Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, Действие квантовой группы $sl(2)$ на квантовой плоскости с разделенными степенями в четных корнях из единицы, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 28–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:47:34

© 2010 г.

А. М. Семихатов*

ДЕЙСТВИЕ КВАНТОВОЙ ГРУППЫ $sl(2)$ НА КВАНТОВОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗДЕЛЕННЫМИ СТЕПЕНЯМИ В ЧЕТНЫХ КОРНЯХ ИЗ ЕДИНИЦЫ

Описан нестандартный вариант квантовой плоскости, где базисом являются разделенные степени в четном корне из единицы $q = e^{i\pi/p}$. Ее можно рассматривать как расширение “почти коммутативной” алгебры $\mathbb{C}[X, Y]$, в которой $XY = (-1)^p YX$, за счет нильпотентов. Для этой квантовой плоскости построен комплекс де Рама весс-зуминовского типа и найдено его разложение на представления $2p^3$ -мерной квантовой группы $\overline{U}_q sl(2)$ и ее люстиговского расширения $\mathcal{U}_q sl(2)$; действие квантовой группы определено также на алгебре квантовых дифференциальных операторов на квантовой плоскости.

Ключевые слова: квантовая плоскость, разделенные степени, люстиговская квантовая группа, неразложимое представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые плоскости и их связь с квантовыми группами $sl(2)$ [1]–[4] являются “классическим” предметом, обсуждавшимся в многочисленных публикациях. В настоящей работе рассматривается квантовая плоскость и действие на ней квантовой группы $\overline{U}_q sl(2)$. Последняя возникает в исследовании логарифмических моделей конформной теории поля, где замечательный факт состоит в том, что значительная часть структуры этих моделей описывается в терминах квантовых групп в (четных) корнях из единицы (“логарифмическое” соответствие Каждана–Люстига) [5]–[10]¹⁾. Для $(p, 1)$ -серии логарифмических моделей ($p = 2, 3, \dots$) двойственная по Каждану–Люстигу квантовая группа есть $\mathcal{U}_q sl(2)$ в $2p$ -м корне из единицы

$$q = e^{i\pi/p}. \quad (1.1)$$

¹⁾Логарифмические конформные теории поля расширяют соответствие/двойственность Каждана–Люстига [11] между вертекс-операторными алгебрами и квантовыми группами (см. обзор [12], а также новое развитие в работах [13]–[16]).

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: ams@sci.lebedev.ru

Эта квантовая группа порождена элементами E , K и F с соотношениями

$$KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad (1.2)$$

$$E^p = F^p = 0, \quad K^{2p} = 1 \quad (1.3)$$

и со структурой алгебры Хопфа $\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E$, $\Delta(K) = K \otimes K$, $\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F$, коединицей $\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$, $\varepsilon(K) = 1$ и антиподом $S(E) = -EK^{-1}$, $S(K) = K^{-1}$, $S(F) = -KF$ [5]. Эту $2p^3$ -мерную квантовую группу открывали несколько раз [17]–[19], [5] (см. также [20]–[23]); ее ленточная (ribbon) и (если допустить некоторую вольность в определении) факторизуемая структуры были получены в работах [5], [6] и использовались далее в двойственности Каждана–Люстига.

Мы изучаем вариант квантовой плоскости, несущей $\bar{U}_q sl(2)$ -действие. Квантовые плоскости (которые в корнях из единицы можно определять в нескольких различных вариантах) обладают тем приятным свойством, что они являются $\mathcal{H}$ -модульными алгебрами, где $\mathcal{H}$ – подходящий вариант квантовой $sl(2)$. С нашей точки зрения, такие алгебры требуются при расширении соответствия Каждана–Люстига с логарифмической конформной теорией поля до уровня полей: модульные алгебры дают квантово-групповой аналог алгебр полей в логарифмических моделях. Другое привлекательное свойство квантовых плоскостей, в частности в отношении соответствия Каждана–Люстига, состоит в том, что они допускают “ковариантное дифференциальное исчисление” [2] (в качестве обзора и более общих подходов см., например, работу [24] и приведенную в ней библиографию), т.е. комплекс де Рама, пространство 0-форм которого есть сама квантовая плоскость, а дифференциал коммутирует с действием квантовой группы²⁾.

Мы исследуем вариант, который позволяет расширить $\bar{U}_q sl(2)$ -действие на модульной алгебре до действия соответствующей люстиговской квантовой группы $\mathcal{U}_q sl(2)$, содержащей дополнительную алгебру $sl(2)^{3)}$, генераторы которой условно записываются в виде

$$\mathcal{E} = \frac{E^p}{[p]!}, \quad \mathcal{F} = \frac{F^p}{[p]!};$$

здесь и далее используются стандартные обозначения

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]! = [1][2] \dots [n], \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[m-n]![n]!}.$$

²⁾Заметим, что для квантовой группы, похожей на нашу $\bar{U}_q sl(2)$, квантовая плоскость в корне третьей степени из единицы изучалась в работах [25]–[27].

³⁾Аналог этой алгебры Ли $sl(2)$ с конформной стороны логарифмического соответствия Каждана–Люстига определяет название “триплетная” для введенной в работах [28]–[30] расширенной киральной алгебры логарифмических $(p, 1)$ -моделей (см. также [31]); для триплетной алгебры в работе [32] было найдено описание в терминах ядра скрининга при общем p ; эта алгебра затем исследовалась, в частности, в работах [9], [10], [33]–[35].

Мы используем люстиговский прием разделенных степеней дважды: чтобы расширить квантовую группу $\overline{U}_q sl(2)$ и чтобы “исказить” стандартную квантовую плоскость $\mathbb{C}_q[x, y]$, т.е. ассоциативную алгебру, порожденную элементами x и y с соотношением

$$yx = qxy, \quad (1.4)$$

путем перехода к разделенным степеням

$$x^{\underline{m}} = \frac{x^m}{[m]!}, \quad y^{\underline{m}} = \frac{y^m}{[m]!}, \quad m \geq 0.$$

Конструкции с разделенными степенями [36], [37] интересны, конечно, в корнях из единицы; в случае нашего корня из единицы (1.1) $[p] = 0$, и приведенные выше формулы не являются заменой базиса. Мы в действительности определяем *квантовую плоскость с разделенными степенями* $\mathbb{C}_q[x, y]$ (или просто $\mathbb{C}_q$ для краткости) как линейную оболочку элементов $x^{\underline{n}} y^{\underline{m}}$, $m, n \geq 0$, с (ассоциативным) умножением

$$x^{\underline{m}} x^{\underline{n}} = \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} x^{\underline{m+n}}, \quad y^{\underline{m}} y^{\underline{n}} = \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} y^{\underline{m+n}} \quad (1.5)$$

и соотношениями

$$y^{\underline{n}} x^{\underline{m}} = q^{nm} x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}. \quad (1.6)$$

Квантовая плоскость $\mathbb{C}_q$ несет $\overline{U}_q sl(2)$ -действие, превращающее ее в $\overline{U}_q sl(2)$ -модульную алгебру:

$$\begin{aligned} E(x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= [m+1] x^{\underline{m+1}} y^{\underline{n-1}}, \\ K(x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= q^{m-n} x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}, \\ F(x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= [n+1] x^{\underline{m-1}} y^{\underline{n+1}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $x^{\underline{m}} = 0 = y^{\underline{m}}$ при $m < 0$. Квантовые пространства с разделенными степенями впервые рассматривались в работе [38], причем в большей общности (в произвольном числе размерностей и, соответственно, наделенные $U_q sl(n)$ -действием, которое при $n = 2$ принимает вид (1.7)).

