Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, Исследование существенного спектра одного матричного оператора, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 62–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:07:49

© 2010 г.

Т. Х. Расулов*

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрен матричный оператор H , соответствующий системе с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке. Описана структура существенного спектра оператора H . Доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем четырех отрезков.

Ключевые слова: матричный оператор, система с несохраняющимся ограниченным числом частиц, пространство Фока, обобщенная модель Фридрихса, существенный спектр, собственное значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой рассмотрен матричный оператор H , соответствующий системе с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке, доказано, что его существенный спектр совпадает со спектром оператора канала, и выделены “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра. Кроме того, в указанной работе получен аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H . В настоящей работе мы докажем, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем четырех отрезков и изучим расположение этих отрезков.

Отметим, что данный матричный оператор H представляет собой некомпактное возмущение оператора H_0 , рассмотренного в работах [2]–[5], и является симметричным вариантом матричного оператора из статьи [6]. Положение существенного спектра оператора H и аналог уравнения Фаддеева для собственных функций в более общем случае изучены в работе [7]. Оператор H также можно представить как решетчатый аналог операторов, рассмотренных в работах [8], [9].

Существенный спектр операторов, соответствующих системам с сохраняющимся ограниченным числом частиц, т.е. операторов Шредингера, заданных на непрерывном пространстве и на решетке, изучался во многих работах (см., например, труды [10]–[13]). В частности, в работе [12] показано, что существенный спектр

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан. E-mail: rth@mail.ru

четырёхчастичного оператора Шредингера на решетке состоит из объединения не более чем четырех отрезков, а в работе [13] доказано, что существенный спектр оператора Шредингера на решетке состоит из объединения не более чем конечного числа отрезков даже в случае, когда соответствующий двухчастичный оператор Шредингера на решетке имеет бесконечное число собственных значений.

Структура настоящей статьи следующая. В разделе 2 мы вводим матричный оператор H как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, формулируем задачу и представляем основные результаты работы. В разделе 3 мы рассматриваем некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса; при выполнении одного естественного условия исследование этих свойств может быть сведено к анализу спектральных свойств операторов с более простой структурой. В разделе 4 мы выводим аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H . Раздел 5 посвящен доказательству основных результатов.

Следует отметить, что в непрерывном случае “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви непрерывного спектра операторов, рассмотренных в работах [8], [9], представляют собой полубесконечные прямые и пересекаются. В нашем случае “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра матричного оператора H заполняют отрезки конечной длины и могут не иметь точек пересечения, другими словами, в спектре возникает лакуна. Теорема 3 утверждает, что такие лакуны существуют при некоторых естественных условиях.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1. Матричный оператор. Пусть $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$ – трехмерный куб с отождествлением противоположных граней, $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ – декартово произведение, $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, $L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ – прямая сумма пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 = L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется *трехчастичным обрезанным подпространством* пространства Фока.

Рассмотрим матричный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и задающийся как

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где операторы $H_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 (H_{00}f_0)_0 &= w_0f_0, & (H_{01}f_1)_0 &= \int v_0(s)f_1(s)ds, & (H_{10}f_0)_1(p) &= v_0(p)f_0, \\
 (H_{11}f_1)_1(p) &= w_1(p)f_1(p), & (H_{12}f_2)_1(p) &= \int v_1(s)f_2(p,s)ds, \\
 (H_{21}f_1)_2(p,q) &= \frac{v_1(p)f_1(q) + v_1(q)f_1(p)}{2}, \\
 (H_{22}f_2)_2(p,q) &= w_2(p,q)f_2(p,q) - v_2(p) \int v_2(s)f_2(s,q)ds - \\
 &\quad - v_2(q) \int v_2(s)f_2(p,s)ds.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, w_0 – фиксированное вещественное число, $w_1(\cdot)$, $v_i(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные (ненулевые) функции на $\mathbb{T}^3$, $i = 0, 1, 2$, а $w_2(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначная непрерывная симметричная функция на $(\mathbb{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования. В современной математической физике операторы H_{01} и H_{12} называются операторами уничтожения, а операторы H_{10} и H_{21} – операторами рождения. Отметим, что в рассматриваемой системе число рождений и уничтожений частиц равно единице, т.е. $H_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.

Легко можно проверить, что оператор H , определенный матрицей (1) и действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, ограничен и самосопряжен.

2.2. Основные понятия. Введем ограниченный и самосопряженный оператор (из семейства операторов обобщенной модели Фридрихса) $h(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, действующий в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ по формуле

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}(p) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
 (h_{00}(p)f_0)_0 &= w_1(p)f_0, & (h_{01}f_1)_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int v_1(s)f_1(s)ds, \\
 (h_{10}f_0)_1(q) &= \frac{v_1(q)f_0}{\sqrt{2}}, & h_{11}(p) &= h_{11}^0(p) - v, \\
 (h_{11}^0(p)f_1)_1(q) &= w_2(p,q)f_1(q), & (vf_1)_1(q) &= v_2(q) \int v_2(s)f_1(s)ds.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть

$$m = \min_{p,q \in \mathbb{T}^3} w_2(p,q), \quad M = \max_{p,q \in \mathbb{T}^3} w_2(p,q)$$

и $\sigma_{\text{disc}}(h(p))$ – дискретный спектр оператора $h(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$.

