Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Х. Эшкабилов, Эффект Ефимова для одного модельного “трехчастичного” дискретного оператора Шредингера, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 78–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:39:05

© 2010 г.

Ю. Х. Эшкабилов*

ЭФФЕКТ ЕФИМОВА ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО “ТРЕХЧАСТИЧНОГО” ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Изучается существование бесконечного числа собственных значений одного модельного “трехчастичного” оператора Шредингера H . Доказывается теорема о необходимом и достаточном условиях существования бесконечного числа собственных значений в модели H ниже нижнего края существенного спектра.

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, эффект Ефимова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретные спектры операторов Шредингера являются наиболее интенсивно изучаемым объектом в теории операторов. Один из важных вопросов в спектральном анализе операторов Шредингера – изучение бесконечности числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра, т.е. существование эффекта Ефимова в данной модели. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [1] для трехчастичных операторов Шредингера в непрерывном пространстве. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено в работе [2], а затем в работах [3], [4] и др.

Насколько нам известно, впервые в работах Лакаева [5], [6] доказано существование эффекта Ефимова для дискретного оператора Шредингера трехчастичной системы методом, основанным на аналитических свойствах определителей Фредгольма. Затем в работах [7]–[10] изучалось существование эффекта Ефимова для трехчастичных дискретных операторов Шредингера методом Соболева (т.е. методом асимптотики) [11].

В настоящей работе изучено существование эффекта Ефимова для одного модельного дискретного “трехчастичного” оператора Шредингера, возникающего в модели Хаббарда. При исследовании эффекта Ефимова мы будем пользоваться инструментами принципа минимакса для ограниченных самосопряженных операторов и свойствами положительных интегральных операторов. В статье главным образом приведены достаточные и необходимые условия существования эффекта Ефимова ниже нижнего края существенного спектра в данной модели.

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: yusup62@rambler.ru

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $d_1 \in \mathbb{N}$, и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$, $d_2 \in \mathbb{N}$, – компактные множества. Рассмотрим непрерывные функции $k_1(x, s)$ на Ω_1^2 , $k_1(x, s) = \overline{k_1(s, x)}$, и $k_2(y, t)$ на Ω_2^2 , $k_2(y, t) = \overline{k_2(t, y)}$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим частично-интегральные операторы T_1 и T_2 :

$$\begin{aligned} T_1 f(x, y) &= \int_{\Omega_1} k_1(x, s) f(s, y) d\nu_1(s), & f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \\ T_2 f(x, y) &= \int_{\Omega_2} k_2(y, t) f(x, t) d\nu_2(t), & f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2). \end{aligned}$$

Пусть $k_0(s, x)$ – произвольная вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$. Обозначим через H_0 оператор умножения на функцию $k_0(x, y)$, т.е.

$$H_0 f(x, y) = k_0(x, y) f(x, y), \quad f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Рассмотрим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$H = H_0 - T, \tag{1}$$

действующий в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, где

$$T = T_1 + T_2. \tag{2}$$

Оператор H является общей моделью “трехчастичного” дискретного оператора Шредингера, возникающей в модели Хаббарда на примесной решетке (см. работу [12]).

Существенный спектр оператора H в общем виде изучен в работе [12]. В работе [13] рассмотрены существенный и дискретный спектры операторов в модели (1), когда потенциальная функция $k_0(x, y)$ имеет специальный вид: $k_0(x, y) = u(x) + h(y)$.

Через $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_e(\cdot)$ и $\sigma_d(\cdot)$ обозначим соответственно резольвентное множество, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженных операторов [14].

В монографии [15] с помощью принципа минимакса изучены спектральные свойства заданных самосопряженных ограниченных снизу операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве. В частности, доказано существование собственных значений и бесконечность дискретного спектра (т.е. существование эффекта Ефимова) для некоторых многочастичных гамильтонианов. Сначала мы изложим принцип минимакса для ограниченных самосопряженных операторов, которым будем пользоваться при исследовании на конечность или бесконечность дискретного спектра в модели (1).

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный ограниченный самосопряженный оператор.

Положим

$$E_{\min} = E_{\min}(A) = \inf\{\lambda: \lambda \in \sigma_e(A)\}.$$

Имеем $E_{\min}(A) \in \sigma_e(A)$. Число $E_{\min}(A)$ будем называть нижним краем существенного спектра оператора A .