Оказывается полезным смотреть на $\mathbb{C}_q$ как на “почти коммутативное” кольцо многочленов $\mathbb{C}_\varepsilon[X, Y]$, в котором $XY = \varepsilon YX$, где $\varepsilon = (-1)^p$, расширенное с помощью алгебры “инфинитезимальных элементов” $x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}$, $0 \leq m, n \leq p-1$, так, что

$$\begin{aligned} XY &= (-1)^p YX, \\ Xx^{\underline{n}} &= x^{\underline{n}} X, & Xy^{\underline{n}} &= (-1)^n y^{\underline{n}} X, \\ Yx^{\underline{n}} &= (-1)^n x^{\underline{n}} Y, & Yy^{\underline{n}} &= y^{\underline{n}} Y. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда, в частности, X и Y ведут себя под действием алгебры $sl(2)$, связанной с элементами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, “почти” (по модулю знаков при нечетных p) как однородные координаты на $\mathbb{CP}^1$:

$$\mathcal{E}f(X, Y, x, y) = f(X, Y, x, y) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial Y}} X, \quad \mathcal{F}f(X, Y, x, y) = Y \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial X}} f(X, Y, x, y). \quad (1.9)$$

Мы расширяем $\mathbb{C}_q$ до дифференциальной алгебры – алгебры дифференциальных форм Ω_q , которую можно рассматривать как комплекс де Рама (весс-зуминовского типа) для $\mathbb{C}_q$, а далее описываем $\overline{U}_q sl(2)$ -действие на Ω_q и находим, как Ω_q разлагается на $\overline{U}_q sl(2)$ -представления. Мы также отмечаем, как такое разложение перестраивается в терминах представлений люстиговской квантовой группы $\overline{U}_q sl(2)$, и дополнительно замечаем, что нашу квантовую плоскость можно “локализовать” до $\mathbb{C}_q[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}, x, y]$. Дальнейшее, более экзотическое, расширение достигается введением объекта с говорящим обозначением $\log(XY)$. Все это рассматривается в разделе 2. В разделе 3 вводятся квантовые дифференциальные операторы на $\mathbb{C}_q$, они наделяются структурой модульной алгебры, а их применение иллюстрируется построением проективного модуля $\mathcal{P}_1^+$ над квантовой группой.

2. КВАНТОВАЯ ПЛОСКОСТЬ С РАЗДЕЛЕННЫМИ СТЕПЕНЯМИ

В корнях из единицы стандартную квантовую плоскость $\mathbb{C}_q[x, y]$ и квантовую плоскость $\mathbb{C}_q$ с разделенными степенями можно рассматривать как два различных предела в корне из единицы для некой квантовой плоскости “общего вида”. Поэтому приводимые ниже формулы получаются из “стандартных” (например, из $E(x^m y^n) = [n]x^{m+1}y^{n-1}$ и $F(x^m y^n) = [m]x^{m-1}y^{n+1}$ для действия квантовой $sl(2)$): мы переходим к разделенным степеням при общем значении параметра q , когда $x^{\overline{m}} = x^m/[m]!$ является сменой базиса, а в самом конце выбираем q равным нашему q , заданному в (1.1). В частности, эта простая стратегия применяется для построения весс-зуминовского комплекса де Рама [2] на $\mathbb{C}_q$.

2.1. Комплекс де Рама для $\mathbb{C}_q[x, y]$. Определим Ω_q – пространство дифференциальных форм на $\mathbb{C}_q$ – как дифференциальную алгебру на элементах $x^{\overline{m}} y^{\overline{n}}$ и ξ, η с соотношениями (в дополнение к (1.5) и (1.6))

$$\begin{aligned} \xi\eta &= -q\eta\xi, & \xi^2 &= 0, & \eta^2 &= 0, \\ \xi x^{\overline{n}} &= q^{2n} x^{\overline{n}} \xi, & \eta x^{\overline{n}} &= q^n x^{\overline{n}} \eta + q^{2n-2}(q^2 - 1)x^{\overline{n-1}} y \xi, \\ \xi y^{\overline{n}} &= q^n y^{\overline{n}} \xi, & \eta y^{\overline{n}} &= q^{2n} y^{\overline{n}} \eta \end{aligned}$$

и с дифференциалом d ($d^2 = 0$), удовлетворяющим стандартному правилу Лейбница и действующим как

$$d(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}}) = q^{m+n-1} x^{\overline{m-1}} y^{\overline{n}} \xi + q^{n-1} x^{\overline{m}} y^{\overline{n-1}} \eta.$$

В частности, $dx = \xi$ и $dy = \eta$.

Коммутирующее с дифференциалом $\overline{U}_q sl(2)$ -действие на 1-формах имеет вид

$$\begin{aligned} E(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi) &= q[m+1]x^{\overline{m+1}} y^{\overline{n-1}} \xi, & E(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \eta) &= q^{-1}[m+1]x^{\overline{m+1}} y^{\overline{n-1}} \eta + x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi, \\ K(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi) &= q^{m-n+1} x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi, & K(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \eta) &= q^{m-n-1} x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \eta, \\ F(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi) &= [n+1]x^{\overline{m-1}} y^{\overline{n+1}} \xi + q^{n-m} x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \eta, & F(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \eta) &= [n+1]x^{\overline{m-1}} y^{\overline{n+1}} \eta \end{aligned}$$

(на 2-формах $E(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi \eta) = [m+1]x^{\overline{m+1}} y^{\overline{n-1}} \xi \eta$ и $F(x^{\overline{m}} y^{\overline{n}} \xi \eta) = [n+1]x^{\overline{m-1}} y^{\overline{n+1}} \xi \eta$).

Свойство квантовой плоскости с разделенными степенями состоит в том, что мономы $x^{\underline{m-1}}y^{\underline{n-1}}$ при $m, n \geq 1$ являются $\overline{U}_q sl(2)$ -инвариантами, хотя и не являются “константами” по отношению к d . Кроме того, ядро d в $\mathbb{C}_q$ имеет вид $\mathbb{C}1$, а когомологии d в Ω_q^1 нулевые. В то же время $x^{\underline{m}}y^{\underline{n}} = 0$, если $1 \leq m, n \leq p-1$ и $m+n \geq p$.

2.2. “Фробениусов” базис. Идеал (нильрадикал) в $\mathbb{C}_q$ порождается мономами $x^{\underline{m}}y^{\underline{n}}$ при $1 \leq m, n \leq p-1$. Введем новый базис, разбив подходящим образом степени элементов x и y (переходя к “неразделенным” степеням элементов $x^{\underline{p}}$ и $y^{\underline{p}}$).

2.2.1. Квантовую плоскость $\mathbb{C}_q[x, y]$ с разделенными степенями можно эквивалентным образом рассматривать как линейную оболочку элементов

$$X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}, \quad 0 \leq m, n \leq p-1, \quad M, N \geq 0, \quad (2.1)$$

где $X = x^{\underline{p}}$ и $Y = y^{\underline{p}}$; переход от базиса $x^{\underline{m}}y^{\underline{n}}$ при $m, n \geq 0$ к (2.1) имеет следующий явный вид:

$$x^{\underline{Mp+m}} = (-1)^{Mm} x^{\underline{Mp}} x^{\underline{m}} = (-1)^{Mm+pM(M-1)/2} \frac{1}{M!} X^M x^{\underline{m}}$$

и аналогично для $y^{\underline{Np+n}}$ (ср. предложение 2.4 в работе [38]). Здесь и далее q -биномиальные коэффициенты “разрешаются” с использованием общей формулы [37]

$$\begin{bmatrix} Mp+m \\ Np+n \end{bmatrix} = (-1)^{(M-1)Np+mN-nM} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

где $0 \leq m, n \leq p-1$ и $M \geq 1, N \geq 0$. Соотношения с участием X и Y имеют при этом вид, указанный в (1.8). Мы продолжаем использовать обозначение $\mathbb{C}_q$ для $\mathbb{C}_q[X, Y, x, y]$, подразумевая, что все соотношения выполнены. Фактор $\mathbb{C}_q$ по нильрадикалу является “почти коммутативным” кольцом многочленов $\mathbb{C}_\varepsilon[X, Y]$, в котором $XY = \varepsilon YX$ при $\varepsilon = (-1)^p$.

