5] R. Flume, R. Poghossian, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:14 (2003), 2541–2563.
- [6] A. S. Losev, A. V. Marshakov, N. A. Nekrasov, “Small instantons, little strings and free fermions”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, V. 1, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler, World Sci., Singapore, 2005, 581–621; [arXiv: hep-th/0302191](#).
- [7] N. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics*, Progr. Math., **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 525–596; [arXiv: hep-th/0306238](#).
- [8] H. Nakajima, K. Yoshioka, “Lectures on instanton counting”, *Algebraic Structures and Moduli Spaces*, CRM Proc. Lecture Notes, **38**, eds. J. Hurtubise, E. Markman, AMS, Providence, RI, 2004, 31–101; [arXiv: math/0311058](#); *Invent. Math.*, **162**:2 (2005), 313–355; [arXiv: math/0306198](#).
- [9] S. Shadchin, *SIGMA*, **2** (2006), 008; [arXiv: hep-th/0601167](#).
- [10] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini, G. Travaglini, *Phys. Lett. B*, **480**:3–4 (2000), 365–372; [arXiv: hep-th/0002110](#); U. Bruzzo, F. Fucito, A. Tanzini, G. Travaglini, *Nucl. Phys. B*, **611**:1–3 (2001), 205–226; [arXiv: hep-th/0008225](#); U. Bruzzo, F. Fucito, J. Morales, A. Tanzini, *JHEP*, **05** (2003), 054; [arXiv: hep-th/0211108](#); U. Bruzzo, F. Fucito, *Nucl. Phys. B*, **678**:3 (2004), 638–655; [arXiv: math-ph/0310036](#).
- [11] F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, *JHEP*, **10** (2004), 037; [arXiv: hep-th/0408090](#).
- [12] M. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds”, *Random Systems and Dynamical Systems*, RIMS Kokyuroku, **439**, ed. H. Totoki, Kyoto Univ., Kyoto, 1981, 30–46; M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001; Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **94** (1988), 210–241; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051; [arXiv: hep-th/9312210](#); A. Mironov, A. Morozov, G. Semenoff, *Internat. J. Modern Phys. A*, **11**:28 (1996), 5031–5080; [arXiv: hep-th/9404005](#); A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Integrability and $\mathcal{N}$ -point Hurwitz Numbers* (to appear).
- [13] E. J. Martinec, *Phys. Lett. B*, **367**:1–4 (1996), 91–96; [arXiv: hep-th/9510204](#); A. Gorsky, A. Marshakov, *Phys. Lett. B*, **375**:1–4 (1996), 127–134; [arXiv: hep-th/9510224](#); H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **477**:3 (1996), 855–877; [arXiv: hep-th/9511126](#); **491**, № 3, 1997, 529–573; [arXiv: hep-th/9512161](#); A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **380**:1–2 (1996), 75–80; [arXiv: hep-th/9603140](#); *Nucl. Phys. B*,