Определим вещественное число

$$S_{\min} = S_{\min}(A) = \inf\{(Ax, x): x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

Тогда $S_{\min}(A) \in \sigma(A)$, и если $S_{\min}(A) < E_{\min}(A)$, то существует элемент $x_1 \in \mathcal{H}$, $\|x_1\| = 1$, такой, что $S_{\min}(A) = (Ax_1, x_1)$.

Построим ограниченную возрастающую последовательность $\mu_n = \mu_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, следующим способом:

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= S_{\min}(A) = (Ax_1, x_1), \\ \mu_{\kappa}^{(1)}(A) &= \mu_1(A_{\kappa-1}) = S_{\min}(A_{\kappa-1}), \quad \kappa = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где $S_{\min}(A_{\kappa}) < E_{\min}(A)$, A_{κ} – сужение оператора A на подпространство

$$\mathcal{H}_{\kappa} = \{x \in \mathcal{H}: (x, x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, \kappa\}.$$

Здесь $S_{\min}(A_{\kappa-1}) = (A_{\kappa}x_{\kappa}, x_{\kappa})$, $x_{\kappa} \in \mathcal{H}_{\kappa-1}$, $\|x_{\kappa}\| = 1$, $\kappa = 2, 3, \dots$.

Положим

$$\mu_n(A) = \sup\{\mu_1(A), \mu_2^{(1)}(A), \dots, \mu_n^{(1)}(A)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Если для некоторого $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем $S_{\min}(A_{k_0}) = E_{\min}(A)$, где $A_0 = A$, то определим $\mu_{k_0+m} = E_{\min}(A)$, $m \in \mathbb{N}$, и

$$\mu_k(A) = \sup\{\mu_1(A), \mu_2^{(1)}(A), \dots, \mu_k^{(1)}(A)\}, \quad k \leq k_0, \quad k_0 \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 2.1 (принцип минимакса для ограниченных операторов в операторной форме). Пусть $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – ограниченный самосопряженный оператор. Тогда для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$

либо существует n собственных значений (считая вырожденные собственные значения столько раз, какова их кратность), лежащих ниже нижнего края $E_{\min}(A)$ существенного спектра, а $\mu_n(A)$ из (3) есть n -е собственное значение оператора A (с учетом кратности),

либо $\mu_n(A)$ – нижний край существенного спектра оператора A , т.е. $\mu_n(A) = E_{\min}(A)$; при этом $\mu_n(A) = \mu_{n+\kappa}(A)$ для всех $\kappa \in \mathbb{N}$ и существует самое большее $n - 1$ собственных значений (с учетом кратности), лежащих ниже нижнего края $E_{\min}(A)$ существенного спектра оператора A .

Линейный ограниченный оператор $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется положительным и пишется $A \geq 0$ или $0 \leq A$, если $(Ax, x) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейные ограниченные самосопряженные операторы, $A \leq B$ ($B - A \geq 0$) и $E_{\min}(A) = E_{\min}(B)$. Тогда

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(B), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Изучим конечность и бесконечность дискретного и существенного спектров самосопряженного оператора T (2). Определим компактные интегральные операторы K_1 и K_2 , действующие соответственно в $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$ по правилам

$$(K_1\varphi)(x) = \int_{\Omega_1} k_1(x, s)\varphi(s) d\nu_1(s),$$

$$(K_2\phi)(y) = \int_{\Omega_2} k_2(y, t)\phi(t) d\nu_2(t).$$

Оператор T является унитарно-эквивалентным оператору $K = K_1 \otimes E + E \otimes K_2$, действующему в пространстве $L_2(\Omega_1) \otimes L_2(\Omega_2)$ (см. работы [12], [16]), где E – тождественный оператор, $\otimes$ – тензорное произведение. Следовательно, получим $\sigma(T) = \sigma(K_1) + \sigma(K_2)$ [14]. Отсюда имеем [16]

$$\sigma_e(T) = \sigma(K_1) \cup \sigma(K_2) = \{0\} \cup \sigma_d(K_1) \cup \sigma_d(K_2),$$

$$\sigma_d(T) = \{\omega: \omega = \alpha + \beta \notin \sigma(K_1) \cup \sigma(K_2), \alpha \in \sigma_d(K_1), \beta \in \sigma_d(K_2)\}.$$