Положим

$$\Sigma = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m; M].$$

Следующая теорема описывает положение существенного спектра оператора H .

ТЕОРЕМА 1. *Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H) = \Sigma$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множества

$$\sigma_{\text{two}}(H) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)), \quad \sigma_{\text{three}}(H) = [m; M]$$

называются “*двухчастичной*” и “*трехчастичной*” ветвями существенного спектра оператора H .

Сформулируем следующее важное для дальнейших рассуждений условие на функции в (2).

УСЛОВИЕ. Пусть функция $v(\cdot) = v_1(\cdot)v_2(\cdot)$ является нечетной на $\mathbb{T}^3$, а функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbb{T}^3)^2$ и является четной по переменным p и q (в отдельности) на $\mathbb{T}^3$.

Отметим, что функция $w_2(p, q) = \sum_{i=1}^3 (2 - \cos p_i - \cos q_i)$, $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3$, $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}^3$, удовлетворяет этому условию.

При выполнении данного условия дискретный спектр оператора $h(p)$ совпадает с объединением дискретных спектров операторов

$$h_1(p) \equiv h_{11}(p), \quad h_2(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}^0(p) \end{pmatrix} \quad (5)$$

при всех $p \in \mathbb{T}^3$ (см. лемму 1 ниже). Тогда справедливо равенство

$$\sigma_{\text{two}}(H) = \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_i(p)). \quad (6)$$

Из определения операторов $h_i(p)$, $i = 1, 2$, видно, что они имеют более простую структуру, чем $h(p)$.

Положим

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_2(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_2(p, q).$$

При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^3$ определим регулярные в $\mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)]$ функции

$$\Delta_1(p; z) = 1 - \int \frac{v_2^2(s) ds}{w_2(p, s) - z}, \quad \Delta_2(p; z) = w_1(p) - z - \frac{1}{2} \int \frac{v_1^2(s) ds}{w_2(p, s) - z},$$

являющиеся определителями Фредгольма, ассоциированными с операторами $h_1(p)$ и $h_2(p)$ соответственно.

Для любых $p, q \in \mathbb{T}^3$ и $z < m$ справедливо неравенство $w_2(p, q) - z > 0$, откуда следует, что

$$\int \frac{v_i^2(s) ds}{w_2(p, s) - z} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Так как функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbb{T}^3)^2$, а функции $v_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, непрерывны на $\mathbb{T}^3$, оба интеграла в (7) конечны.

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что $\Delta_i(0; m) = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta_i(p; m)$ и, следовательно, функции $\Delta_i(\cdot; m)$ непрерывны на $\mathbb{T}^3$, $i = 1, 2$. Аналогично функция $\Delta_2(\cdot; M)$ также непрерывна на $\mathbb{T}^3$.

2.3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 2. *Существенный спектр оператора H представляет собой объединение не более чем четырех отрезков.*

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \min_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_1(p)), & b_1 &= \max_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_1(p)), \\ a_2 &= \min \left\{ \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_2(p)) \cap (-\infty; m] \right\}, & b_2 &= \max \left\{ \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_2(p)) \cap (-\infty; m] \right\}, \\ a_3 &= \min \left\{ \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_2(p)) \cap [M; +\infty) \right\}, & b_3 &= \max \left\{ \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_2(p)) \cap [M; +\infty) \right\}. \end{aligned}$$

Следующая теорема описывает структуру существенного спектра оператора H .

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_1(p; m) \geq 0$ и выполняется приведенное в п. 2.2 условие. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) \leq 0$. Тогда:
 - 1.1) если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [m; M]$;
 - 1.2) если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [a_2; M]$, где $a_2 < m$;
 - 1.3) если $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) < 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [a_2; b_2] \cup [m; M]$, где $b_2 < m$.
2. Пусть $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) \leq 0$ и $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) > 0$. Тогда:
 - 2.1) если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [m; b_3]$, где $b_3 > M$;
 - 2.2) если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [a_2; b_3]$, где $a_2 < m$ и $b_3 > M$;
 - 2.3) если $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) < 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [a_2; b_2] \cup [m; b_3]$, где $b_2 < m$ и $b_3 > M$.
3. Пусть $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) > 0$. Тогда:
 - 3.1) если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [m; M] \cup [a_3; b_3]$, где $a_3 > M$;
 - 3.2) если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [a_2; M] \cup [a_3; b_3]$, где $a_2 < m$ и $a_3 > M$;
 - 3.3) если $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; m) < 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) = [a_2; b_2] \cup [m; M] \cup [a_3; b_3]$, где $b_2 < m$ и $a_3 > M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_1(p; m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_1(p; m) \geq 0$ (или $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_1(p; m) < 0$) и выполняется условие из п. 2.2, то можно сформулировать аналогичную теорему, заменив $[m; M]$ на $[a_1; M]$, где $a_1 < m$ (или, соответственно, заменив $[m; M]$ на $[a_1; b_1] \cup [m; M]$, где $b_1 < m$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 играет важную роль при нахождении необходимых и достаточных условий конечности (см. работу [4]) или бесконечности (см. работу [5]) числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра оператора H .

3. НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $H_I(P)$

Пусть оператор $h_0(p)$ действует в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как

$$h_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}^0(p) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{T}^3.$$

Оператор возмущения $h(p) - h_0(p)$ оператора $h_0(p)$ является ограниченным само-сопряженным оператором, ранг которого не выше 3. Следовательно, по известной теореме Вейля (см. книгу [11], теорема XIII.14) о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга существенный спектр оператора $h(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$. Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(h_0(p)) = [m(p); M(p)]$, поэтому

$$\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p); M(p)]. \quad (8)$$

Теперь установим связь между собственными значениями операторов $h(p)$ и $h_i(p)$, $i = 1, 2$. Верна следующая

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие из п. 2.2. Тогда для любого $p \in \mathbb{T}^3$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h(p)$, если и только если z является собственным значением хотя бы одного из операторов $h_i(p)$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ есть собственное значение оператора $h(p)$ и пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ — соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} (w_1(p) - z)f_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int v_1(q') f_1(q') dq' &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v_1(q) f_0 + (w_2(p, q) - z)f_1(q) - v_2(q) \int v_2(q') f_1(q') dq' &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу равенства (8) для любых $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ и $q \in \mathbb{T}^3$ справедливо соотношение $w_2(p, q) - z \neq 0$ при всех $p \in \mathbb{T}^3$. Из второго уравнения этой системы имеем

$$f_1(q) = \frac{v_2(q) C_{f_1}}{w_2(p, q) - z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_1(q) f_0}{w_2(p, q) - z}, \quad (10)$$

где

$$C_{f_1} = \int v_2(q') f_1(q') dq'. \quad (11)$$

Подставляя выражение для f_1 в первое уравнение системы и равенство (11), учитывая условие из п. 2.2, получим, что система уравнений (9) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\Delta_2(p; z) f_0 = 0, \quad \Delta_1(p; z) C_{f_1} = 0$$

имеет ненулевое решение, т.е. при условии $\Delta_1(p; z) \Delta_2(p; z) = 0$. Если в (4) положить $v_2(q) \equiv 0$, то $h(p) = h_2(p)$ (ср. формулы (3) и (5)), при этом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h_2(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_2(p; z) = 0$.

Аналогично можно показать [14], что число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h_1(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, тогда и только тогда, когда $\Delta_1(p; z) = 0$. Лемма доказана.

Для $p \in \mathbb{T}^3$ положим $V(p) = h(p) - h_0(p)$.

ЛЕММА 2. *Для любого фиксированного $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $V(p)$ имеет не более одного положительного и не более двух отрицательных простых собственных значений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $V(p)f = zf$, $z \neq 0$, $f \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, на собственные значения оператора V эквивалентно системе уравнений

$$(w_1(p) - z) f_0 + \frac{(v_1, f_1)_1}{\sqrt{2}} = 0, \quad \frac{v_1(q) f_0}{\sqrt{2}} - v_2(q) (v_2, f_1)_1 = z f_1, \quad (12)$$

где $(\cdot, \cdot)_1$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}_1$. Так как $z \neq 0$, из второго уравнения системы получаем, что

$$f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_1(q)}{z} f_0 - \frac{v_2(q)}{z} C_{f_1}, \quad (13)$$

где C_{f_1} определена в формуле (11). Подставляя выражение для f_1 в первое уравнение системы и в равенство (11), имеем

$$\begin{aligned} \left(z^2 - w_1(p)z - \frac{\|v_1\|_1^2}{2} \right) f_0 + \frac{(v_1, v_2)_1}{\sqrt{2}} C_{f_1} &= 0, \\ \frac{(v_1, v_2)_1}{\sqrt{2}} f_0 + (z + \|v_2\|_1^2) C_{f_1} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь через $\|\cdot\|_1$ обозначена норма в $\mathcal{H}_1$.

Положим для $z \neq 0$, $p \in \mathbb{T}^3$

$$\begin{aligned} P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) &= \left(z^2 - w_1(p)z - \frac{\|v_1\|_1^2}{2} \right) (z + \|v_2\|_1^2) - \frac{(v_1, v_2)_1^2}{2} = \\ &= P_0(p; z) - \frac{(v_1, v_2)_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Система уравнений (14) имеет решение тогда и только тогда, когда детерминант этой системы равен нулю, т.е. когда $P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) = 0$. Таким образом, проблеме поиска собственных значений оператора $V(p)$ мы свели к задаче анализа нулей полинома $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot)$ степени 3.