Дифференциал, очевидно, действует как

$$\begin{aligned} d(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= q^{m+n-1} \left\{ \begin{aligned} &X^M Y^N x^{\underline{m-1}} y^{\underline{n}} \xi, & m \neq 0, \\ &-(-1)^{Np} M X^{M-1} Y^N x^{\underline{p-1}} y^{\underline{n}} \xi, & m = 0, \end{aligned} \right. + \\ &+ q^{n-1} \left\{ \begin{aligned} &X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n-1}} \eta, & n \neq 0, \\ &-(-1)^m N X^M Y^{N-1} x^{\underline{m}} y^{\underline{p-1}} \eta, & n = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

В частности, $d(X^M Y^N) = -(-1)^{Np} M q^{-1} X^{M-1} Y^N x^{\underline{p-1}} \xi - N q^{-1} X^M Y^{N-1} y^{\underline{p-1}} \eta$. Соотношения с участием X, Y и ξ, η таковы:

$$\begin{aligned} \xi X &= X \xi, & \eta X^M &= (-1)^M X^M \eta + (-1)^M M (q^{-2} - 1) X^{M-1} x^{\underline{p-1}} y \xi, \\ \xi Y^N &= (-1)^N Y^N \xi, & \eta Y &= Y \eta. \end{aligned}$$

2.2.2. В новом базисе (2.1) $\overline{U}_q sl(2)$ -действие принимает вид

$$\begin{aligned} E(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= \begin{cases} [m+1] X^M Y^N x^{\underline{m+1}} y^{\underline{n-1}}, & n \neq 0, \\ (-1)^m N [m+1] X^M Y^{N-1} x^{\underline{m+1}} y^{\underline{p-1}}, & n = 0, \end{cases} \\ K(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= (-1)^{M+N} q^{m-n} X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}, \\ F(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= \begin{cases} (-1)^{M+N} [n+1] X^M Y^N x^{\underline{m-1}} y^{\underline{n+1}}, & m \neq 0, \\ M(-1)^{M-1+N(p-1)} [n+1] X^{M-1} Y^N x^{\underline{p-1}} y^{\underline{n+1}}, & m = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

а на 1-формах, соответственно,

$$\begin{aligned} E(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \xi) &= \begin{cases} q[m+1] X^M Y^N x^{\underline{m+1}} y^{\underline{n-1}} \xi, & n \neq 0, \\ (-1)^m N q [m+1] X^M Y^{N-1} x^{\underline{m+1}} y^{\underline{p-1}} \xi, & n = 0, \end{cases} \\ E(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \eta) &= X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \xi + \\ &+ \begin{cases} q^{-1} [m+1] X^M Y^N x^{\underline{m+1}} y^{\underline{n-1}} \eta, & n \neq 0, \\ (-1)^m N q^{-1} [m+1] X^M Y^{N-1} x^{\underline{m+1}} y^{\underline{p-1}} \eta, & n = 0, \end{cases} \\ F(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \xi) &= (-1)^{M+N} q^{n-m} X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \eta + \\ &+ \begin{cases} (-1)^{M+N} [n+1] X^M Y^N x^{\underline{m-1}} y^{\underline{n+1}} \xi, & m \neq 0, \\ M(-1)^{M-1+N(p-1)} [n+1] X^{M-1} Y^N x^{\underline{p-1}} y^{\underline{n+1}} \xi, & m = 0, \end{cases} \\ F(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \eta) &= \begin{cases} (-1)^{M+N} [n+1] X^M Y^N x^{\underline{m-1}} y^{\underline{n+1}} \eta, & m \neq 0, \\ M(-1)^{M-1+N(p-1)} [n+1] X^{M-1} Y^N x^{\underline{p-1}} y^{\underline{n+1}} \eta, & m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.3. Разложение на модули. Найдем теперь, как $\overline{\Omega}_q$ разлагается в качестве $\overline{U}_q sl(2)$ -модуля. Появляющиеся ниже представления $\overline{U}_q sl(2)$ – это неприводимые представления $\mathcal{X}_r^\pm$ ($1 \leq r \leq p$), неразложимые представления $\mathcal{W}_r^\pm(n)$ ($1 \leq r \leq p-1$, $n \geq 2$) и проективные модули $\mathcal{P}_{p-1}^\pm$. Все они описаны в работе [6]; кратко напомним только, что $\overline{U}_q sl(2)$ имеет $2p$ неприводимых представлений $\mathcal{X}_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$, где $\dim \mathcal{X}_r^\pm = r$ [5], [6]. Соответствующие проективные накрывающие обозначаются через $\mathcal{P}_r^\pm$, причем “плюс”-представления отличаются от “минус”-представлений тем, что тензорные произведения $\mathcal{X}_r^+ \otimes \mathcal{X}_s^+$ разлагаются на $\mathcal{X}_{r'}^+$ и $\mathcal{P}_{r'}^+$ [12] (а $\mathcal{X}_1^+$ – тривиальное представление). Отметим также, что $\dim \mathcal{P}_r^\pm = 2p$, если $1 \leq r \leq p-1$.

Сначала разложим пространство 0-форм, т.е. саму квантовую плоскость $\mathbb{C}_q$. Ясно, что $\overline{U}_q sl(2)$ -действие ограничивается на каждое градуированное подпространство $(\mathbb{C}_q)_i$, порожденное $x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}$, где $m+n=i$, $i \geq 0$. Чтобы избежать слишком длинного списка формул, приведем в явном виде разложения для подпространств $(\mathbb{C}_q)_{(i)}$, порожденных элементами $x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}$, где $0 \leq m+n \leq i$; из этих разложений несложно извлечь разложение каждой градуированной компоненты.

2.3.1. Лемма. Квантовая плоскость $\mathbb{C}_q$ разлагается на $\overline{U}_q sl(2)$ -представления следующим образом:

$$(\mathbb{C}_q)_{(p-1)} = \bigoplus_{r=1}^p \mathcal{X}_r^+, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{X}_r^+ \in (\mathbb{C}_q)_{r-1}$ для всех $r = 1, 2, \dots, p$;

$$(\mathbb{C}_q)_{(2p-1)} = (\mathbb{C}_q)_{(p-1)} \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-1} \mathcal{W}_r^-(2) \oplus 2\mathcal{X}_p^-, \quad (2.3)$$

где $\mathcal{W}_r^-(2) \in (\mathbb{C}_q)_{p+r-1}$ для всех $r = 1, 2, \dots, p-1$ и $\mathcal{X}_p^- \in (\mathbb{C}_q)_{2p-1}$; в общем случае

$$(\mathbb{C}_q)_{(np-1)} = (\mathbb{C}_q)_{((n-1)p-1)} \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-1} \mathcal{W}_r^\pm(n) \oplus n\mathcal{X}_p^\pm, \quad (2.4)$$

где знак плюс берется для нечетных n , а знак минус – для четных n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из явного построения и подсчета размерностей; общая структура хорошо видна уже из низших градуировок. При $1 \leq r \leq p$ неприводимые представления $\mathcal{X}_r^+$ реализуются как