Легко заметить, что мощность множеств $\sigma_e(T)$ и $\sigma_d(T)$ не более чем счетна. Из представления существенного и дискретного спектров оператора T легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Имеют место следующие неравенства:*

$$|\sigma_d(K_\kappa)| + 1 \leq |\sigma_e(T)|, \quad \kappa = 1, 2,$$

$$|\sigma_e(T)| \leq |\sigma_d(K_1)| + |\sigma_d(K_2)| + 1,$$

$$|\sigma_d(T)| \leq |\sigma_d(K_1)| \cdot |\sigma_d(K_2)|,$$

где $|\dots|$ – мощность множества.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Дискретный спектр (существенный спектр) оператора T конечен тогда и только тогда, когда дискретный спектр компактных операторов K_1 и K_2 конечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Допустим обратное: дискретный спектр оператора T конечен, а дискретный спектр оператора K_1 или K_2 бесконечен. Надо подчеркнуть, что дискретный спектр самосопряженных компактных операторов состоит из всех их собственных значений, отличных от нуля. Не нарушая общности, мы считаем, что $\sigma_d(K_1)$ конечен и $\sigma_d(K_2)$ бесконечен. Тогда существует последовательность β_n , $n \in \mathbb{N}$, собственных значений оператора K_2 такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Пусть $\alpha \in \sigma_d(K_1)$. Тогда $\alpha + \beta_n \in \sigma(T)$, $n \in \mathbb{N}$. Будем выбрасывать из последовательности $\omega_n = \alpha + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, те члены, для которых $\omega_\kappa \in \sigma_d(K_1)$. Тогда количество выброшенных членов $\omega'_1, \omega'_2, \dots$ из $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конечно, так как само множество $\sigma_d(K_1)$ конечно. Обозначим через $\{\omega_\kappa^{(1)}\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ подпоследовательность из $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ таких, что $\omega_\kappa^{(1)} \notin \sigma_d(K_1)$ для всех $\kappa \in \mathbb{N}$. Теперь будем выбрасывать из $\{\omega_\kappa^{(1)}\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ те члены, для которых $\omega_\kappa^{(1)} \in \sigma_d(K_2)$. Однако количество выброшенных членов $\omega''_1, \omega''_2, \dots$

из $\{\omega_\kappa^{(1)}\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ будет конечно, иначе существовала бы последовательность $\{\omega_\kappa''\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ собственных значений компактного оператора K_2 такая, что $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \omega_\kappa'' = \alpha \neq 0$, а это противоречит компактности оператора K_2 .

Обозначим через $\{\omega_\kappa^{(2)}\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ последовательность, состоящую из членов последовательности $\{\omega_\kappa^{(1)}\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$, такую, что $\omega_\kappa^{(2)} \notin \sigma_d(K_2)$ для всех $\kappa \in \mathbb{N}$. Следовательно, имеем $\omega_\kappa^{(2)} = \alpha + \beta_{n_\kappa} \in \sigma_d(T)$ для всех $\kappa \in \mathbb{N}$, где β_{n_κ} – подпоследовательность последовательности $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \sigma_d(K_2)$. Отсюда $|\sigma_d(T)| = \infty$, что противоречит сделанному предположению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Дискретный спектр (существенный спектр) оператора T бесконечен тогда и только тогда, когда дискретный спектр оператора K_1 или K_2 бесконечен.*

4. ЭФФЕКТ ЕФИМОВА

Существенный спектр $\sigma_e(H)$ оператора H представляется в виде (см. теорему 3.3 из работы [12])

$$\sigma_e(H) = \sigma(H_0) \cup \sigma(H_0 - T_1) \cup \sigma(H_0 - T_2).$$

В дальнейшем предположим, что в модели (1) $k_0(x, y)$ – произвольная неотрицательная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$ и $k_0^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_1 \times \Omega_2 \neq \emptyset$ и $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $H_0 \geq (E_{\min}(H) + \eta_0)E$, где $\eta_0 = \sup \sigma_e(T)$. Если дискретный спектр $\sigma_d(T)$ оператора T (2) конечен, то количество собственных значений в модели (1), лежащих ниже нижнего края $E_{\min}(H)$ существенного спектра $\sigma_e(H)$, конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sigma_e(\eta_0 E - T) = \{\omega: \omega = \eta_0 - \lambda, \lambda \in \sigma_e(T)\}.$$