Пользуясь неравенством $|(v_1, v_2)_1| \leq \|v_1\|_1 \|v_2\|_1$, получим

$$P_0(p; z) \geq P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) \geq P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; z),$$

где

$$P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; z) = P_0(p; z) - \frac{\|v_1\|_1^2 \|v_2\|_1^2}{2}.$$

Возможны три случая: $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ ортогональны, $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ параллельны, $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ не ортогональны и не параллельны. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Пусть $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ ортогональны. Тогда

$$P_0(p; z) = P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) > P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; z).$$

В этом случае числа

$$\begin{aligned} \hat{z}_1(p) &= -\|v_2\|_1^2 < 0, & \hat{z}_2(p) &= \frac{w_1(p) - \sqrt{w_1^2(p) + 2\|v_1\|_1^2}}{2} < 0, \\ \hat{z}_3(p) &= \frac{w_1(p) + \sqrt{w_1^2(p) + 2\|v_1\|_1^2}}{2} > 0 \end{aligned}$$

являются нулями полинома $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot) = P_0(p; \cdot)$, т.е. собственными значениями оператора $V(p)$ для каждого $p \in \mathbb{T}^3$. Отметим, что числа $\hat{z}_n(p)$, $n = 1, 2, 3$, являются нулями полинома $P_0(p; \cdot)$ и в случае, когда $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ не ортогональны.

Пусть $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ параллельны. Тогда

$$P_0(p; z) > P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) = P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; z).$$

В этом случае полином $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot)$ записывается в виде

$$P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) = z \left(z^2 - z(\|v_2\|_1^2 - w_1(p)) - \left(\frac{\|v_1\|_1^2}{2} + w_1(p)\|v_2\|_1^2 \right) \right).$$

Отсюда видно, что числа

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(p) &= 0, & \tilde{z}_2(p) &= \frac{\|v_2\|_1^2 - w_1(p) - \sqrt{(\|v_2\|_1^2 + w_1(p))^2 + 2\|v_1\|_1^2}}{2} < 0, \\ \tilde{z}_3(p) &= \frac{\|v_2\|_1^2 - w_1(p) + \sqrt{(\|v_2\|_1^2 + w_1(p))^2 + 2\|v_1\|_1^2}}{2} > 0 \end{aligned}$$

являются нулями полинома $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot) = P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; \cdot)$, т.е. собственными значениями оператора $V(p)$ для каждого $p \in \mathbb{T}^3$. Заметим, что числа $\tilde{z}_n(p)$, $n = 1, 2, 3$, являются нулями полинома $P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; \cdot)$ и в случае, когда $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ не параллельны.

Пусть $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ не ортогональны и не параллельны. Тогда

$$P_0(p; z) > P_{(v_1, v_2)_1}(p; z) > P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; z).$$

Положим $a_1(p) = \min\{\hat{z}_1(p), \hat{z}_2(p)\}$, $a_2(p) = \max\{\hat{z}_1(p), \hat{z}_2(p)\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что для любого $p \in \mathbb{T}^3$ справедливы неравенства $\tilde{z}_2(p) < \hat{z}_2(p)$, $\tilde{z}_2(p) < \hat{z}_1(p)$, $\hat{z}_3(p) < \tilde{z}_3(p)$ (в противном случае применяется аналогичный метод). Тогда отсюда следует, что

$$\tilde{z}_2(p) < a_1(p) \leq a_2(p) < \tilde{z}_1(p) = 0 < \hat{z}_3(p) < \tilde{z}_3(p).$$

Так как числа $\tilde{z}_2(p)$ и $a_1(p)$ являются нулями полиномов $P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; \cdot)$ и $P_0(p; \cdot)$ соответственно, имеем

$$\begin{aligned} P_{(v_1, v_2)_1}(p; \tilde{z}_2(p)) &> P_{\|v_1\|_1 \|v_2\|_1}(p; \tilde{z}_2(p)) = 0, \\ 0 &= P_0(p; a_1(p)) < P_{(v_1, v_2)_1}(p; a_1(p)), \end{aligned}$$

т.е. на границе сегмента $[\tilde{z}_2(p), a_1(p)]$ полином $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot)$ имеет разные знаки. Следовательно, существует точка $z_1(p) \in (\tilde{z}_2(p), a_1(p))$ такая, что $P_{(v_1, v_2)_1}(p; z_1(p)) = 0$. Аналогично можно показать, что существуют числа $z_2(p) \in (a_2(p), \tilde{z}_1(p))$ и $z_3(p) \in (\hat{z}_3(p), \tilde{z}_3(p))$, которые являются нулями полинома $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot)$. Так как $P_{(v_1, v_2)_1}(p; \cdot)$ есть полином третьей степени, эти нули являются простыми. Видно, что $z_1(p) < z_2(p) < 0$ и $z_3(p) > 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для любого $p \in \mathbb{T}^3$ имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(V(p)) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $p \in \mathbb{T}^3$ рассмотрим уравнение $V(p)f = 0$ относительно $f \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, которое эквивалентно системе уравнений

$$w_1(p)f_0 + \frac{(v_1, f_1)_1}{\sqrt{2}} = 0, \quad \frac{v_1(q)f_0}{\sqrt{2}} - v_2(q)(v_2, f_1)_1 = 0. \quad (15)$$

Можно показать, что элементы подпространства

$$L_0 = \{f = (0, f_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 : (v_i, f_1)_1 = 0, \quad i = 1, 2\}$$

являются решениями системы уравнений (15). Видно, что $\dim L_0 = +\infty$. Это означает, что $0 \in \sigma_{\text{ess}}(V(p))$.