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightleftharpoons[F]{E} & x & \xrightleftharpoons[F]{E} & y & \xrightleftharpoons[F]{E} & \dots & \xrightleftharpoons[F]{E} & y & \xrightleftharpoons[F]{E} & y \end{array}$$

(E - и F -стрелки представляют соответствующие отображения с точностью до ненулевых множителей). Построенные таким образом $\mathcal{X}_r^+$ исчерпывают пространство $(\mathbb{C}_q)_{(p-1)}$, что дает (2.2). При переходе к следующему интервалу градуировок, как в (2.3), легче всего умножить приведенные выше мономы на X или Y и далее заметить, что (с точностью до знаковых множителей) эта операция коммутирует с $\overline{U}_q s\ell(2)$ -действием, за исключением половины случаев “на концах”, что выражается тождествами

$$\begin{aligned} XE(X^M Y^N x^m y^n) - E(X^{M+1} Y^N x^m y^n) &= 0, \\ YE(X^M Y^N x^m y^n) - (-1)^{Mp} E(X^M Y^{N+1} x^m y^n) &= \\ = -\delta_{n,0} (-1)^{Mp+m} [m+1] X^M Y^N x^{m+1} y^{p-1}, \\ XF(X^M Y^N x^m y^n) + F(X^{M+1} Y^N x^m y^n) &= \\ = \delta_{m,0} (-1)^{M+N(p-1)} [n+1] X^M Y^N x^{p-1} y^{n+1}, \\ YF(X^M Y^N x^m y^n) + (-1)^{Mp} F(X^M Y^{N+1} x^m y^n) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно получается, что при каждом $r = 1, \dots, p-1$ элементы

$$\begin{array}{c} Xx \xrightleftharpoons[F]{E} \dots \xrightleftharpoons[F]{E} Xy \xrightleftharpoons[F]{E} \\ \searrow F \quad \quad \quad \swarrow E \\ x \xrightleftharpoons[F]{E} y^r \xrightleftharpoons[F]{E} \dots \xrightleftharpoons[F]{E} x^r y^{p-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} Yx \xrightleftharpoons[F]{E} \dots \xrightleftharpoons[F]{E} Yy \xrightleftharpoons[F]{E} \\ \swarrow E \quad \quad \quad \searrow F \\ x \xrightleftharpoons[F]{E} y^r \xrightleftharpoons[F]{E} \dots \xrightleftharpoons[F]{E} x^r y^{p-1} \end{array} \quad (2.5)$$

реализуют представление [6]

$$\mathcal{W}_r^-(2) = \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_r^- & & \mathcal{X}_r^- \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{X}_{p-r}^+ & \end{array}. \quad (2.6)$$

Эти представления $\mathcal{W}_r^-(2)$ линейно порождают пространство $(\mathbb{C}_q)_{(2p-2)}$. В подпространстве $(\mathbb{C}_q)_{2p-1}$ данная картина вырождается в сумму двух представлений $\mathcal{X}_p^-$, линейно порожденных элементами $Xx^{p-1}, \dots, Xy^{p-1}$ и $Yx^{p-1}, \dots, Yy^{p-1}$, откуда следует результат (2.3).

Более длинные “змеевидные” представления получаются аналогично; например, в модуле $\mathcal{W}_r^+(3)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_r^+ & & \mathcal{X}_r^+ & & \mathcal{X}_r^+ \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{X}_{p-r}^- & & \mathcal{X}_{p-r}^- & \end{array}$$

самый левый элемент в левом $\mathcal{X}_r^+$ есть X^2x^{r-1} , а самый правый элемент в правом $\mathcal{X}_r^+$ есть Y^2y^{r-1} . Эти $\mathcal{W}_r^+(3)$ при $1 \leq r \leq p-1$ исчерпывают $(\mathbb{C}_q)_{(3p-2)}$, а при $r = p$ “змея” вырождается в $3\mathcal{X}_p^+$ и т.д., что и приводит к (2.4) в общем случае.

Далее для описания разложения 1-форм $\underline{\Omega}_q^1$ используем градуировку подпространствами $(\underline{\Omega}_q^1)_i = (\mathbb{C}_q)_i \xi + (\mathbb{C}_q)_i \eta$, $i \geq 0$, и в соответствии с этим положим $(\underline{\Omega}_q^1)_{(i)} = (\mathbb{C}_q)_{(i)} \xi + (\mathbb{C}_q)_{(i)} \eta$. Для тех представлений $\mathcal{X} \in \mathbb{C}_q$, которые не меняются под действием d , будем обозначать через $d\mathcal{X}$ их изоморфные образы в $\underline{\Omega}_q^1$, чтобы отличать в приводимых ниже разложениях d -точные представления от остальных.

2.3.2. Лемма. *Пространство 1-форм $\underline{\Omega}_q^1$ разлагается на $\overline{\mathcal{U}}_{qsl}(2)$ -представления следующим образом:*

$$(\underline{\Omega}_q^1)_{(p-1)} = \bigoplus_{r=2}^p d\mathcal{X}_r^+ \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \mathcal{X}_r^+ \oplus \mathcal{P}_{p-1}^+, \quad (2.7)$$

где $d\mathcal{X}_r^+ \in (\underline{\Omega}_q^1)_{r-2}$, $\mathcal{X}_r^+ \in (\underline{\Omega}_q^1)_r$ и $\mathcal{P}_{p-1}^+ \in (\underline{\Omega}_q^1)_{p-1}$;

$$(\underline{\Omega}_q^1)_{(2p-1)} = (\underline{\Omega}_q^1)_{(p-1)} \oplus \bigoplus_{r=2}^{p-1} d\mathcal{W}_r^-(2) \oplus 2d\mathcal{X}_p^- \oplus \mathcal{X}_p^+ \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \mathcal{W}_r^-(2) \oplus 2\mathcal{P}_{p-1}^-, \quad (2.8)$$

где $d\mathcal{W}_r^-(2) \in (\underline{\Omega}_q^1)_{p+r-2}$, $d\mathcal{X}_p^- \in (\underline{\Omega}_q^1)_{2p-2}$, $\mathcal{X}_p^+ \in (\underline{\Omega}_q^1)_p$, $\mathcal{W}_r^-(2) \in (\underline{\Omega}_q^1)_{p+r}$ и $\mathcal{P}_{p-1}^- \in (\underline{\Omega}_q^1)_{2p-1}$;

$$(\underline{\Omega}_q^1)_{(3p-1)} = (\underline{\Omega}_q^1)_{(2p-1)} \oplus \bigoplus_{r=2}^{p-1} d\mathcal{W}_r^+(3) \oplus 3d\mathcal{X}_p^+ \oplus 2\mathcal{X}_p^- \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \mathcal{W}_r^+(3) \oplus 3\mathcal{P}_{p-1}^+, \quad (2.9)$$