Тогда $\sigma_e(\eta_0 E - T) \subset [0, \infty)$ и $0 \in \sigma_e(\eta_0 E - T)$. Отсюда $E_{\min}(T) = E_{\min}(\eta_0 E - T) = 0$. Получаем, что

$$E_{\min}(H - E_{\min}(H) \cdot E) = E_{\min}(\eta_0 E - T) = 0.$$

Из $H_0 \geq (E_{\min}(H) + \eta_0)E$ следует, что $\eta_0 E - T \leq H - E_{\min}(H) \cdot E$. Тогда в силу неравенства (4)

$$\mu_\kappa(\eta_0 E - T) \leq \mu_\kappa(H - E_{\min}(H) \cdot E), \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Пусть $|\sigma_d(T)| = m$. Тогда для множества

$$\sigma_d^0(\eta_0 E - T) = \{\omega: \omega \in \sigma_d(\eta_0 E - T), \omega < 0\}$$

имеем

$$1 \leq |\sigma_d^0(\eta_0 E - T)| = m_0 \leq m,$$

т.е. число собственных значений оператора $\eta_0 E - T$, лежащих ниже нижнего края существенного спектра $\sigma_e(\eta_0 E - T)$, не больше m .

Следовательно, в силу теоремы 2.1 существует натуральное число n такое, что

$$\mu_{n+\kappa}(\eta_0 E - T) = 0$$

для всех $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отсюда имеем $\mu_{n+\kappa}(H - E_{\min}(H) \cdot E) = 0$ для всех $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. количество отрицательных собственных значений оператора $H - E_{\min}(H) \cdot E$ конечно. Следовательно, количество собственных значений оператора H , лежащих ниже нижнего края $E_{\min}(H)$ существенного спектра, также будет конечным.

Из теоремы 4.1 следует

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $H_0 \geq (E_{\min}(H) + \eta_0)E$. Чтобы в модели (1) ниже нижнего края $E_{\min}(H)$ существенного спектра $\sigma_e(H)$ существовал эффект Ефимова, необходимо, чтобы оператор T имел бесконечный дискретный спектр, т.е. $|\sigma_d(T)| = \infty$.

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим самосопряженные операторы W_1 и W_2 :

$$W_1 = H_0 - T_1, \quad W_2 = H_0 - T_2.$$

Надо отметить, что дискретный спектр у операторов W_1 и W_2 отсутствует. Если $f(x, y)$ – собственная функция оператора W_1 , т.е. $W_1 f = \lambda f$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, то для функций $g(x, y) = \psi(y)f(x, y)$ имеем $W_1 g(x, y) = \lambda g(x, y)$, где $\psi(y)$ – произвольная существенно ограниченная измеримая функция, заданная на Ω_2 . Следовательно, всякое собственное значение оператора W_1 является бесконечнократным, т.е. $\sigma_d(W_1) = \emptyset$. Аналогично можно показать, что $\sigma_d(W_2) = \emptyset$.

Из теоремы 3.3 работы [12] следует, что для нижнего края $E_{\min}(H)$ существенного спектра оператора H имеется два случая: $E_{\min}(H) = E_{\min}(W_1)$ или $E_{\min}(H) = E_{\min}(W_2)$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $E_{\min}(H) = E_{\min}(W_1) = \Lambda_1 \leq E_{\min}(W_2)$. Если существует ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_2(\Omega_2)$, удовлетворяющая условию

$$(W_1 f_\kappa, f_\kappa) < \Lambda_1 + (T_2 f_\kappa, f_\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где $f_\kappa(x, y) = \varphi_0(x)\varphi_\kappa(y)$, $\varphi_0(x) \equiv 1$, то ниже нижнего края существенного спектра оператора H существует эффект Ефимова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в пространстве $L_2(\Omega_2)$ существует ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию (5). Легко проверить, что

$$\|T_2 f_n\| = \sqrt{\nu_1(\Omega_1)} \|K_2 \varphi_n\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу компактности оператора K_2 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_2 \varphi_n\| = 0$. Однако

$$\sigma(W_1) = \sigma_e(W_1).$$

Отсюда и из неравенства (5) получим, что

$$\Lambda_1 \leq (W_1 f_n, f_n) < \Lambda_1 + (T_2 f_n, f_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (W_1 f_n, f_n) = \Lambda_1$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} (H f_n, f_n) = \Lambda_1$. С другой стороны, $(H f_n, f_n) < \Lambda_1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, не нарушая общности, можно предположить, что система $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ “упорядочена” в следующем смысле:

$$(H f_\kappa, f_\kappa) \leq (H f_{\kappa+1}, f_{\kappa+1}), \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$S_{\min}(H) = \mu_1(H) \leq (H f_1, f_1) < \Lambda_1,$$

т.е. существует $g_1 \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\|g_1\| = 1$, такая, что $\mu_1(H) = (H g_1, g_1) < \Lambda_1$ и по теореме о принципе минимакса число $\mu_1(H)$ является собственным значением оператора H .

