Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Брежнев, Трансцендентные формулы следов для конечнозонных потенциалов, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 108–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:57:43

© 2010 г.

Ю. В. Брежнев*

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ДЛЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Показано, что в теории конечнозонного интегрирования спектральных уравнений имеют место формулы, отличные от классических аналогов рациональных формул следов для алгебро-геометрических потенциалов. Новые формулы содержат трансцендентные модулярные функции и гипергеометрические ряды. Как следствие, они приводят к трансцендентным соотношениям между тета-функциями.

Ключевые слова: спектральная задача, конечнозонный потенциал, формулы следов, модулярная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории интегрирования спектральных задач известны так называемые тождества и формулы следов. Терминология восходит к работам Крейна, Гельфанда и Дикого 50-х годов по спектральной теории обыкновенного дифференциального уравнения вида $\psi_{xx} - u(x)\psi = \lambda\psi$. В 1975 г. в связи с возникновением методов конечнозонного интегрирования (в спектральной терминологии) В. Матвеев установил новую и важную трактовку этих формул. Упомянутые соотношения, включая найденные t -изоспектральные разновидности, представляют собой дифференциальные тождества для точно решаемых потенциалов $u(x)$. В частности, одна из серии таких формул, а именно знаменитая формула

$$u(x) = 2\{\gamma_1(x) + \dots + \gamma_g(x)\} + \text{const}, \quad (1)$$

позволяет восстановить потенциал по величинам $\gamma_k(x)$, которые удовлетворяют интегрируемым обыкновенным дифференциальным уравнениям – уравнениям Дубровина. Все оставшиеся тождества следов являются следствием этой “главной” формулы. В настоящей работе мы будем смотреть на эти соотношения, а точнее на их аналоги для спектральных уравнений высших порядков, именно с этой точки зрения: как на некоторые формулы, по которым точно решаемый потенциал выражается через величины γ_k .

*Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: brezhnev@mail.ru

Как известно, потенциал $u(x)$ определяет конечномерную гамильтонову систему, интегрируемую по Лиувиллю, где x выступает как время. Переход к каноническим переменным (p, q) осуществляется путем комбинирования потенциала и его производных: $p = p(u, u_x, \dots)$, $q = q(u, u_x, \dots)$ [1]. Далее, переход к переменным разделения – это переход к величинам γ_k и μ_k , связанным алгебраическим соотношением $W(\gamma_k, \mu_k) = 0$, которое называется уравнением спектральной кривой. Формулы обратного перехода $p = p(\gamma_k, \mu_k)$, $q = q(\gamma_k, \mu_k)$ и, следовательно, формула вида $u = u(p, q)$ в теории гамильтоновых систем хорошо известны [2], однако наглядный смысл формулы (1) как дифференциального аналога следа оператора имеется только для уравнения Шредингера. “Следовая” трактовка всех других алгебро-геометрических (конечнозонных) операторов не имеет места. Это является проявлением того факта, что в общей теории разделения переменных должны участвовать обе координаты γ и μ спектральной кривой, так как абелевы функции выражаются, вообще говоря, через обе эти переменные. Уравнения второго порядка доставляют лишь специфический и частный случай, когда $u = u(\gamma)$. Для более сложных спектральных задач имеются изолированные примеры [3], а общие схемы построения главной формулы следов

$$u = R(\gamma_k, \mu_k) \quad (2)$$

с рациональной функцией R , насколько нам известно, отсутствуют.

Предметом настоящей статьи является, однако, не этот вопрос, а то наблюдение, что, помимо представления потенциалов как абелевых функций в виде (2), возможны и другие представления. Они даются не рациональными, а трансцендентными, но тоже *однозначными* функциями от симметрических комбинаций координат (γ_k, μ_k) . Пример, на котором мы демонстрируем этот факт, интересен не только сам по себе, но и тем, что он приводит к новым трансцендентным тождествам между Θ -функциями. Напомним, что полиномиальные тождества между Θ -функциями общеизвестны. Фактически они являются униформизирующими представлениями абелевых многообразий [4] и, как следствие, Θ -функциональными представлениями абелевых функций (2).

2. РАЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛА СЛЕДОВ

Рассмотрим спектральную задачу третьего порядка

$$\Psi''' + u(x)\Psi' - \frac{1}{2}u'(x)\Psi = \lambda\Psi. \quad (3)$$

Известно, что если ассоциировать эту задачу с нелинейным интегрируемым уравнением, то ее изоспектральные деформации описываются уравнением Каупа–Купершмидта [5]

$$u_t = u^{(v)} + 5uu''' + \frac{25}{2}u'u'' + 5u^2u_x. \quad (4)$$

В дальнейшем нам достаточно будет ограничиться стационарными решениями этого уравнения или, что тоже самое, рассмотреть коммутирующий с (3) операторный

пучок, линейно зависящий от λ ,

$$A(\lambda; [u])\Psi'' + B(\lambda; [u])\Psi' + C(\lambda; [u])\Psi = \mu\Psi. \quad (5)$$

2.1. Алгебраическая кривая. Как обычно, совместность уравнения (5) со спектральной задачей, т.е. с задачей (3), дает выражения для A , B , C :

$$A = -9\lambda, \quad B = u^2 + \frac{1}{2}u'' + c, \quad C = -\frac{1}{3}A'' + \frac{2}{3}Au - B'.$$

Константа c связана со стационарной динамикой $u = u(x - ct)$, и мы имеем

$$-9\lambda\Psi'' + \left(u^2 + \frac{1}{2}u'' + c\right)\Psi' - \left(6u\lambda + 2uu'' + \frac{1}{2}u'''\right)\Psi = \mu\Psi.$$

Величины λ и μ алгебраически зависимы, т.е. лежат на спектральной кривой

$$\mu^3 + Q(\lambda; [u])\mu + T(\lambda; [u]) = 0. \quad (6)$$

Ее уравнение получается исключением Ψ из (3) и (5). В результате получаем

$$\begin{aligned} \mu^3 + \left(27c\lambda^2 - \frac{9}{2}K\lambda + E_2\right)\mu + 729\lambda^5 + \\ + E_1\lambda^3 + \frac{27}{2}uK\lambda^2 + E_3\lambda + \frac{1}{8}(u'' + 2u^2 + 2c)^2K = 0. \end{aligned}$$

Выражения для E_k мы приведем позже, а здесь заметим, что в уравнение кривой входят не только интегралы стационарного уравнения (4), но и само это уравнение

$$K = cu' + u^{(\vee)} + 5uu''' + \frac{25}{2}u'u'' + 5u^2u'.$$

В силу (4) константа K должна обращаться тождественно в нуль. Но этому не противоречит и выражение $u'' + 2u^2 + 2c = \text{const}$. Если константа в правой части этого уравнения не равна нулю, то совместность с уравнением $K = 0$ дает тривиальный результат $u = \text{const}$. В противном случае имеем кривую в вырожденной ситуации:

$$\mu^3 + 27c\lambda^2\mu + 729\lambda^5 - 27\left(\frac{3}{4}u'^2 + u^3 + 3cu\right)\lambda^3 = 0.$$

Эта кривая имеет род $g = 1$, соответствующее решение $u = -3\wp(x + 3g_2t/4)$ легко вычисляется, и нас оно не будет интересовать. Для невырожденного случая кривая (6) приобретает вид

$$\mu^3 + (27c\lambda^2 + E_2)\mu + 729\lambda^5 + 81E_1\lambda^3 + E_3\lambda = 0, \quad (7)$$

имеет род $g = 4$, и задача определения соответствующего потенциала нетривиальна.

