Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Алексеев, М. А. Берштейн, Кольцо физических состояний в $M(2, 3)$ минимальной лиувиллевской гравитации, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 119–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:22:04

© 2010 г.

О. В. Алексеев*, М. А. Берштейн*†

КОЛЬЦО ФИЗИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В $M(2, 3)$ МИНИМАЛЬНОЙ ЛИУВИЛЛЕВСКОЙ ГРАВИТАЦИИ

Рассматривается $M(2, 3)$ минимальная лиувиллевская гравитация, пространство состояний которой в гравитационном секторе реализовано неприводимыми модулями алгебры Вирасоро. Представлена рекурсивная конструкция классов БРСТ-когомологий. Эта конструкция основана на использовании явного вида особых векторов в неприводимых модулях алгебры Вирасоро. Найдена некоторая алгебра, действующая на пространстве БРСТ-когомологий. С помощью этой алгебры находится операторная алгебра физических состояний.

Ключевые слова: конформная теория поля, лиувиллевская гравитация, БРСТ-когомологии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Лиувиллевская гравитация – это динамическая теория метрики на некотором двумерном многообразии, действие которой индуцируется критической материей, т. е. материей, описываемой конформной теорией поля. Простая реакция конформных теорий на масштабирование метрики приводит к универсальной форме эффективного действия обобщенной гравитации, называемой лиувиллевской гравитацией [1]. В подходе Давида–Дистлера–Каваи (ДДК) [2] лиувиллевскую гравитацию можно представить в виде тензорного произведения трех теорий – конформной теории поля для полей материи, теории Лиувилля и системы духов. Схематически действие лиувиллевской гравитации можно записать в виде

$$S = S^M + S^L + S^{gh}. \quad (1.1)$$

Согласно условию непротиворечивости ДДК на центральные заряды этих теорий налагается условие, которое состоит в том, что полный центральный заряд равен нулю:

$$c_L + c_M + c_{gh} = 0. \quad (1.2)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: alekseev@itp.ac.ru, mbersht@gmail.com

†Независимый московский университет, Москва, Россия

Таким образом, в критической гравитации эти три теории формально не связаны и взаимодействуют только в силу условия сокращения конформной аномалии (1.2).

В настоящей работе мы рассматриваем частный случай лиувиллевской гравитации, а именно минимальную лиувиллевскую гравитацию, в которой конформная материя – это минимальная конформная теория поля [3]. Ожидается, что в этом случае теория является интегрируемой, т.е. можно явно найти корреляционные функции.

Простейшие состояния с духовым числом¹⁾ 1 – это векторы старшего веса из материального сектора, “одетые” подходящими векторами старшего веса из лиувиллевского сектора так, что полная конформная размерность состояния (включая духи) равна нулю. Такие состояния хорошо изучены, в частности их трех- и четырехточечные функции и операторная алгебра соответствующих операторов были найдены в явном виде [4], [5].

Лиан и Цукерман [6] доказали, что для некоторых векторов старшего веса из материального сектора имеется бесконечно много дополнительных физических состояний с произвольными духовыми числами. Интересно изучить эти дополнительные состояния, в частности исследовать операторную алгебру соответствующих операторов.

Заметим, что есть два варианта лиувиллевской гравитации. В первом варианте гравитационный сектор реализуется свободными полями. С математической точки зрения можно сказать, что пространство состояний в гравитационном секторе есть прямая сумма модулей Фейгина–Фукса (см. § 2, п. 1 в [7]). В этом случае операторная алгебра исследовалась Канно и Сармади [8]. Во втором варианте лиувиллевской гравитации пространство состояний в гравитационном секторе представлено неприводимыми модулями [9]. Из результатов работы [6] следует, что эти два варианта лиувиллевской гравитации имеют разные пространства состояний.

В настоящей работе мы рассматриваем вторую формулировку лиувиллевской гравитации. Естественным способом построения физических состояний является процедура Бекки–Руэ–Стора–Тютиня (БРСТ). В этой процедуре физические состояния отождествляются с классами БРСТ-когомологий. Обычно физическими называются классы относительных когоммологий. Мы представляем рекурсивную процедуру построения классов относительных когоммологий. Она обобщает конструкцию из работы [10].

Мы покажем, что определение физических состояний как классов относительных когоммологий не вполне удовлетворительно. Проблема в том, что операторная алгебра классов относительных когоммологий неассоциативна. Чтобы избежать этой проблемы, мы расширим пространство состояний и будем рассматривать классы абсолютных когоммологий. Сами классы абсолютных когоммологий могут быть найдены из относительных с помощью стандартной процедуры.