где $d\mathcal{W}_r^+(3) \in (\underline{\Omega}_q^1)_{2p+r-2}$, $d\mathcal{X}_p^+ \in (\underline{\Omega}_q^1)_{3p-2}$, $\mathcal{X}_p^- \in (\underline{\Omega}_q^1)_{2p}$, $\mathcal{W}_r^+(3) \in (\underline{\Omega}_q^1)_{2p+r}$ и $\mathcal{P}_{p-1}^+ \in (\underline{\Omega}_q^1)_{3p-1}$; наконец, в общем случае

$$\begin{aligned} (\underline{\Omega}_q^1)_{(np-1)} = & (\underline{\Omega}_q^1)_{((n-1)p-1)} \oplus \bigoplus_{r=2}^{p-1} d\mathcal{W}_r^\pm(n) \oplus n d\mathcal{X}_p^\pm \oplus \\ & \oplus (n-1)\mathcal{X}_p^\mp \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \mathcal{W}_r^\pm(n) \oplus n\mathcal{P}_{p-1}^\pm, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где верхние знаки берутся при нечетных n , а нижние знаки – при четных n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО снова проведем путем прямого построения. Сначала, обращаясь к $(\underline{\Omega}_q^1)_{(p-1)}$ в (2.7), заметим, что это подпространство содержит представление $d\mathcal{X}_r^+ \approx \mathcal{X}_r^+$, порожденное элементами dx^{r-1} , $d(x^{r-2}y)$, $\dots$, dy^{r-1} при каждом $r = 2, \dots, p$ (понятно, что синглет $\mathcal{X}_1^+$, порожденный единицей при $r = 1$, аннулируется дифференциалом d). При каждом $r = 1, \dots, p-2$ имеется также представление $\mathcal{X}_r^+$, порожденное 1-формами

$$x^{r-1}y\xi - q[r]x^r\eta, \dots, [i+1]x^{r-i-1}y^{i+1}\xi - [r-i]q^{i+1}x^{r-i}y^i\eta, \dots, [r]y^r\xi - q^rxy^{r-1}\eta$$

(при $r = 1$ мы имеем просто синглет $y\xi - q\eta$); при $r = p-1$, однако, эти элементы лежат в образе d и составляют цокль проективного модуля $\mathcal{P}_{p-1}^+$, который реализуется как

$$\begin{array}{ccccc} & x^{p-1}\eta & \xrightleftharpoons[E]{F} & \dots & \xrightleftharpoons[E]{F} & xy^{p-2}\eta \\ & \searrow E & & & \searrow E & \searrow F \\ x^{p-1}\xi & & & & & y^{p-1}\eta \\ & \searrow F & & & \searrow E & \\ & d(x^{p-1}y) & \xrightleftharpoons[E]{F} & \dots & \xrightleftharpoons[E]{F} & d(xy^{p-1}) \end{array} \quad (2.11)$$

Это дает (2.7).

В следующей градуировке имеем $(\underline{\Omega}_q^1)_p = d\mathcal{W}_2^-(2) \oplus \mathcal{X}_p^+$, где $\mathcal{X}_p^+$ порождается элементами

$$x^{p-1}y\xi, \dots, [i+1]x^{p-i-1}y^{i+1}\xi - [i]q^{i+1}x^{p-i}y^i\eta, \dots, xy^{p-1}\eta$$

(при $i = 0$ на левом конце и $i = p-1$ на правом). Далее,

$$(\underline{\Omega}_q^1)_{(2p-2)} = (\underline{\Omega}_q^1)_{(p-1)} \oplus \mathcal{X}_p^+ \oplus \bigoplus_{r=2}^{p-1} d\mathcal{W}_r^-(2) \oplus 2d\mathcal{X}_p^- \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \mathcal{W}_r^-(2),$$

где модули $\mathcal{W}_r^-(2)$ при $r = 1, \dots, p-2$ порождаются элементами (лево-правые стрелки, а также ненулевые множители опущены)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} Xx^{r-1}y\xi \\ -q[r]Xx^r\eta \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} [r]Xy^r\xi \\ -q^rXxy^{r-1}\eta \end{array} & & \begin{array}{c} Yx^{r-1}y\xi \\ -q[r]Yx^r\eta \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} [r]Yy^r\xi \\ -qYxy^{r-1}\eta \end{array} \\ & \searrow F & \searrow E \\ & x^{p-1}y^{r+1}\xi, \dots, x^{r+1}y^{p-1}\eta & \end{array} \quad (2.12)$$

В следующей градуировке два модуля $\mathcal{P}_{p-1}^-$, входящие в (2.8), имеют структуру

$$\begin{array}{ccccc}
 & Xx^{\frac{p-1}{2}}\eta, \dots, Xxy^{\frac{p-2}{2}}\eta & & Yx^{\frac{p-1}{2}}\eta, \dots, Yxy^{\frac{p-2}{2}}\eta & \\
 & \swarrow E \quad \searrow F & & \swarrow E \quad \searrow F & \\
 Xx^{\frac{p-1}{2}}\xi & & Xy^{\frac{p-1}{2}}\eta & & Yx^{\frac{p-1}{2}}\xi & & Yy^{\frac{p-1}{2}}\eta & (2.13) \\
 & \searrow F \quad \swarrow E & & \searrow F \quad \swarrow E & \\
 & d(Xx^{\frac{p-1}{2}}y), \dots, d(Xxy^{\frac{p-1}{2}}) & & d(Yx^{\frac{p-1}{2}}y), \dots, d(Yxy^{\frac{p-1}{2}}) &
 \end{array}$$

(лево-правые стрелки снова опущены для компактности). Наконец, имеем

$$(\Omega_q^1)_{(3p-2)} = (\Omega_q^1)_{(2p-1)} \oplus 2\mathcal{X}_p^- \oplus \bigoplus_{r=2}^{p-1} d\mathcal{W}_r^+(3) \oplus 3d\mathcal{X}_p^+ \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \mathcal{W}_r^+(3),$$

где, например, каждое $\mathcal{W}_r^+(3)$ порождается мономами, которые легко построить, начиная из $X^2x^{\frac{r-1}{2}}y\xi - q[r]X^2x^{\frac{r}{2}}\eta$ в левом верхнем углу и т.д.; картина непосредственно обобщается на старшие градуировки путем умножения на степени элементов X и Y , что и приводит к (2.10).

2.4. Расширение до люстиговской квантовой группы.

2.4.1. Из приведенных выше формул для $\overline{\mathcal{U}}_qsl(2)$ -действия следует, разумеется, что E^p и F^p действуют на $\underline{\Omega}_q$ нулем. Но, снова используя люстиговский прием, можно определить действие люстиговской – с разделенными степенями – квантовой группы $\mathcal{U}_qsl(2)$, расширяющей нашу конечномерную $\overline{\mathcal{U}}_qsl(2)$. Как и ранее, будем временно полагать, что параметр деформации q квантовой группе находится в общем положении, и вычислим действие $\mathcal{E} = E^p/[p]!$ и $\mathcal{F} = F^p/[p]!$, а затем положим $q = q$. Это дает

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= N(-1)^{(N-1)p+n+m} X^{M+1} Y^{N-1} x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}, \\
 \mathcal{F}(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) &= M(-1)^{(M-1)p} X^{M-1} Y^{N+1} x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}.
 \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, $\mathcal{H} = [\mathcal{E}, \mathcal{F}]$ действует на $\underline{\mathbb{C}}_q$ как

$$\mathcal{H}(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}) = (-1)^{(M+N-1)p+m+n} (M - N) X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}}.$$

Таким образом получается действие, приведенное в (1.9), т.е. по модулю “легкой некоммутативности” при нечетных p стандартное $sl(2)$ -действие на функциях однородных координат на $\mathbb{CP}^1$. С точки зрения этого пространства $\mathbb{CP}^1$ элементы $x^{\underline{m}}$ и $y^{\underline{n}}$ следует рассматривать как некие “инфинитезимальности”, почти (по модулю знаков) невидимые для алгебры $\mathcal{U}sl(2)$, порожденной элементами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