2.2. Рациональная формула следов. Получим сначала обычную формулу следов, т.е. представление потенциала в виде (2). Прежде всего, следует определить величины γ_k . В теории конечнозонных операторов в качестве таких величин выступают полюсы функции $\Psi(x)$, которые не зависят от λ . Исключая из уравнений (3) и (5) функцию Ψ и ее первую производную, мы получим выражение

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = 27\lambda \frac{3\mu^2 + Q}{\Pi} - \frac{1}{18\lambda} (u'' + 2u^2 + 2c). \quad (8)$$

Здесь $Q(\lambda) := 27c\lambda^2 + E_1([u])$, а выражение для дифференциального полинома $\Pi = \Pi(\lambda; [u])$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^7} \Pi(\lambda; [u]) = & \lambda^4 - \frac{1}{6} u' \lambda^3 + \frac{1}{18} (u^{(\text{iv})} + 5uu'' + 4u'^2 + 2u^3 + 2cu)\lambda^2 + \\ & + \frac{1}{324} (u''' + 4uu')(u'' + 2u^2 + 2c)\lambda + \frac{1}{3^6 8} (u'' + 2u^2 + 2c)^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем теперь интегралы Новикова E_k :

$$E_1 = u^{(\text{iv})} + 5uu'' + \frac{15}{4} u'^2 + \frac{5}{3} u^3 + cu, \quad (10)$$

$$E_2 = -\frac{1}{4} u'''(u''' + 8uu') - \frac{1}{4} uu''^2 + \frac{1}{24} u''(E_1 + 3u'^2 - 20u^3 - 12cu) + \dots,$$

$$E_3 = -\frac{3}{4} u'''u'(u'' + 2u^2 + 2c) + \frac{1}{4} u''^3 + \frac{3}{4} (u^2 + c)u''^2 - 3u'^2 u'' + \dots,$$

где мы написали сокращенные выражения для E_2, E_3 , так как они нам не понадобятся.

Переменные разделения γ_k определяют полюсы логарифмической производной (8), т.е. факторизуют полином Π . Поэтому мы полагаем по определению

$$\Pi = 3^7 (\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2)(\lambda - \gamma_3)(\lambda - \gamma_4). \quad (11)$$

Если мы определим вторую координату $\mu_k = \mu_k(x)$ формулой

$$\mu_k^3 + Q(\gamma_k(x))\mu_k + T(\gamma_k(x)) = 0,$$

то из (8) получим аналог уравнений Дубровина для рассматриваемого случая. В самом деле, переходя к пределу $\lambda \rightarrow \gamma_k$ в (8), получаем

$$\frac{d\gamma_k}{dx} = -\frac{\gamma_k}{81} \frac{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}. \quad (12)$$

Дополнительные объяснения приведены в работе [3] и там же можно найти общий способ получения таких уравнений и второй координаты нуля полинома Π :

$$\mu_k = 3u\gamma_k + \frac{(u'' + 2u^2 + 2c)^2}{36\gamma_k}. \quad (13)$$

Сопоставляя (9) и (11), будем иметь, например, следующие тождества:

$$u' = 6 \sum_{k=1}^4 \gamma_k, \quad u^{(\text{IV})} + 5uu'' + 4u'^2 + 2u^3 + 2cu = 18 \sum_{k>j} \gamma_k \gamma_j. \quad (14)$$

Составляя симметрические комбинации уравнений (12) и используя формулу (13) для второй координаты, мы можем исключить все производные потенциала и получить линейное соотношение для u . Это и будет искомая рациональная формула следов. Опуская детали, имеем в результате

$$u = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 \frac{\gamma_k^2 \mu_k}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}. \quad (15)$$

Последнее упрощение уравнений (12) – это сведение их к квадратурам. Вновь составляя симметрические комбинации правых частей (12), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \frac{d\gamma_k}{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)} &= 0, & \sum_{k=1}^4 \frac{\gamma_k d\gamma_k}{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)} &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k d\gamma_k}{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)} &= 0, & \sum_{k=1}^4 \frac{\gamma_k^2 d\gamma_k}{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)} &= -\frac{1}{81} dx, \end{aligned}$$

которые, как и следовало ожидать, приводят к задаче Якоби, т.е. к задаче обращения четырех голоморфных интегралов на кривой (7):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_1, & \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\mu d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_3, \\ \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\lambda d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_2, & \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\lambda^2 d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_4 - \frac{1}{81} x. \end{aligned}$$

Далее мы будем считать, что зависимость $\gamma_k = \gamma_k(x)$ определяется из этих уравнений.