Мы определим некоторые операторы, действующие на пространстве когоммологий. Эти операторы позволяют вычислять абсолютные когоммологии и исследовать операторную алгебру абсолютных классов когоммологий.

¹⁾Определение духового числа см. в разделе 2.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Естественным способом квантования теории (1.1) с условием (1.2) является процедура БРСТ-квантования. Пусть (b, c) – конформная система духов весов $(2, -1)$. Поля духов b и c могут быть разложены в ряды Лорана:

$$b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}}, \quad c(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}},$$

где коэффициенты b_n и c_n образуют алгебру с единственным ненулевым антикоммутационным соотношением

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n, 0}.$$

Обозначим фоковское представление системы духов как Λ^{bc} . Определим вакуумное состояние $|0\rangle_g$ в Λ^{bc} условиями

$$b_m|0\rangle_g = 0, \quad m \geq -1, \quad c_n|0\rangle_g = 0, \quad n \geq 2.$$

Этот вакуум является $SL(2, \mathbb{C})$ инвариантным и имеет конформную размерность 0. Определим духовое число следующим образом: сопоставим вакууму $|0\rangle$ духовое число 0, применение операторов b_n увеличивает духовое число на единицу, применение операторов c_n уменьшает его на единицу. Часто удобнее использовать другой вакуум $|v^g\rangle = c_1|0\rangle_g$ конформной размерности -1 и с духовым числом 1.

Рассмотрим конформную теорию поля с центральным зарядом $c = 26$. В настоящей работе мы рассматриваем только киральную часть конформной теории поля. Пусть $T(z)$ обозначает тензор энергии-импульса. Коэффициенты L_n разложения тензора энергии-импульса в ряд Лорана

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям [3]

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \delta_{n+m, 0} \frac{n^3 - n}{12} c$$

и порождают алгебру Вирасоро (Vir). Тогда пространство состояний в конформной теории поля является представлением алгебры Vir.

Пусть $\mathcal{M}$ – некоторое представление конформной теории поля. Введем гильбертово пространство

$$C_*^{\text{abs}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \Lambda^{bc}.$$

Обозначим через $C_k^{\text{abs}}(\mathcal{M})$ подпространство состояний с определенным духовым числом k . Индекс “abs” обозначает, что пространства $C_k^{\text{abs}}(\mathcal{M})$ образуют абсолютный БРСТ-комплекс по отношению к БРСТ-оператору:

$$\begin{aligned} Q &= \oint : \left(T(z) + \frac{1}{2} T^{\text{gh}}(z) \right) c(z) : - \frac{c_0}{2} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{-n} c_n - \frac{1}{2} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (m - n) : c_{-m} c_{-n} b_{n+m} : - \frac{c_0}{2}, \end{aligned}$$

где $T^{\text{gh}}(z)$ – тензор энергии-импульса для системы духов. Хорошо известно, что $Q^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $c_{\mathcal{M}} = 26$. Обозначим пространство когомологий комплекса $C_*^{\text{abs}}(\mathcal{M})$ как $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{M})$.

Введем подкомплекс

$$C_*^{\text{rel}}(\mathcal{M}) = \{w \in C_*^{\text{abs}}(\mathcal{M}) \mid b_0 w = (L_0 + L_0^{\text{gh}})w = 0\}.$$

Этот подкомплекс называется относительным БРСТ-комплексом. Обозначим его когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{M})$.

В настоящей работе мы рассматриваем $M(2, 3)$ минимальную гравитацию, в которой конформная материя является минимальной конформной теории поля $M(2, 3)$ с центральным зарядом $c_{\mathcal{M}} = 0$. Единственное примарное поле материи имеет конформную размерность $\Delta_{\mathcal{M}} = 0$, а единственное представление в гильбертовом пространстве – тривиальное представление $\mathbb{I}$. Можно сказать, что материальный сектор модели тривиален. Гравитационный сектор представлен прямой суммой неприводимых модулей алгебры Вирасоро $\mathcal{L}_{\Delta}$ с центральным зарядом $c_{\mathcal{L}} = 26$ и старшими весами $\Delta \in \mathbb{C}$. Таким образом, случай

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\Delta \in \mathbb{C}} (\mathbb{I} \otimes \mathcal{L}_{\Delta}) = \bigoplus_{\Delta \in \mathbb{C}} \mathcal{L}_{\Delta}$$

соответствует минимальной лиувиллевской гравитации $M(2, 3)$.