Теперь докажем обратное включение, т.е. что $\sigma_{\text{ess}}(V(p)) \subset \{0\}$ для любого $p \in \mathbb{T}^3$. Пусть z – произвольная точка множества $\sigma(V(p)) \setminus \{0\}$. Тогда $z \in \sigma_{\text{disc}}(V(p))$ (см. доказательство леммы 2). Следовательно,

$$\sigma(V(p)) \setminus \{0\} \subset \sigma_{\text{disc}}(V(p)) = \sigma(V(p)) \setminus \sigma_{\text{ess}}(V(p)).$$

Это означает, что включение $\sigma_{\text{ess}}(V(p)) \subset \{0\}$ выполняется для любого $p \in \mathbb{T}^3$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $V(p)$ может иметь только ненулевые конечнократные собственные значения, а число $z = 0$ является бесконечнократным собственным значением оператора $V(p)$.

Введем обозначения

$$|V(p)| = (V^2(p))^{1/2}, \quad V_{\pm}(p) = \frac{V(p) \pm |V(p)|}{2},$$

где $(V^2(p))^{1/2}$ – неотрицательный квадратный корень из оператора $V^2(p)$. Тогда $V_+(p) \geq 0$, $V_-(p) \leq 0$ и $V(p) = V_+(p) + V_-(p)$. Так как операторы $V_+(p)$ и $-V_-(p)$ неотрицательны, существуют неотрицательные квадратные корни $V_+^{1/2}(p)$ и $(-V_-)^{1/2}(p)$ из этих операторов. Для любого фиксированного $z < m(p)$ ($z > M(p)$) оператор $h_0(p) - zI + V_+(p)$ (оператор $h_0(p) - zI + V_-(p)$) является обратимым и положительным (отрицательным); здесь I – единичный оператор в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Пусть

$$\begin{aligned} r_+(p; z) &= (h_0(p) - zI + V_+(p))^{-1}, & z < m(p), \\ r_-(p; z) &= (-(h_0(p) - zI + V_-(p)))^{-1}, & z > M(p), \end{aligned}$$

и $r_{\pm}^{1/2}(p; z)$ – положительные квадратные корни из $r_{\pm}(p; z)$. Обозначим через $N_-(p; z)$ (через $N_+(p; z)$) число собственных значений оператора $h_2(p)$, лежащих левее $z < m(p)$ (правее $z > M(p)$).

Пусть дан ограниченный самосопряженный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, не имеющий точек существенного спектра правее z . Обозначим через $\mathcal{H}_A(z)$ такое подпространство, что $(Af, f) > z(f, f)$ для любого $f \in \mathcal{H}_A(z)$ и положим $n(z, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(z)} \dim \mathcal{H}_A(z)$. По определению чисел $N_-(p; z)$ и $N_+(p; z)$ имеем

$$\begin{aligned} N_-(p; z) &= n(-z, -h(p)), & -z > -m(p), \\ N_+(p; z) &= n(z, h(p)), & z > M(p). \end{aligned}$$

Следующая лемма является реализацией известного принципа Бирмана–Швингера для оператора $h(p)$ (см. работы [5], [14]).

ЛЕММА 4. *Для любого $z < m(p)$ оператор $(-V_-)^{1/2}(p)r_+(p; z)(-V_-)^{1/2}(p)$ является компактным и*

$$N_-(p; z) = n(1, (-V_-)^{1/2}(p)r_+(p; z)(-V_-)^{1/2}(p)). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $(-V_-)^{1/2}(p)$ имеет конечный ранг, а оператор $r_+(p; z)(-V_-)^{1/2}(p)$ является ограниченным, отсюда следует, что оператор $(-V_-)^{1/2}(p)r_+(p; z)(-V_-)^{1/2}(p)$ компактен.

Запишем оператор $h(p)$ как $h(p) = h_0(p) + V_+(p) + V_-(p)$. Пусть элемент $u \in \mathcal{H}_{-h(p)}(-z)$, т.е. $((h_0(p) - zI + V_+(p))u, u) < ((-V_-(p))u, u)$. Тогда

$$(r_+^{1/2}(p; z)(-V_-(p))r_+^{1/2}(p; z)g, g) > 0, \quad g = (h_0(p) - zI + V_-(p))^{1/2}u.$$