Для каждого $\kappa \in \mathbb{N}$ определим подпространство $L_\kappa \subset L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$:

$$L_\kappa = \{f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2) : (f, f_j) = 0, j = 1, 2, \dots, \kappa\}.$$

Пусть H_κ – сужение оператора H на подпространство L_κ , $\kappa \in \mathbb{N}$. Для оператора H_1 имеем

$$\mu_1(H_1) = S_{\min}(H_1) = \inf\{(H_1 f, f) : f \in L_1, \|f\| = 1\} \leq (H_1 f_2, f_2) = (H f_2, f_2) < \Lambda_1.$$

Так как $f_2 \in L_1$, $\|f_2\| = 1$, то существует $g_2 \in L_1$, $\|g_2\| = 1$, такая, что $\mu_1(H_1) = (H_1 g_2, g_2) = (H g_2, g_2) < \Lambda_1$.

Для каждого $\kappa \geq 2$, повторяя аналогичное рассуждение, получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(H_\kappa) &= S_{\min}(H_\kappa) = \inf\{(H_\kappa f, f) : f \in L_\kappa, \|f\| = 1\} \leq \\ &\leq (H_\kappa f_{\kappa+1}, f_{\kappa+1}) = (H f_{\kappa+1}, f_{\kappa+1}) < \Lambda_1, \end{aligned}$$

поскольку $f_{\kappa+1} \in L_\kappa$, $\|f_{\kappa+1}\| = 1$, $\kappa \geq 2$. Тогда существует $g_{\kappa+1} \in L_\kappa$, $\|g_{\kappa+1}\| = 1$, такая, что

$$\mu_1(H_\kappa) = (H_\kappa g_{\kappa+1}, g_{\kappa+1}) = (H g_{\kappa+1}, g_{\kappa+1}) < \Lambda_1.$$

Таким образом, для каждого $\kappa \in \mathbb{N}$ оператор сужения H_κ имеет собственные значения

$$\mu_1(H_\kappa) < \Lambda_1, \quad \mu_1(H_\kappa) \leq \mu_1(H_{\kappa+1}), \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, каждое число $\omega_\kappa = \mu_1(H_\kappa) < \Lambda_1$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$, является собственным значением оператора H , где $H_0 = H$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \Lambda_1$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $E_{\min}(H) = E_{\min}(W_2) = \Lambda_2 \leq E_{\min}(W_1)$. Если существует ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_2(\Omega_1)$, удовлетворяющая условию

$$(W_2 f_\kappa, f_\kappa) < \Lambda_2 + (T_1 f_\kappa, f_\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где $f_\kappa(x, y) = \varphi_\kappa(x)\varphi_0(y)$, $\varphi_0(y) \equiv 1$, то ниже нижнего края существенного спектра оператора H существует эффект Ефимова.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим последовательность $p_0 = 0$, $p_1 = 1/2$, $p_n = p_{n-1} + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$q_n = \frac{p_n - p_{n-1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

На $[0, 1]$ определим функцию $u(x)$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ u_0(x), & \text{если } x \notin [0, 1/2], \end{cases}$$

где $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n r_n(x)$,

$$r_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{p_\kappa - x}{p_\kappa - q_{\kappa+1}}, & \text{если } x \in [p_\kappa, q_{\kappa+1}], \\ \frac{p_{\kappa+1} - x}{p_{\kappa+1} - q_{\kappa+1}}, & \text{если } x \in [q_{\kappa+1}, p_{\kappa+1}], \\ 0, & \text{если } x \notin [p_\kappa, p_{\kappa+1}], \end{cases}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_n \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^n, \quad n \geq 2.$$

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим последовательность ортонормированных функций

$$\varphi_n(y) = 2^{(n+1)/2} \sin \xi_n(y), \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\xi_\kappa(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{p_\kappa - p_{\kappa-1}}(y - p_{\kappa-1}), & \text{если } y \in [p_{\kappa-1}, p_\kappa], \\ 0, & \text{если } y \notin [p_{\kappa-1}, p_\kappa]. \end{cases}$$

Определим ядро $k_2(y, t)$:

$$k_2(y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3} \right)^n \varphi_n(y) \varphi_n(t). \quad (7)$$

Ряд (7) равномерно сходится в квадрате $[0, 1]^2$. Следовательно, интегральный оператор K_2 , заданный ядром $k_2(y, t)$, самосопряжен и положителен в $L_2[0, 1]$.