Здесь стоит добавить, что подобная схема возникновения уравнений Дубровина и формул следов из определения дифференциального полинома Π и функции Ψ является характерной для общих конечнозонных операторов. Определения величин γ_k , уравнения Дубровина, всевозможные соотношения для потенциала и его производных (разные версии формул следов) и т.д. “одновременно перепутаны” в общем наборе определяющих полиномиальных соотношений.

3. ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ФОРМУЛА СЛЕДОВ

Вывод предыдущих формул, как мы видим, содержит манипуляции полиномами, что характерно для теории полиномиальных идеалов [6]. Базисы таких идеалов не единственны, и можно ожидать, что найдутся другие соотношения, которые определяют потенциал. Это действительно так. Исключим из интеграла Новикова E_1 и второго тождества в (14) старшую производную $u^{(iv)}$. Получим квадратное уравнение на u' :

$$3u'^2 + 4u^3 + 12cu + E_1 = 216 \sum_{k>j} \gamma_k \gamma_j.$$

Но u' выражается однозначно через γ в силу первого тождества в (14). Тогда мы получаем кубический полином по переменной u :

$$u^3 + 3cu + 3E_1 + 27 \sum_{k=1}^4 \gamma_k^2 = 0, \quad (16)$$

который можно воспринимать как алгебраический вариант главной формулы следов.

С другой стороны, конечнозонные потенциалы суть однозначные функции переменной x . Они удовлетворяют автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям, проходят тест Пенлеве и выражаются через тета-функции. Известно также (но редко используется), что корни всякого полинома третьей или четвертой степени могут быть представлены в виде аналитических выражений от своих коэффициентов в терминах эллиптических функций [7]. В случае полинома (16) ситуация проще, так как мы сразу можем рассматривать его как полином Вейерштрасса:

$$4u^3 + 12cu + 12E_1 + 108 \sum_{k=1}^4 \gamma_k^2(x) = 4u^3 - au - b = 4(u - e)(u - e')(u - e''),$$

где точки e , e' , e'' зависят от коэффициентов a, b , а коэффициенты – от x . Корни этого полинома $u = \wp(\omega_k(x); a, b)$, где

$$a = -12c, \quad b = -108 \sum \gamma_k^2(x) - 12E_1,$$

выражаются через тета-константы [7]:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\pi^2}{12} \{\vartheta_3^4(\tau) + \vartheta_4^4(\tau)\}, \\ e' &= -\frac{1}{\omega^2} \frac{\pi^2}{12} \{\vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_3^4(\tau)\}, \\ e'' &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\pi^2}{12} \{\vartheta_2^4(\tau) - \vartheta_4^4(\tau)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

а величины ω и $\tau = \omega'/\omega$ следует выразить через коэффициенты a и b . Достаточно взять одно из таких выражений, а присутствующие в (17) яковиевские ϑ -константы

записать с помощью классических рядов [7]:

$$\begin{aligned}\vartheta_2(\tau) &= e^{\pi i \tau / 4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(k^2+k)\pi i \tau}, \\ \vartheta_3(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k^2 \pi i \tau}, \\ \vartheta_4(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{k^2 \pi i \tau}\end{aligned}$$

(мы используем символ “ e ” для экспоненты, чтобы отличать ее от точек Вейерштрасса).

Итак, мы пришли к классической эллиптической модулярной задаче обращения, т.е. к задаче нахождения периодов $(2\omega, 2\omega')$ эллиптической кривой $w^2 = 4z^3 - az - b$ по ее коэффициентам. Схема решения известна. Необходимо найти корень τ трансцендентного уравнения $J(\tau) = a^3/(a^3 - 27b^2)$, где $J(\tau)$ – классическая модулярная функция Клейна [7], [8]. После того как корень τ найден, полупериоды (ω, ω') вычисляются по формулам

$$\omega^2 = \frac{a}{b} \frac{g_3(\tau)}{g_2(\tau)}, \quad \omega' = \tau \omega, \quad (18)$$