Следовательно, $N_-(p; z) \leq n(1, r_+^{1/2}(p; z)(-V_-(p))r_+^{1/2}(p; z))$. Аналогично можно получить обратное неравенство. Учитывая эти факты, имеем, что

$$N_-(p; z) = n(1, r_+^{1/2}(p; z)(-V_-(p))r_+^{1/2}(p; z)). \quad (17)$$

Если операторы T_1 и T_2 ограничены, то все нетривиальные собственные значения и их кратность для операторов T_1T_2 и T_2T_1 совпадают (см., например, монографию [15]), дискретный спектр оператора $r_+^{1/2}(p; z)(-V_-(p))r_+^{1/2}(p; z)$ совпадает с дискретным спектром оператора $(-V_-)^{1/2}(p)r_+(p; z)(-V_-)^{1/2}(p)$. Следовательно,

$$n(1, r_+^{1/2}(p; z)(-V_-)(p)r_+^{1/2}(p; z)) = n(1, (-V_-)^{1/2}(p)r_+(p; z)(-V_-(p))^{1/2}). \quad (18)$$

Учитывая равенства (17) и (18), получим (16). Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.

ЛЕММА 5. Для любого $z > M(p)$ оператор $V_+^{1/2}(p)r_-(p; z)V_+^{1/2}(p)$ является компактным и

$$N_+(p; z) = n(-1, -V_+^{1/2}(p)r_-(p; z)V_+^{1/2}(p)).$$

Теперь мы готовы к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 6. Для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более двух (не более одного) простых собственных значений, лежащих левее $t(p)$ (правее $M(p)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} n(1, (-V_-)^{1/2}(p)r_+(p; z)(-V_-)^{1/2}(p)) &\leq 2, \\ n(-1, -V_+^{1/2}(p)r_-(p; z)V_+^{1/2}(p)) &\leq 1. \end{aligned}$$

Из лемм 4 и 6, а также последних неравенств вытекает, что

$$N_-(p; z) \leq 2, \quad z < t(p), \quad \text{и} \quad N_+(p; z) \leq 1, \quad z > M(p).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма доказана в работах [2], [5], [14]; она описывает множество собственных значений операторов $h_i(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 7. 1. Пусть $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_i(p; t) \geq 0$. Тогда для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_i(p)$, $i = 1, 2$, не имеет собственных значений, лежащих левее точки t .

2. Пусть $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_i(p; t) < 0$ и $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_i(p; t) \geq 0$. Тогда существует непустое открытое множество $G_i \subsetneq \mathbb{T}^3$ такое, что при всех $p \in G_i$ оператор $h_i(p)$ имеет единственное собственное значение $E_1^{(i)}(p)$, лежащее левее t , а для любого $p \in \mathbb{T}^3 \setminus G_i$ оператор $h_i(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее t .

3. Пусть $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_i(p; t) < 0$. Тогда для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_i(p)$ имеет единственное собственное значение $E_1^{(i)}(p)$, лежащее левее t .

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 7.

ЛЕММА 8. 1. Пусть $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) \leq 0$. Тогда для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_2(p)$ не имеет собственных значений, лежащих правее M .

2. Пусть $\max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) > 0$ и $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) \leq 0$. Тогда существует непустое открытое множество $D \subsetneq \mathbb{T}^3$ такое, что при всех $p \in D$ оператор $h_2(p)$ имеет единственное собственное значение $E_2(p)$, лежащее правее M , а для любого $p \in \mathbb{T}^3 \setminus D$ оператор $h_2(p)$ не имеет собственных значений, лежащих правее M .

3. Пусть $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) > 0$. Тогда для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_2(p)$ имеет единственное собственное значение $E_2(p)$, лежащее правее M .

Для доказательства теоремы 3 мы используем также следующую лемму (см. работу [14]).

ЛЕММА 9. Для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_1(p)$ не имеет собственных значений, лежащих правее M .

4. АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА H

Введем обозначение $\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0 \oplus \bar{\mathcal{H}}_1 \oplus \bar{\mathcal{H}}_2$, где $\bar{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0$, $\bar{\mathcal{H}}_1 = \bar{\mathcal{H}}_2 = \mathcal{H}_1$. Пусть операторная матрица $T(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ действует в пространстве $\bar{\mathcal{H}}$ по формуле

$$T(z) = \begin{pmatrix} T_{00}(z) & T_{01}(z) & 0 \\ T_{10}(z) & T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ 0 & T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где операторы $T_{ij}(z) : \bar{\mathcal{H}}_j \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, задаются равенствами

$$(T_{00}(z)\psi_0)_0 = (w_0 - z + 1)\psi_0, \quad T_{01}(z) \equiv H_{01},$$

$$(T_{10}(z)\psi_0)_1(p) = -\frac{v_0(p)\psi_0}{\Delta_2(p; z)},$$

$$(T_{11}(z)\psi_1)_1(p) = \frac{v_1(p)}{2\Delta_2(p; z)} \int \frac{v_1(q')\psi_1(q') dq'}{w_2(p, q') - z},$$

$$(T_{12}(z)\psi_2)_1(p) = -\frac{v_2(p)}{\Delta_2(p; z)} \int \frac{v_1(q')\psi_2(q') dq'}{w_2(p, q') - z},$$

$$(T_{21}(z)\psi_1)_2(p) = -\frac{v_1(p)}{2\Delta_1(p; z)} \int \frac{v_2(q')\psi_1(q') dq'}{w_2(p, q') - z},$$

$$(T_{22}(z)\psi_2)_2(p) = \frac{v_2(p)}{\Delta_1(p; z)} \int \frac{v_2(q')\psi_2(q') dq'}{w_2(p, q') - z}.$$