Действие $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ на 1-формы Ω_q^1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \xi) &= -N(-1)^{(N-1)p+n+m} X^{M+1} Y^{N-1} x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \xi, \\
 \mathcal{E}(X^M Y^N x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \eta) &= -N(-1)^{(N-1)p+n+m} X^{M+1} Y^{N-1} x^{\underline{m}} y^{\underline{n}} \eta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{m,0} \begin{cases} N(-1)^n X^M Y^{N-1} x^{\frac{p-1}{2}} y^{\frac{n+1}{2}} \xi, & 0 \leq n \leq p-2, \\ X^M Y^N x^{\frac{p-1}{2}} \xi, & n = p-1, \end{cases} \\
\mathcal{F}(X^M Y^N x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{n}{2}} \xi) &= M(-1)^{(M-1)p} X^{M-1} Y^{N+1} x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{n}{2}} \xi + \\
& + \delta_{n,0} \begin{cases} M(-1)^{(M-1)p+m} q^{-m-1} X^{M-1} Y^N x^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{p-1}{2}} \eta, & 0 \leq m \leq p-2, \\ (-1)^{(M+N)p} X^M Y^N y^{\frac{p-1}{2}} \eta, & m = p-1, \end{cases} \\
\mathcal{F}(X^M Y^N x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{n}{2}} \eta) &= M(-1)^{(M-1)p} X^{M-1} Y^{N+1} x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{n}{2}} \eta.
\end{aligned}$$

2.4.2. $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представления. Используя приведенные выше формулы, легко заметить, что $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представления, входящие в (2.2)–(2.10), собираются в $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представления. Простой результат состоит в том, что разложение (2.4) переписывается в терминах $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представлений:

$$(\mathbb{C}_q)_{(np-1)} = (\mathbb{C}_q)_{((n-1)p-1)} \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-1} \underbrace{\mathcal{W}_r^{\pm}(n)}_{\text{неразложимый}} \oplus \underbrace{n\mathcal{X}_p^{\pm}}_{\text{проективный}},$$

где скобка снизу указывает, что $\mathcal{W}_r^{\pm}(n)$ становится (неразложимым) $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представлением, а n экземпляров $\mathcal{X}_p^{\pm}$ собираются в (неприводимое) $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представление⁴). Аналогично, (2.10) принимает вид

$$(\Omega_q^1)_{(np-1)} = (\Omega_q^1)_{((n-1)p-1)} \oplus \bigoplus_{r=2}^{p-1} \underbrace{d\mathcal{W}_r^{\pm}(n)}_{\text{проективный}} \oplus \underbrace{n d\mathcal{X}_p^{\pm}}_{\text{проективный}} \oplus \underbrace{(n-1)\mathcal{X}_p^{\mp}}_{\text{проективный}} \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-2} \underbrace{\mathcal{W}_r^{\pm}(n)}_{\text{неразложимый}} \oplus \underbrace{n\mathcal{P}_{p-1}^{\pm}}_{\text{проективный}},$$

где $(n-1)\mathcal{X}_p^{\mp}$ – неприводимый, $\mathcal{W}_r^{\pm}(n)$ – неразложимый, а $n\mathcal{P}_{p-1}^{\pm}$ – проективный $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модуль.

Чтобы убедиться в этом, сначала заметим, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ действуют тривиально на (2.2); каждое из представлений $\mathcal{X}_r^{\pm}$ квантовой группы $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ является также неприводимым $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представлением. Далее, в (2.3) для модулей $\mathcal{W}_r^-(2)$, приведенных в (2.6), элементы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ действуют между двумя $\mathcal{X}_r^-$, а кроме того (в данном младшем, $n=2$, случае модулей $\mathcal{W}_r^{\pm}(n)$), действуют тривиально на цоколе,

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{E} & \\
& \text{---} & \\
& \mathcal{F} & \\
& \text{---} & \\
\mathcal{X}_r^- & & \mathcal{X}_r^- \\
& \searrow & \swarrow \\
& \mathcal{X}_{p-r}^+ &
\end{array} \quad (2.14)$$

что дает неразложимое $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представление. По той же схеме сумма двух $\mathcal{X}_p^-$ в (2.3) становится неприводимым $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представлением. Это обобщается и на общий случай (2.4): $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ действуют горизонтально на всех модулях $\mathcal{W}_r^{\pm}(n)$, а

⁴) Представления $\mathcal{U}_q \mathfrak{sl}(2)$ недавно систематически исследовались в работе [15], где использовались более развитые обозначения, нежели подчеркивание скобкой.

также на n экземплярах $\mathcal{X}_p^-, n \geq 2$, превращая их соответственно в неразложимый и неприводимый $\mathcal{U}_q sl(2)$ -модули.

Переходя к пространству 1-форм, отметим, что каждое из $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представлений в (2.7) остается представлением квантовой группы $\mathcal{U}_q sl(2)$; $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ действуют тривиально на $\mathcal{X}_r^+$ и переставляют “углы” модулей $\mathcal{P}_{p-1}^+$, показанных в (2.11):

$$\mathcal{F}(x^{p-1}\xi) = y^{p-1}\eta, \quad \mathcal{E}(y^{p-1}\eta) = x^{p-1}\xi$$

(при этом $\mathcal{P}_{p-1}^+$ становится проективным $\mathcal{U}_q sl(2)$ -модулем).

Далее, $\mathcal{X}_p^+$ в (2.8) остается неприводимым $\mathcal{U}_q sl(2)$ -модулем (на котором $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ действуют тривиально), а каждый из $\mathcal{W}_r^-(2)$ является неразложимым $\mathcal{U}_q sl(2)$ -модулем; в (2.12), например $\mathcal{F}(Xx^{r-1}y\xi - q[r]Xx^r\eta) = Yx^{r-1}y\xi - q[r]Yx^r\eta$ и т.д. Сумма двух $\mathcal{P}_{p-1}^-$ в (2.8) становится проективным $\mathcal{U}_q sl(2)$ -модулем; верхний этаж в (2.8) (см. (2.13)) является дублетом под действием алгебры Ли $sl(2)$, порожденной $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, средний этаж представляет собой синглет $(Xy^{p-1}\eta - (-1)^p Yx^{p-1}\xi)$ плюс триплет $(Xx^{p-1}\xi, Xy^{p-1}\eta + (-1)^p Yx^{p-1}\xi, Yy^{p-1}\eta)$, а нижний этаж также является дублетом.

Организация $\mathcal{U}_q sl(2)$ -представлений в общем случае (2.10) теперь очевидна; ее можно получить из картины, имеющейся в младших градуировках, путем умножения на степени элементов X и Y .

2.4.3. “Локализация Люстига–Фробениуса”. Формулы из п. 2.2 можно продолжить с неотрицательных целых степеней на любые целые степени элементов X и Y . Это означает переход от $\mathbb{C}_q = \mathbb{C}_q[X, Y, x, y]$ к $\mathbb{C}_q[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}, x, y]$, где немедленно возникают бесконечномерные представления $\mathcal{U}_q sl(2)$. Опишем очень кратко, как это происходит.

Рассмотрим картину, представленную в (2.5) (где $1 \leq r \leq p-1$). Умножение всех мономов на X^{-1} приводит к разрушению юго-восточной F -стрелки и $\mathcal{F}$ -стрелок, показанных в (2.14), так, что получается следующее:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \swarrow \text{---} & & \searrow \text{---} \\ x^{r-1} \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons y^{r-1} & & X^{-1}Yx^{r-1} \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons X^{-1}Yy^{r-1} \\ & \nwarrow \mathcal{E} & \\ & X^{-1}x^{\frac{p-1}{2}}y^r \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons X^{-1}x^ry^{\frac{p-1}{2}} & \end{array}$$

Но эта структура теперь продолжается направо до бесконечности, и в результате возникает картина, показанная на рис. 1 (верхняя диаграмма), где генераторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ осуществляют отображение между соответствующими мономами в каждом блоке. “Зеркально отраженная” картина возникает после умножения (2.6) на Y^{-1} . Умножение на $X^{-1}Y^{-1}$ дает нижнюю диаграмму на рис. 1 (где стрелки $\rightleftharpoons$ опущены для краткости).