Пусть $|\mathcal{L}_{\Delta}\rangle$ – вектор старшего веса в неприводимом модуле Вирасоро $\mathcal{L}_{\Delta}$. Удобно определить вакуумный вектор в $C_*(\mathcal{L}_{\Delta})$ формулой

$$\Psi_{\Delta} = |\mathcal{L}_{\Delta}\rangle \otimes |v^g\rangle. \quad (2.1)$$

В процедуре БРСТ-квантования физические состояния w определяются как классы БРСТ-когомологий, иными словами, w такие, что $Qw = 0$, но состояния w не являются точными в БРСТ-комплексе.

3. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ БРСТ-КОМПЛЕКС

3.1. Теоремы Лиана–Цукермана. Опишем теорему Лиана–Цукермана для неприводимых представлений алгебры Вирасоро. Рассмотрим относительный БРСТ-комплекс $C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$, где $\mathcal{L}_{\Delta}$ – неприводимый модуль алгебры Вирасоро со старшим весом Δ . Когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$ зависят от значения старшего веса Δ . Точнее, когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$ нетривиальны при значениях Δ , принадлежащих некоторому счетному множеству комплексных чисел $E = \{a_n, b_n\}$, при

$$a_n = \Delta_{1,1+3(n-1)}, \quad n \geq 0; \quad b_n = \Delta_{1,2+3(n-1)}, \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

где $\Delta_{r,s} = (25 - (3r - 2s)^2)/24$. Такие значения старшего веса естественно возникают при изучении модулей Верма при $c = 26$ (в некотором смысле соответствующие модули Верма являются наиболее вырожденными [11]). Далее будет обозначать символом V_{Δ} модуль Верма со старшим весом Δ и центральным зарядом $c = 26$. Модуль Верма V_{a_0} неприводим: $V_{a_0} = \mathcal{L}_{a_0}$. Однако модули Верма V_{a_1} и V_{b_1} имеют

сингулярный вектор веса a_0 . Это значит, что и V_{a_1} , и V_{b_1} содержат модуль V_{a_0} в качестве подмодуля. И так далее, можно показать, что существует бесконечная лестница модулей Верма $V_{a_k}, V_{b_k}, k = 1, 2, \dots$, таких, что модули V_{a_k}, V_{b_k} содержат модули $V_{a_{k-1}}$ и $V_{b_{k-1}}$ в качестве подмодулей. Это можно представить с помощью следующей диаграммы вложений [11]:

Будем называть уровнем вложения модулей V_{a_k}, V_{b_k} число k . Стрелка, соединяющая две вершины $\Delta \rightarrow \Delta'$, означает, что модуль $V_{\Delta'}$ является подмодулем модуля V_{Δ} . В этом случае вектор старшего веса $|V_{\Delta'}\rangle$, как вектор в модуле V_{Δ} , является сингулярным вектором вида $D_{\Delta',\Delta}|V_{\Delta}\rangle$, где оператор $D_{\Delta',\Delta}$ – многочлен от образующих Вирасоро $L_{-k}, k > 0$.

Лиан и Цукерман доказали [6], что относительные когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $\Delta \in E = \{a_n, b_n\}$. Для любого $\Delta \in E$ размерность пространства когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$ дается формулой

$$\dim H_k^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n + 1, n + 1, \\ 2, & k = -n + 3, -n + 5, \dots, n - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.2)$$

где мы предположили, что $n > 0$. В случае $n = 0$ размерность пространства когомологий

$$\dim H_k^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1}.$$

Нам также понадобится теорема Лиана–Цукермана для модулей Верма. Рассмотрим БРСТ-комплекс $C_*^{\text{rel}}(V_{\Delta})$. Для этого случая Лиан и Цукерман доказали [6], что относительные когомологии $H_*^{\text{rel}}(V_{\Delta})$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $\Delta \in E$. Размерность $H_*^{\text{rel}}(V_{\Delta})$ имеет вид

$$\dim H_k^{\text{rel}}(V_{a_n}) = \dim H_k^{\text{rel}}(V_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = n + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Для любого Δ существует отображение $V_{\Delta} \rightarrow \mathcal{L}_{\Delta}$ из модуля Верма со старшим весом Δ в неприводимый модуль с таким же старшим весом. Оно индуцирует отображения $C_*^{\text{rel}}(V_{\Delta}) \rightarrow C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$ и $H_*^{\text{rel}}(V_{\Delta}) \rightarrow H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$. Сравнивая духовые числа,

видим, что образ единственного класса в $H_*^{\text{rel}}(V_\Delta)$ – класс когомологий в $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ со старшим духовым числом. Класс когомологий со старшим духовым числом в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ будем называть старшей когомологией²⁾.