где $g_{2,3}(\tau)$ – известные модулярные формы [8]. Для них имеются ряды Эйзенштейна, ряды Гурвица–Ламберта или представления через ϑ -константы:

$$\begin{aligned}g_2(\tau) &= \frac{\pi^4}{24} \{ \vartheta_2^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau) + \vartheta_4^8(\tau) \}, \\ g_3(\tau) &= \frac{\pi^6}{432} \{ \vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_3^4(\tau) \} \{ \vartheta_3^4(\tau) + \vartheta_4^4(\tau) \} \{ \vartheta_4^4(\tau) - \vartheta_2^4(\tau) \}.\end{aligned} \quad (19)$$

Осталось выписать выражение для корня τ . Как ни странно, но явное аналитическое решение столь классической задачи отсутствует¹⁾, хотя общеизвестно, что его можно записать через отношения гипергеометрических ${}_2F_1$ -рядов. В силу того что ряд ${}_2F_1(J)$ сходится только в единичном круге, формулы будут различны в зависимости от того, какому из неравенств $|J| > 1$ или $|J| < 1$ удовлетворяет J . Всё вместе, это составляет совокупность довольно громоздких выражений, включающих к тому же функциональные ряды по логарифмической производной от Γ -функции Эйлера. Например, соответствующие формулы (22)–(27) в п. 14.6.2 книги [8] занимают полстраницы (не считая некорректности в формуле (23)). Оперировать ими аналитически не представляется возможным. Между тем задача имеет простое решение.

Воспользуемся хорошо известным фактом, что функция J тесно связана с гипергеометрическим уравнением вида

$$J(J-1)\psi'' + \frac{1}{6}(7J-4)\psi' + \frac{1}{144}\psi = 0.$$

¹⁾К сожалению, в энциклопедии [9] на с. 789 и в замечательной во всех отношениях книге [7] на с. 51 решения этой задачи изложены неверно, и это не связано с опечатками.

Решения гипергеометрических уравнений в общем случае являются гипергеометрическими функциями ${}_2F_1(a, b; c | z)$, но при определенных условиях на параметры a, b, c они представимы через классические специальные функции. Мы имеем в виду не вырождения функции ${}_2F_1$, а случаи, когда ${}_2F_1$ -ряд допускает квадратичные преобразования и поэтому гипергеометрическое уравнение сводится к уравнению с двумя параметрами, т.е. к уравнению Лежандра. Именно это справедливо для выписанного выше уравнения. Его решение есть линейная комбинация

$$\psi = \sqrt[6]{J} \{AP_\nu^\mu(\sqrt{1-J}) + BQ_\nu^\mu(\sqrt{1-J})\}$$

функций Лежандра с параметрами $\nu = -1/2$ и $\mu = 1/3$. Исчерпывающую информацию об этих функциях см. в книге [10]. Сказанное выше означает, что должна иметь место формула

$$\tau = \frac{\mathbf{a}P(\sqrt{1-J}) + \mathbf{b}Q(\sqrt{1-J})}{\mathbf{c}P(\sqrt{1-J}) + \mathbf{d}Q(\sqrt{1-J})} \quad (20)$$

с определенными числовыми значениями для $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ (индексы ν, μ у функций Лежандра мы для краткости опускаем). Приведем окончательный ответ, а его вывод будет изложен в другой работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для эллиптической кривой $w^2 = 4z^3 - az - b$ отношение периодов $\tau = \omega' / \omega$ дается следующим выражением:

$$\tau = \left\{ \pi i \frac{P(\sqrt{1-J})}{Q(\sqrt{1-J})} - 1 \right\} e^{\pi i/3}, \quad \mathbf{J} = \frac{a^3}{a^3 - 27b^2}. \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в равенство (21) вместо $\mathbf{J}$ подставить $J(\tau)$, то это равенство превратится в тождество для любых τ из верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$. Левую и правую части этого тождества следует, конечно, вычислять по модулю полной модулярной группы $PSL_2(\mathbb{Z}) =: \Gamma(1)$. Таким образом, соотношение (21) является $\Gamma(1)$ -эквивалентом решения модулярной задачи обращения в представлении Лежандра. А именно, если эллиптическая кривая задана в форме Лежандра $w^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$, то эллиптический модуль τ вычисляется по знаменитой формуле Якоби

$$\tau = i \frac{K'(k)}{K(k)} \pmod{\Gamma(2)}, \quad (22)$$

где K и K' – полные эллиптические интегралы Лежандра первого рода [7], [8], [11].