Отметим, что $T_{ij}(z)$, $i, j = 1, 2$, при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ являются операторами Гильберта–Шмидта, а операторы $T_{00}(z)$, $T_{01}(z)$ и $T_{10}(z)$ одномерные, следовательно, $T(z)$ – компактный оператор.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

ЛЕММА 10. Пусть выполнено условие из п. 2.2. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ – собственное значение оператора H и $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 , f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} ((H_{00} - zI_0)f_0)_0 + (H_{01}f_1)_0 &= 0, \\ (H_{10}f_0)_1(p) + ((H_{11} - zI_1)f_1)_1(p) + (H_{12}f_2)_1(p) &= 0, \\ (H_{21}f_1)_2(p, q) + ((H_{22} - zI_2)f_2)_2(p, q) &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где I_i – единичный оператор в $\mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$. Так как $z \notin \Sigma$, из третьего уравнения системы имеем

$$f_2(p, q) = \frac{v_2(p)\bar{f}_2(q) + v_2(q)\bar{f}_2(p)}{w_2(p, q) - z} - \frac{1}{2} \frac{v_1(p)f_1(q) + v_1(q)f_1(p)}{w_2(p, q) - z}, \quad (20)$$

где

$$\bar{f}_2(p) = \int v_2(q')f_2(p, q')dq'. \quad (21)$$

Подставляя выражение для $f_2(p, q)$ во второе уравнение системы и равенство (21), учитывая условие из п. 2.2, получим, что система уравнений (19) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned} f_0 &= (w_0 - z + 1)f_0 + \int v_1(q')f_1(q')dq', \\ \Delta_2(p; z)f_1(p) &= -v_0(p)f_0 + \frac{1}{2} \int \frac{v_1(q')f_1(q')dq'}{w_2(p, q') - z} - v_2(p) \int \frac{v_1(q')\bar{f}_2(q')dq'}{w_2(p, q') - z}, \\ \Delta_1(p; z)\bar{f}_2(p) &= -\frac{v_1(p)}{2} \int \frac{v_2(q')f_1(q')dq'}{w_2(p, q') - z} + v_2(p) \int \frac{v_2(q')\bar{f}_2(q')dq'}{w_2(p, q') - z}, \end{aligned}$$

эквивалентная уравнению

$$\psi = T(z)\psi, \quad (22)$$

имеет нетривиальное решение (здесь мы использовали тот факт, что $\Delta_i(p; z) \neq 0$ при $z \notin \Sigma$, $i = 1, 2$). Лемма доказана.

Уравнение (22) – это аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H .

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

5.1. Доказательство теоремы 1. Мы докажем эту теорему, считая, что выполнено условие из п. 2.2. При этом имеет место равенство

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^2 \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_i(p)) \cup [m; M].$$

Докажем, что $\Sigma = \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Включение $\Sigma \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ вытекает из критерия Вейля [11].

После того как мы получили компактное уравнение Фаддеева для собственной вектор-функции, обратное включение $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \Sigma$ следует из общей теории Фредгольма [11]. Действительно, $T(z)$ – компактная операторнозначная аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и оператор $\mathcal{I} - T(z)$ обратим при больших $|z|$, где z – вещественное число (здесь $\mathcal{I}$ – единичный оператор в $\bar{\mathcal{H}}$). Согласно аналитической теореме Фредгольма (см. книгу [11], теорема XIII.13) существует дискретное множество $S \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ (возможно, пустое) такое, что операторнозначная функция $(\mathcal{I} - T(z))^{-1}$ существует и аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ всюду, за исключением дискретного множества S (возможно, пустого), где она имеет вычеты конечного ранга. Следовательно, в силу леммы 10 у оператора $H - z\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичный оператор в $\mathcal{H}$, существует ограниченный обратный оператор. Если множество $\sigma(H) \setminus \Sigma$ непусто, то оно состоит из изолированных точек конечной кратности, причем это множество не имеет предельных точек, лежащих в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, иными словами, $(\mathbb{C} \setminus \Sigma) \cap \sigma_{\text{ess}}(H) = \emptyset$. Отсюда имеем $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \Sigma$. Теорема 1 доказана.

5.2. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 6 для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более трех простых собственных значений, лежащих вне существенно-го спектра этого оператора. Тогда в силу теоремы о спектре разложимых операторов из равенства (6) вытекает, что множество $\sigma_{\text{two}}(H)$ состоит из объединения не более чем трех отрезков. Использование теоремы 1 завершает доказательство теоремы 2.

5.3. Доказательство теоремы 3. Докажем часть 2 этой теоремы, части 1 и 3 доказываются аналогично.