3.2. Рекуррентное построение базисных состояний. Рекуррентная конструкция основывается на связи между физическими состояниями и особыми векторами в модулях Верма. Точнее, мы собираемся показать, что все классы когомологий можно найти, используя выражения для старших классов.

3.2.1. Старшие классы когомологий. Построение старших классов когомологий упрощается благодаря следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Все старшие классы когомологий можно получить применением операторов $c_{-1}, c_{-2}, \dots$ к вакуумным векторам Ψ_Δ , введенным в (2.1).*

Это предложение легко выводится из предложения 1.11 работы [15]. Существенной частью доказательства этого предложения является следующая конструкция старших классов когомологий. Пусть K^n – векторное пространство всех (возможных, бесконечных) линейных комбинаций антисимметрических одночленов

$$c_{-i_1, \dots, -i_n} = c_{-i_1} c_{-i_2} \dots c_{-i_n}. \quad (3.4)$$

Пусть $d(c_{-i_1, \dots, -i_n}) = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ – степень одночлена (3.4). Определим дифференциал $\delta: K^n \rightarrow K^{n+1}$ следующим образом:

$$\delta(c_{-i}) = \sum_{\alpha+\beta=i} (\alpha - \beta) c_{-\alpha, -\beta}, \quad \delta(c_{-i_1, \dots, -i_n}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d(c_{-i_j}) c_{-i_1, \dots, -\hat{i}_j, \dots, -i_n}.$$

Легко доказать, что $\delta^2 = 0$. Обозначим пространство когомологий этого комплекса как $H^*(K)$. Этот комплекс изоморфен стандартному комплексу когомологий алгебры Ли $\text{Vir}_{>0} = \langle L_1, L_2, \dots \rangle$ и хорошо изучен. Теорема Гончаровой [16] утверждает, что размерности когомологий $H^n(K)$

$$\dim H^n(K) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n > 0. \end{cases}$$

Каждое пространство когомологий $H^n(K)$, $n > 0$, порождается двумя векторами u_n, v_n степени однородности

$$d(u_n) = \frac{3n^2 - n}{2}, \quad d(v_n) = \frac{3n^2 + n}{2}. \quad (3.5)$$

²⁾ Как уже отмечалось в разделе 1, в другом подходе пространство состояний в гравитационном секторе реализуется свободными полями. Пространство физических состояний в этой теории – это $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ – модуль Фейгина–Фукса с центральным зарядом $c_L = 26$. В случае $c \geq 25$ модуль Фейгина–Фукса изоморфен либо модулю Верма, либо контраградиентному модулю Верма (см. [12]). В первом случае когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{F}) = H_*^{\text{rel}}(V_\Delta)$ и соответствуют старшей когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Можно показать, что во втором случае когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{F})$ одномерны и соответствуют младшей когомологии $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Это замечание позволяет сравнивать наши результаты с результатами работ [8], [13], [14].

Например,

$$H^1(K) = \langle c_{-1}, c_{-2} \rangle, \quad H^2(K) = \langle c_{-1}c_{-4}, c_{-2}c_{-5} - 3c_{-3}c_{-4} \rangle.$$

Векторы u_n и v_n определены с точностью до δ -точных слагаемых.

Вернемся к построению старших классов когомологий для неприводимых модулей Вирасоро $\mathcal{L}_{a_n}$. Рассмотрим вектор

$$u_n \Psi_{a_n} = |\mathcal{L}_{a_n}\rangle \otimes u_n |v^g\rangle$$

с духовым числом $n+1$ и конформной размерностью 0 (поскольку $a_n + d(u_n) - 1 = 0$, где a_n определено в (3.1), а $d(u_n)$ – в (3.5)). Ясно, что вектор $u_n \Psi_{a_n}$ БРСТ-замкнут, т.е. $Q(u_n \Psi_{a_n}) = 0$. Более того, можно показать, что этот вектор не является БРСТ-точным. Таким образом, состояние $O_{a_n}^{a_n} = u_n \Psi_{a_n}$ является представителем класса относительных когомологий.