После расширения за счет X^{-1} и Y^{-1} дифференциал d приобретает ненулевые кохомологи в $\Omega^1\mathbb{C}[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}, x, y]$, представленные элементами $X^{-1}x^{\frac{p-1}{2}}\xi$ и $Y^{-1}y^{\frac{p-1}{2}}\eta$.

Рис. 1. Два бесконечномерных $\mathcal{U}_{4sl(2)}$ -представления, реализованных на квантовой плоскости, расширенной отрицательными степенями X и Y .

Рис. 2. $\mathcal{U}_{4sl(2)}$ -представление, построенное с использованием $\log(XY)$ на расширенной квантовой плоскости, и его отображение под действием дифференциала.

$$\begin{aligned} d\log(XY) &= -\mathfrak{q}^{-1}X^{-1}x\frac{p-1}{p}\xi - \mathfrak{q}^{-1}Y^{-1}y\frac{p-1}{p}\eta, \\ E\log(XY) &= Y^{-1}xy\frac{p-1}{p}, & \mathcal{E}\log(XY) &= (-1)^pXY^{-1}, \\ K\log(XY) &= \log(XY), \\ F\log(XY) &= -X^{-1}x\frac{p-1}{p}y, & \mathcal{F}\log(XY) &= (-1)^pX^{-1}Y. \end{aligned}$$
$$XY^{-1} \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \xleftarrow{\mathcal{E}} X^{-1}Y$$

⁵⁾Правило коммутации ∂_x и ∂_y , наследуемое из комплекса vess-зуминовского типа, не совпадает с аналогичным правилом в работе [38] (где это также отмечено).

3.2. Пусть $\mathcal{D}$ – линейная оболочка элементов $x^m y^n \partial_x^a \partial_y^b$, $m, n, a, b \geq 0$. Следующие коммутационные соотношения легко проверяются ($\ell \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\partial_x^\ell x &= q^{-2\ell} x \partial_x^\ell + q^{-\ell+1} [\ell] \partial_x^{\ell-1} - q^{-2\ell+1} [\ell] (q - q^{-1}) y \partial_x^{\ell-1} \partial_y, \\ \partial_y^\ell y &= q^{-2\ell} y \partial_y^\ell + q^{-\ell+1} [\ell] \partial_y^{\ell-1}\end{aligned}\quad (3.1)$$

(здесь и в аналогичных соотношениях ниже x, y следует понимать как операторы умножения на x, y). Тогда получаем, что ∂_x^p и ∂_y^p обладают несколько специальными свойствами: они (анти)коммутируют со всеми разделенными степенями x^n и y^n при $n < p$. В общем случае имеем

$$\begin{aligned}\partial_x^\ell x^m y^n &= q^{-2\ell m - \ell n} x^m y^n \partial_x^\ell + \\ &+ \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^i q^{-2m\ell - \ell n + i(\ell + m - n) - j(\ell + 1) - i(i-1)/2} \begin{bmatrix} \ell \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n + j \\ j \end{bmatrix} (1 - q^2)^j x^{m-i} y^{j+n} \partial_x^{\ell-i} \partial_y^j, \\ \partial_y^\ell x^m y^n &= q^{-2\ell n - \ell m} x^m y^n \partial_y^\ell + \sum_{i=1}^{\ell} q^{-2n\ell - \ell m + i(n + \ell) - i(i-1)/2} \begin{bmatrix} \ell \\ i \end{bmatrix} x^m y^{n-i} \partial_y^{\ell-i}\end{aligned}$$

для всех неотрицательных целых m, n и ℓ , а потому коммутационные соотношения элементов ∂_x^p и ∂_y^p с элементами из $\mathbb{C}_q$ можно записать как

$$\begin{aligned}\partial_x^p X^M Y^N x^m y^n &= (-1)^{Np+n} X^M Y^N x^m y^n \partial_x^p + M q^{-p(p-1)/2} X^{M-1} Y^N x^m y^n, \\ \partial_y^p X^M Y^N x^m y^n &= (-1)^{Mp+m} X^M Y^N x^m y^n \partial_y^p + (-1)^{Mp} N q^{-p(p-1)/2} X^M Y^{N-1} x^m y^n\end{aligned}$$

при $M, N \geq 1$ и $0 \leq m, n \leq p-1$. Другими словами, ∂_x^p и ∂_y^p можно представить как (левые) производные:

$$\partial_x^p = i^{1-p} \frac{\partial}{\partial X}, \quad \partial_y^p = i^{1-p} \frac{\partial}{\partial Y}$$

(очевидно, $\partial_x^p \partial_y^p = (-1)^p \partial_y^p \partial_x^p$). Здесь использовалось равенство $q^{p(p-1)/2} = i^{p-1}$.

3.3. Лемма. Соотношения в $\mathcal{D}$ совместны со структурой $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модульной алгебры, если действие $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ определено следующим образом:

$$\begin{aligned}E \partial_x &= -q \partial_y, & E \partial_y &= 0, \\ K \partial_x &= q^{-1} \partial_x, & K \partial_y &= q \partial_y, \\ F \partial_x &= 0, & F \partial_y &= -q^{-1} \partial_x.\end{aligned}$$

Доказательство сводится к проверке того факта, что соотношения из п. 3.2 отображаются друг в друга под действием $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$. Тогда $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ действуют на дифференциальных операторах как

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\partial_x^{Mp+m} \partial_y^{Np+n}) &= -(-1)^{(N+1)p+n} M \partial_x^{(M-1)p+m} \partial_y^{(N+1)p+n}, \\ \mathcal{F}(\partial_x^{Mp+m} \partial_y^{Np+n}) &= -(-1)^{(M+1)p+m} N \partial_x^{(M+1)p+m} \partial_y^{(N-1)p+n}.\end{aligned}$$

По модулю знаковых множителей это действие представляет собой $sl(2)$ -действие на $\mathbb{C}[\partial_x^p, \partial_y^p] = \mathbb{C}[\partial/\partial X, \partial/\partial Y]$.

3.4. Проективный $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуль в терминах квантовых дифференциальных операторов. В качестве применения q -дифференциальных операторов на $\mathbb{C}_q$ построим проективный $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуль $\mathcal{P}_1^+$ (см. [5]) следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tau & & \\ & E \swarrow & & \searrow F & \\ \lambda_{p-1} & \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons & \lambda_1 & & \rho_1 \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons \rho_{p-1} \\ & F \searrow & & \swarrow E & \\ & & \beta & & \end{array}$$

где горизонтальные стрелки $\rightleftharpoons$, как и прежде, обозначают действие F и E с точностью до ненулевых множителей, а конкретные выражения для элементов модуля имеют следующий вид:

$$\tau = -q^{1+p(p-1)/2} \sum_{i=1}^p a_i x^{\underline{p-i}} y^{\underline{i-1}} \partial_x^{p-i} \partial_y^{i-1}, \quad \text{где} \quad a_i = \alpha + \sum_{j=2}^i \frac{q^{1-j}}{[j-1]}; \quad (3.2)$$