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим следующую модель:

$$H = H_0 - (\gamma T_1 + T_2), \quad \gamma \geq \frac{2}{3}, \quad (8)$$

где

$$H_0 f(x, y) = u(x) u(y) f(x, y),$$

$$T_1 f(x, y) = \int_0^1 f(s, y) d\nu(s),$$

$$T_2 f(x, y) = \int_0^1 k_2(y, t) f(x, t) d\nu(t).$$

Покажем, что в модели (8) ниже нижнего края существенного спектра существует эффект Ефимова. Рассмотрим последовательность ортонормированных функций $f_n \in L_2[0, 1]^2$, $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x, y) = \varphi_0(x)\varphi_n(y), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\varphi_0(x) \equiv 1$. Имеем

$$((H_0 - \gamma T_1)f_1, f_1) = (H_0 f_1, f_1) - \gamma(T_1 f_1, f_1) = -\gamma(T_1 f_1, f_1) = -\gamma.$$

Отсюда и из неравенства

$$((H_0 - \gamma T_1)f, f) \geq -\gamma(T_1 f, f) \geq -\gamma, \quad f \in L_2[0, 1]^2, \quad \|f\| = 1,$$

получаем, что $E_{\min}(H_0 - \gamma T_1) = -\gamma$. С другой стороны,

$$((H_0 - T_2)f, f) = (H_0 f, f) - (T_2 f, f) \geq -(T_2 f, f) \geq -\frac{2}{3}, \quad f \in L_2[0, 1]^2, \quad \|f\| = 1.$$

Следовательно, из $\gamma \geq 2/3$ и в силу теоремы 3.3 из работы [12] получаем, что $E_{\min}(H_0 - (\gamma T_1 + T_2)) = -\gamma$. Положим $b_n = (2/3)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $\omega_n = \gamma + b_n$ является собственным значением оператора $T = \gamma T_1 + T_2$, так как

$$\begin{aligned} (Tf_n)(x, y) &= \gamma \int_0^1 \varphi_0(s)\varphi_n(y) d\nu(s) + \int_0^1 k_2(y, t)\varphi_0(x)\varphi_n(t) d\nu(t) = \\ &= \gamma f_n(x, y) + b_n f_n(x, y) = (\gamma + b_n)f_n(x, y), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для оператора H_0 получим, что

$$(H_0 f_n, f_n) = \int_0^1 u(s) d\nu(s) \int_0^1 u(t)\varphi_n^2(t) d\nu(t) \leq \int_0^1 u(t)\varphi_n^2(t) d\nu(t) \leq \delta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$((H_0 - \gamma T_1)f_n, f_n) \leq \delta_n - \gamma < -\gamma + \left(\frac{2}{3}\right)^n = E_{\min}(H) + (T_2 f_n, f_n), \quad n \geq 2,$$

т.е. выполняется условие из теоремы 4.3. Значит, в модели (8) ниже нижнего края существенного спектра существует эффект Ефимова.

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов, *ЯФ*, **12**:5 (1970), 1080–1091.
- [2] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [3] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal, *Ann. Phys.*, **123**:2 (1979), 274–295.
- [4] Н. Tamura, *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 433–459.
- [5] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [6] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [7] С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:2 (1999), 84–88.
- [8] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 231–245.
- [9] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772; arXiv: [math-ph/0312026](https://arxiv.org/abs/math-ph/0312026).

- [10] С. Н. Лакаев, З. Э. Муминов, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 80–84.
- [11] A. V. Sobolev, *Comm. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [12] Ю. Х. Эшкабилов, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 228–243.
- [13] Ю. Х. Эшкабилов, О. И. Сахобидинова, “О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса”, *Математический форум*, т. 1, Исследования по математическому анализу, ВНИЦ РАН, Владикавказ, 2008, 246–255.
- [14] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1, Функциональный анализ, Мир, М., 1977.
- [15] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4, Анализ операторов, Мир, М., 1982.
- [16] Ю. Х. Эшкабилов, *Узбек. матем. журн.*, 2005, № 3, 104–112.

Поступила в редакцию 29.10.2009