- 527:3** (1998), 690–716; [arXiv: hep-th/9802007](#); A. Gorsky, A. Mironov, *Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories* (Chicago, IL, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **18**, eds. H. Aratyn, A. S. Sorin, Kluwer, Dordrecht, 2001, 33–176; [arXiv: hep-th/0011197](#); A. Marshakov, “Integrable many-body systems and gauge theories”, *JHEP*, **03** (2008), 055; [arXiv: 0712.2802](#); A. В. Маршаков, *ТМФ*, **159:2** (2009), 220–242; [arXiv: 0810.1536](#).
- [14] A. Marshakov, *Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems*, World Sci., Singapore, 1999; *Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham Equations*, eds. H. Braden, I. Krichever, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000, 69–91.
- [15] G. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Comm. Math. Phys.*, **209:1** (2000), 97–121; [arXiv: hep-th/9712241](#).
- [16] A. S. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534:3** (1998), 549–611; [arXiv: hep-th/9711108](#).
- [17] A. Marshakov, N. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104; [arXiv: hep-th/0612019](#); A. В. Маршаков, *ТМФ*, **154:3** (2008), 424–450; [arXiv: 0706.2857](#).
- [18] T. Maeda, T. Nakatsu, K. Takasaki, T. Tamakoshi, *JHEP*, **03** (2005), 056; [arXiv: hep-th/0412327](#); *Nucl. Phys. B*, **715:1–2** (2005), 275–303; [arXiv: hep-th/0412329](#); T. Nakatsu, K. Takasaki, *Comm. Math. Phys.*, **285:2** (2009), 445–468; [arXiv: 0710.5339](#).
- [19] A. Okounkov, R. Pandharipande, “Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models”, *Algebraic Geometry – Seattle 2005*, Seattle, 2005, Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., **80**, eds. D. Abramovich, A. Bertram, L. Katzarkov, R. Pandharipande, M. Thaddeus, AMS, Providence, RI, 2009, 325–414; [arXiv: math/0101147](#); *Ann. of Math.* (2), **163:2** (2006), 517–560; [arXiv: math.AG/0204305](#).
- [20] R. Dijkgraaf, “Mirror symmetry and elliptic curves”, *The Moduli Spaces of Curves*, Progr. Math., **129**, eds. D. Abramovich, A. Bertram, L. Katzarkov, R. Pandharipande, M. Thaddeus, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, 149–163; I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125:1** (1997), 51–60; [arXiv: math/9903094](#); A. B. Givental, *Mosc. Math. J.*, **1:4** (2001), 551–568; [arXiv: math/0108100](#); T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Invent. Math.*, **146:2** (2001), 297–327; С. К. Ландо, *УМН*, **57:3(345)** (2002), 29–98; М. Э. Казарян, С. К. Ландо, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68:5** (2004), 91–122; [arXiv: math.AG/0410388](#); *J. Amer. Math. Soc.*, **20:4** (2007), 1079–1089; [arXiv: math/0601760](#); M. Kazarian, *Adv. Math.*, **221:1** (2009), 1–21; [arXiv: 0809.3263](#); V. Bouchard, M. Mariño, *From Hodge Theory to Integrability and TQFT $\hbar^*$ -Geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., **78**, eds. R. Y. Donagi, K. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 263–283; [arXiv: 0709.1458](#); A. Mironov, A. Morozov, “Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry”, *JHEP*, **02** (2009), 024; [arXiv: 0807.2843](#).
- [21] H. Awata, M. Fukuma, S. Odake, Y.-H. Quano, *Lett. Math. Phys.*, **31:4** (1994), 289–298; [arXiv: hep-th/9312208](#); H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, *Nucl. Phys. B*, **449:1–2** (1995), 347–374; [arXiv: hep-th/9503043](#).
- [22] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91** (2010), 167–197; [arXiv: 0906.3219](#).
- [23] A. M. Polyakov, *Modern Phys. Lett. A*, **2:11** (1987), 893–898; V. Knizhnik, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Modern Phys. Lett. A*, **3:8** (1988), 819–826.
- [24] O. I. Bogoyavlensky, *Comm. Math. Phys.*, **51:3** (1976), 201–209; M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **94:6** (1983), 313–404; *Invent. Math.*, **54:3** (1979), 261–269; М. А. Ольшанецкий, А. М. Переломов, *ТМФ*, **45:1** (1980), 3–18; В. Костант, *Adv. Math.*, **34:3** (1979), 195–338; A. Gerasimov, S. Kharchev, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12:14** (1997), 2523–2583; [arXiv: hep-th/9601161](#).
- [25] N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002; [arXiv: 0907.2189](#).

- [26] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [27] А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦНМО, М., 2009.
- [28] А. А. Белавин, *Частное сообщение*.
- [29] V. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348.
- [30] A. Gerasimov, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:13 (1990), 2495–2589; A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **328**:3 (1990), 664–676.
- [31] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1958; М. Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966; И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984; W. Fulton, *Young Tableaux*, With applications to representation theory and geometry, London Math. Soc. Stud. Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997; Г. И. Олшанский, *Введение в алгебраическую комбинаторику. Записки лекций*, <http://www.mccme.ru/ium/s04/algcomb.html>; А. М. Вершик, С. В. Керов, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:1 (1985), 25–36.
- [32] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **04** (2009), 064; [arXiv:0902.2627](#); A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Complete set of Cut-and-Join operators in Hurwitz–Kontsevich theory*, [arXiv:0904.4227](#); A. Morozov, *Unitary integrals and related matrix models*, [arXiv:0906.3518](#).
- [33] H. Dorn, H.-J. Otto, *Phys. Lett. B*, **291**:1–2 (1992), 39–43; [arXiv:hep-th/9206053](#); *Nucl. Phys. B*, **429**:2 (1994), 375–388; [arXiv:hep-th/9403141](#); A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605; [arXiv:hep-th/9506136](#).

Поступила в редакцию 4.11.2009