Теперь, возвращаясь к потенциалу, по формулам (17), (18) с учетом (19) получаем искомую трансцендентную “формулу следов”:

$$u(x) = \frac{3}{2c} \left\{ E_1 + 9 \sum_{k=1}^4 \gamma_k^2(x) \right\} \frac{\vartheta_2^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau) + \vartheta_4^8(\tau)}{\{\vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_3^4(\tau)\} \{\vartheta_4^4(\tau) - \vartheta_2^4(\tau)\}}, \quad (23)$$

где под τ следует понимать функцию

$$\tau(x) = \hat{\Gamma} \left(\pi i \frac{P(\sqrt{1-\mathbf{J}})}{Q(\sqrt{1-\mathbf{J}})} e^{\pi i/3} - e^{\pi i/3} \right), \quad (24)$$

в которой

$$\mathbf{J} = \frac{4c^3}{4c^3 + 9\{E_1 + 9\sum \gamma_k^2(x)\}^2},$$

а символом $\hat{\Gamma}$ мы обозначили операцию приведения числа в фундаментальную область группы. Формулы (23), (24) не содержат координаты μ_k . Хорошим и очень нетривиальным упражнением является прямая проверка того, что функция (23) действительно удовлетворяет соотношению (10) или стационарной версии уравнения (4).

4. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ТОЖДЕСТВА МЕЖДУ ТЕТА-ФУНКЦИЯМИ

Как следует из предыдущего раздела, аналогичным способом можно получить много других примеров абелевых функций, являющихся радикалами или корнями алгебраических уравнений. Например, из последнего слагаемого в полиноме (9) следует однозначное представление радикала абелевой функции вида $18\sqrt[3]{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4} = u'' + 2u^2 + 2c$, а общий механизм получения “трансцендентных следов” состоит в исключении производных от потенциала из полного набора соотношений, определяющих интегралы E_k и переменные γ_k . Разрешая получающиеся алгебраические уравнения в однозначных функциях (а это всегда тета-функции), получаем ответ. Эти уравнения (возможно, даже и их порядки) не единственны и зависят от рода, но переходы между ними есть не что иное, как различные представления одной и той же абелевой функции. Даже в (γ, μ) -представлении они различны, так как координаты γ и μ связаны алгебраическим соотношением.

Если мы теперь приравняем трансцендентное и рациональное представления, то получим необычное тождество, содержащее тета-функции. В самом деле, сопоставив, например, (15) и (23),

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 \frac{\gamma_k^2 \mu_k}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)} = \frac{3}{2c} \left\{ E_1 + 9 \sum_{k=1}^4 \gamma_k^2 \right\} \frac{\vartheta_2^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau) + \vartheta_4^8(\tau)}{\{\vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_3^4(\tau)\} \{\vartheta_4^4(\tau) - \vartheta_2^4(\tau)\}}, \quad (25)$$

мы можем, в принципе, придать входящим в это равенство рациональным по (γ, μ) абелевым функциям форму Θ -функциональных отношений [4]. Получившееся соотношение между Θ -функциями рода $g = 4$ будет трансцендентным тождеством, включающим эллиптические тета-константы $\vartheta(\tau(x))$, хотя кривая (7), вообще говоря, не имеет отношения ни к какой эллиптической кривой. Помимо модулей кривой, тождество (25) содержит произвольный параметр x . Можно также перенести в левую часть равенства все симметрические рациональные по (γ, μ) функции. Тогда слева мы получим некоторую абелеву функцию на якобиане тригональной кривой (7), а справа – ее “экзотическое” представление через эллиптические