Пусть

$$\min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_1(p; m) \geq 0, \quad \min_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) \leq 0, \quad \max_{p \in \mathbb{T}^3} \Delta_2(p; M) > 0. \quad (23)$$

Из первого неравенства в силу утверждения 1 леммы 7 и леммы 9 вытекает, что для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_1(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее m и правее M . Следовательно, $\bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_1(p)) \subset [m; M]$.

Пусть теперь выполнены второе и третье неравенства в (23). Тогда по лемме 8 существует непустое открытое множество $D \subsetneq \mathbb{T}^3$ такое, что для любого $p \in D$ оператор $h_2(p)$ имеет единственное собственное значение $E_2(p)$, лежащее правее M .

Так как функции $w_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ и $w_2(\cdot, \cdot)$ являются непрерывными в своих областях определения, функция $E_2(\cdot)$, сопоставляющая элементу $p \in D$ собственное

значение $E_2(p)$, также непрерывна в D . Для любого $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_2(p)$ ограничен и $\mathbb{T}^3$ – компактное множество, поэтому существует положительное число C такое, что $\sup_{p \in \mathbb{T}^3} \|h_2(p)\| \leq C$, следовательно, для любого $p \in \mathbb{T}^3$

$$\sigma(h_2(p)) \subset [-C; C]. \quad (24)$$

Для любого $p \in \partial D = \{p \in \mathbb{T}^3: \Delta_2(p; M) = 0\}$ существует последовательность $\{p_n\} \subset D$ такая, что $p_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $E_2^{(n)} = E_2(p_n)$. Тогда по лемме 8 для любого $\{p_n\} \in D$ выполняется неравенство $E_2^{(n)} > M$. Используя включение (24), получим, что $\{E_2^{(n)}\} \subset [M; C]$. Не нарушая общности, предположим, что последовательность $\{E_2^{(n)}\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к некоторому $E_2^{(0)} \in [M; C]$ (можно взять подпоследовательность). Из непрерывности функции $\Delta_2(\cdot; \cdot)$ на $\mathbb{T}^3 \times [M; +\infty)$ и сходимостей $p_n \rightarrow p$, $E_2^{(n)} \rightarrow E_2^{(0)}$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_2(p_n; E_2^{(n)}) = \Delta_2(p; E_2^{(0)}).$$

Для любого $p \in \mathbb{T}^3$ функция $\Delta_2(p; \cdot)$ монотонно убывает на $[M; +\infty)$ при $p \in \partial D$, отсюда мы получаем, что $\Delta_2(p; E_2^{(0)}) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_2^{(0)} = M$.

Для любого $p \in \partial D$ положим $E_2(p) = \lim_{\substack{p' \rightarrow p, \\ p' \in D}} E_2(p') = M$. Так как функция $E_2(\cdot)$ непрерывна на компактном множестве $D \cup \partial D$ и $E_2(p) = M$ при всех $p \in \partial D$, множество $\text{Im } E_2$ значений функции $E_2(\cdot)$ есть отрезок $[M; b_3]$, $b_3 > M$. Следовательно, множество $\{z \in \sigma_{\text{two}}(H), z \geq M\}$ совпадает с множеством $\text{Im } E_2 = [M; b_3]$. Таким образом, если выполнены неравенства (23), то

$$\sigma_{\text{ess}}(H) \cap [M; +\infty) = [M; b_3].$$

Далее, доказательства утверждений 2.1–2.3 теоремы получаются из доказательства теоремы 1.4 в работе [2], если заменить $[m; M]$ на $[m; b_3]$. Теорема доказана.

Благодарности. Автор благодарит рецензента за ценные и полезные замечания. Работа частично поддержана международным Центром теоретической физики им. Абдуса Салама (Италия, Триест), и автор выражает свою признательность центру за гостеприимство и поддержку, а также благодарит Международное математическое общество за дорожный грант.

Список литературы

- [1] Т. Х. Расулов, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 12, 59–69.
- [2] Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 86–94.
- [3] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 556–564.
- [4] Т. Х. Расулов, *ТМФ*, **152**:3 (2007), 518–527.
- [5] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, *J. Stat. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.
- [6] Г. Р. Ёдгоров, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **144**:3 (2005), 544–554.
- [7] Т. Х. Расулов, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 164–175.
- [8] R. A. Minlos, H. Spohn, “The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons”, *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **177**, ред. R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik, AMS, Providence, RI, 1996, 159–193.

- [9] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81.
- [10] Г. М. Жислин, Труды ММО, **9**, 1960, 81–120.
- [11] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4, Анализ операторов, Мир, М., 1982.
- [12] С. Албеверио, С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:3 (2002), 56–60.
- [13] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Math. Nachr.*, **280**:7 (2007), 699–716; arXiv: [math-ph/0312050](#).
- [14] S. Albeverio, S. N. Lakaev, R. Kh. Djumanova, *Rep. Math. Phys.*, **63**:3 (2009), 359–380; arXiv: [math-ph/0501024](#).
- [15] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.

Поступила в редакцию 1.12.2009,
после доработки 31.01.2010