далее, $\lambda_i = E^i \tau$ и $\rho_i = F^i \tau$, где, в частности,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= q^{p(p-1)/2} \sum_{i=1}^{p-1} q^{i+2} x^{\underline{p-i}} y^{\underline{i-1}} \partial_x^{p-i-1} \partial_y^i, \\ \lambda_{p-1} &= (-1)^{p-1} [p-1]! q^{1+p(p-1)/2} x^{\underline{p-1}} \partial_y^{p-1}, \\ \rho_1 &= -q^{p(p-1)/2} \sum_{i=1}^{p-1} q^{i+1} x^{\underline{i-1}} y^{\underline{p-i}} \partial_x^i \partial_y^{p-1-i}, \\ \rho_{p-1} &= -[p-1]! q^{2+p(p-1)/2} y^{\underline{p-1}} \partial_x^{p-1}; \end{aligned}$$

наконец, $\beta = F\lambda_1 = E\rho_1$ есть

$$\beta = -q^{1+p(p-1)/2} \sum_{i=1}^p x^{\underline{p-i}} y^{\underline{i-1}} \partial_x^{p-i} \partial_y^{i-1}.$$

В выражении (3.2) для τ величина α — это произвольная константа (ясно, что добавление константы ξ ко всем a_i сводится к переопределению $\tau \mapsto \tau + \beta\xi$. Нормировка выбрана так, что β оказывается проектором, $\beta\beta = \beta$ (отметим также полезное тождество $[p-1]!(q - q^{-1})^{p-1} = pq^{p(p-1)/2}$).

“Крылья” проективного модуля коммутативны: $\lambda_i \lambda_j = \lambda_j \lambda_i$, $\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i$ для всех $0 \leq i, j \leq p-1$, где $\lambda_0 = \rho_0 = \beta$, более того, $\lambda_i \lambda_j = \rho_i \rho_j = 0$, если $i + j \geq p$.

Сходная (но заметно более простая) реализация модуля $\mathcal{P}_1^+$ в некоторой $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модульной алгебре квантовых дифференциальных операторов на “квантовой прямой” была дана в работе [14].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые плоскости дают естественные примеры модульных алгебр над квантовыми группами $sl(2)$ (квантовые плоскости не позволяют реализовать все представления квантовой $sl(2)$, но соответствующие квантовые дифференциальные операторы составляют модульную алгебру, содержащую, в частности, проективные модули). Согласно работе [2] $GL_q(2)$ можно охарактеризовать как “квантовую группу автоморфизмов” комплекса де Рама квантовой плоскости. Это способствует появлению квантовых плоскостей в различных ситуациях, где квантовые группы $sl(2)$ играют некую роль. С точки зрения соответствия Каждана–Люстига старая тема действия квантовой $sl(2)$ на квантовой плоскости интересна в случае четных корней из единицы, подробности которого были рассмотрены в нашей работе.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 08-01-00737) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1615.2008.2).

Список литературы

- [1] Yu. I. Manin, *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*, Université de Montréal, CRM, Montréal, 1988, Preprint CRM-1561, Montreal Univ.
- [2] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **18**:2 (1990), 302–312.
- [3] Ю. И. Манин, *ТМФ*, **92**:3 (1992), 425–450.
- [4] L. A. Lambe, D. E. Radford, *J. Algebra*, **154**:1 (1993), 228–288.
- [5] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Comm. Math. Phys.*, **265**:1 (2006), 47–93; [arXiv: hep-th/0504093](#).
- [6] А. М. Гайнутдинов, А. М. Семихатов, И. Ю. Типунин, Б. Л. Фейгин, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 398–427; [arXiv: math.QA/0512621](#).
- [7] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **757**:3 (2006), 303–343; [arXiv: hep-th/0606196](#).
- [8] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *J. Math. Phys.*, **48**:3 (2007), 032303; [arXiv: math.QA/0606506](#).
- [9] D. Adamović, A. Milas, *Selecta Math. New Ser.*, **15**:4 (2009), 535–561; [arXiv: 0902.3417](#).
- [10] K. Nagatomo, A. Tsuchiya, *The triplet vertex operator algebra $W(p)$ and the restricted quantum group at root of unity*, [arXiv: 0902.4607](#).
- [11] D. Kazhdan, G. Lusztig, *J. Amer. Math. Soc.*, **6**:4 (1993), 905–947; 949–1011; **7**:2 (1994), 335–381; 383–453.
- [12] А. М. Семихатов, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 510–535; [arXiv: 0705.4267](#).
- [13] А. М. Гайнутдинов, *ТМФ*, **159**:2 (2009), 194–206.
- [14] А. М. Семихатов, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 5–33; [arXiv: 0809.0144](#).
- [15] P. V. Bushlanov, B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **818**:3 (2009), 179–195; [arXiv: 0901.1602](#).
- [16] А. М. Семихатов, *A Heisenberg double addition to the logarithmic Kazhdan–Lusztig duality*, [arXiv: 0905.2215](#).
- [17] А. Ю. Алексеев, Д. В. Глущенко, А. В. Ляховская, *Алгебра и анализ*, **6**:5 (1994), 88–125.
- [18] R. Suter, *Comm. Math. Phys.*, **163**:2 (1994), 359–393.
- [19] J. Xiao, *Canad. J. Math.*, **49**:4 (1997), 772–787.
- [20] P. Furlan, L. Hadjiivanov, I. Todorov, *Lett. Math. Phys.*, **82**:2–3 (2007), 117–151; [arXiv: 0710.1063](#).
- [21] Y. Arike, *Symmetric linear functions of the restricted quantum group $\overline{U}_q sl_2(\mathbb{C})$* , [arXiv: 0706.1113](#).

- [22] K. Erdmann, E. L. Green, N. Snashall, R. Taillefer, *J. Pure Appl. Algebra*, **204**:2 (2006), 413–454; [arXiv: math.RT/0410017](#).
- [23] H. Kondo, Y. Saito, *Indecomposable decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum universal enveloping algebra associated to $\mathfrak{sl}_2$* , [arXiv: 0901.4221](#).
- [24] А. П. Исаев, *ЭЧАЯ*, **28**:3, 685–752.
- [25] R. Coquereaux, *Lett. Math. Phys.*, **42**:4 (1997), 309–328; [arXiv: hep-th/9610114](#).
- [26] L. Dąbrowski, F. Nesti, P. Siniscalco, *Internat. J. Modern Phys. A*, **13**:24 (1998), 4147–4162; [arXiv: hep-th/9705204](#).
- [27] R. Coquereaux, A. O. García, R. Trinchero, *Rev. Math. Phys.*, **12**:2 (2000), 227–285; [arXiv: math-ph/9807012](#).
- [28] H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **259**:4 (1991), 448–455.
- [29] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **477**:1 (1996), 293–318; [arXiv: hep-th/9604026](#).
- [30] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **386**:1–4 (1996), 131–137; [arXiv: hep-th/9606050](#).
- [31] M. R. Gaberdiel, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:25 (2003), 4593–4638; [arXiv: hep-th/0111260](#).
- [32] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Comm. Math. Phys.*, **247**:3 (2004), 713–742; [arXiv: hep-th/0306274](#).
- [33] N. Carqueville, M. Flohr, *J. Phys. A*, **39**:4 (2006), 951–966; [arXiv: math-ph/0508015](#).
- [34] H. Eberle, M. Flohr, *J. Phys. A*, **39**:49 (2006), 15245–15286; [arXiv: hep-th/0604097](#).
- [35] D. Adamović, A. Milas, *Adv. Math.*, **217**:6 (2008), 2664–2699; [arXiv: 0707.1857](#).
- [36] G. Lusztig, *Geom. Dedicata*, **35**:1–3 (1990), 89–113.
- [37] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progress Math., **110**, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [38] N. Hu, *J. Algebra*, **232**:2 (2000), 507–540.

Поступила в редакцию 7.09.2009,
после доработки 24.12.2009