тета-константы от функций Лежандра:

$$u^2 = -2c \frac{\{\vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_3^4(\tau)\}\{\vartheta_4^4(\tau) - \vartheta_2^4(\tau)\}}{\vartheta_2^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau) + \vartheta_4^8(\tau)} - 3c. \quad (26)$$

В свою очередь, аргументами входящих в это представление функций Лежандра (гипергеометрических функций) будут выражения, содержащие по формуле (24) через величину $\sqrt{1-\mathbf{J}}$ другую абелеву функцию, т.е. $\sum \gamma_k^2(x)$. Она представляется своей рациональной дробью от Θ -функций типа $\Theta(x\mathbf{U} + \mathbf{D})$. Характер трансцендентных соотношений, как видим, вообще говоря, очень сложный и его еще следует понять. Даже если якобиан кривой (7) полностью расщепляется на эллиптические кривые, и многомерные Θ -функции превращаются в эллиптические θ -функции, трансцендентность сохраняется. Полиномы типа (16) при этом не вырождаются, и поэтому естественно ожидать появления трансцендентных θ -тождеств.

Тот вид трансцендентности, который получен выше, связан с эллиптическим модулярным обращением, поскольку оно происходит от решения алгебраического уравнения с использованием эллиптических модулярных функций. Но это не единственный способ решения таких уравнений. В более общих методах привлекаются общие тета-функции и константы (см., например, статью Умемурэ в книге [12]), поэтому естественно ожидать появления других разновидностей трансцендентных тождеств.

В заключение отметим, что одновременное и трансцендентное сочетание тета-функций и гипергеометрических рядов на самом деле не так уж неожиданно, поскольку естественным атрибутом ${}_2F_1$ -рядов являются группы, известные как моноклоиды, а они, в свою очередь, представляют автоморфизмы аналитических автоморфных функций. Все такие функции, которые известны в настоящее время, выглядят как отношения тета-констант. Выражаясь неформально, “тета” и “гипергеометрия” взаимно обратны друг к другу (они реализуют обращения отношений типа (20)), а наши трансцендентные тождества отражают как этот факт, так и свойства функций типа $\Theta(x\mathbf{U} + \mathbf{D})$. А именно, абелевы многообразия, как алгебраические многообразия, параметризуются полиномами по тета-функциям, а линейные сечения якобианов возникают из интегрируемых уравнений. Частичную иллюстрацию дает, например, уже якобиевское уравнение (22), если его переписать в виде

$$\tau \equiv i \frac{K'(\vartheta_2^2(\tau)/\vartheta_3^2(\tau))}{K(\vartheta_2^2(\tau)/\vartheta_3^2(\tau))} \pmod{\Gamma(2)}$$

для любого $\tau \in \mathbb{H}^+$. Рассматривая это уравнение в достаточно малой окрестности некоторой точки τ_0 , “не вполне аналитическую” операцию приведения точки в фундаментальную область группы можно отбросить, и оно превратится в точное аналитическое трансцендентное тождество. Аналогично можно поступить и с тета-версиями наших соотношений (25), (26) как с тождествами по x .

Благодарности. Работа поддержана Федеральным агентством по науке и инновациям РФ (грант № 02.740.11.0238) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3400.2010.2).

Список литературы

- [1] L. A. Dickey, *Solitons Equations and Hamiltonian Systems*, Adv. Ser. Math. Phys., **26**, World Sci., Singapore, 2003.
- [2] M. Błaszak, *Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*, Texts Monogr. Phys., Springer, Berlin, 1998.
- [3] Ю. В. Брежнев, *УМН*, **57**:2(344) (2002), 191–192.
- [4] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:3 (2000), 1–16.
- [5] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **62**:3 (1980), 189–216.
- [6] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О’Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы*, Мир, М., 2000.
- [7] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.
- [9] И. М. Виноградов (ред.), *Математическая энциклопедия*, т. III, Советская энциклопедия, М., 1982.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. I, Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, Наука, М., 1973.
- [11] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, ч. 2, Физматлит, М., 1963.
- [12] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.

Поступила в редакцию 16.12.2009