Старшие классы когомологий любого неприводимого модуля Вирасоро $\mathcal{L}_{b_n}$ можно построить аналогичным способом. Мы приведем явный вид нескольких старших классов когомологий:

$$\begin{aligned} O_{a_1}^{a_1} &= H_{a_1}^{a_1} \Psi_{a_1} = c_{-1} \Psi_{a_1}, & O_{a_2}^{a_2} &= H_{a_2}^{a_2} \Psi_{a_2} = c_{-1} c_{-4} \Psi_{a_2}, \\ O_{b_1}^{b_1} &= H_{b_1}^{b_1} \Psi_{b_1} = c_{-2} \Psi_{b_1}, & O_{b_2}^{b_2} &= H_{b_2}^{b_2} \Psi_{b_2} = (c_{-2} c_{-5} - 3c_{-3} c_{-4}) \Psi_{b_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для дальнейшего использования и обобщения мы ввели здесь обозначения O и H с двумя индексами.

3.2.2. Рекуррентные уравнения. Будем использовать следующие обозначения. Рассмотрим БРСТ-комплекс $C_*(V_\Delta)$, где V_Δ – модуль Верма со старшим весом Δ . Пусть $|V_\Delta\rangle$ – вектор старшего веса в этом модуле Верма. Определим вакуумный вектор в этом комплексе формулой

$$\Psi_\Delta^V = |V_\Delta\rangle \otimes |v^g\rangle.$$

Чтобы подчеркнуть разницу между этим вакуумным вектором и вакуумным вектором, определенным в (2.1), обозначим последний как $\Psi_\Delta^{\mathcal{L}}$.

Классы когомологий, за исключением старших, могут быть получены рекуррентно³⁾. Благодаря такому устройству становится возможным найти выражения для классов когомологий, связанных со старшими весами модулей Верма в диаграмме вложений один за другим вниз, начиная сверху. Опишем несколько начальных шагов явно. Затем опишем n -й шаг.

УРОВЕНЬ ВЛОЖЕНИЯ 0. Верхняя вершина диаграммы вложений соответствует старшему весу $a_0 = 1$. Размерность пространства когомологий $\dim H_k^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1}$. Легко найти представителя класса когомологий напрямую, но мы приведем дополнительно конструкцию и обозначения, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

³⁾Смысл этой рекуррентной процедуры следующий. Возьмем резольвенту неприводимого модуля алгебры Вирасоро, состоящую из модулей Верма [11], и вычислим БРСТ-когомологии с коэффициентами в этой резольвенте. Тогда классы когомологий для неприводимых модулей Вирасоро можно получить с помощью спектральной последовательности.

Рассмотрим относительный БРСТ-комплекс $C_*^{\text{rel}}(V_{a_0})$. Легко проверить, что состояние

$$H_{a_0}^{a_0} \Psi_{a_0}^V = \Psi_{a_0}^V \quad (3.7)$$

— представитель когомологий. Принимая во внимание обсуждение в конце п. 3.1, можно проверить, что аналогичное состояние

$$O_{a_0}^{a_0} = H_{a_0}^{a_0} \Psi_{a_0}^{\mathcal{L}} = \Psi_{a_0}^{\mathcal{L}} \quad (3.8)$$

является представителем когомологий $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_0})$. Это состояние является простейшим, оператор, соответствующий этому состоянию, является примарным полем из материального сектора (в нашем случае это тождественный оператор), одетым подходящим примарным полем теории Лиувилля.

УРОВЕНЬ ВЛОЖЕНИЯ 1. Вершины на первом уровне диаграммы вложений соответствуют старшим весам $a_1 = 0$ и $b_1 = -1$. Рассмотрим пространство когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$. Из результатов Лиана и Цукермана [6] (см. (3.2)) следует, что нетривиальные классы когомологий принадлежат пространствам $H_0^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ и $H_2^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$. Старший класс когомологий $O_{a_1}^{a_1} \in H_2^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ был приведен ранее в (3.6). Класс когомологий из пространства $H_0^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ можно построить следующим образом.

ШАГ 1. Рассмотрим относительный БРСТ-комплекс $C_*^{\text{rel}}(V_{a_1})$. Модуль Верма V_{a_1} содержит особый вектор на первом уровне. Этот особый вектор имеет вид $D_{a_0, a_1} |V_{a_1}\rangle$ для некоторого оператора D_{a_0, a_1} . В нашем случае $D_{a_0, a_1} = L_{-1}$. Определим состояние

$$O_{a_0|a_1}^{a_0} = H_{a_0}^{a_0} D_{a_0, a_1} \Psi_{a_1}^V \in C_*^{\text{rel}}(V_{a_1}). \quad (3.9)$$

Заметим, что модули Верма с векторами старшего веса $D_{a_0, a_1} |V_{a_1}\rangle$ и $|V_{a_0}\rangle$ эквивалентны, так как у обоих модулей один и тот же старший вес $a_0 = 1$. Таким образом, состояние (3.9) эквивалентно состоянию $H_{a_0}^{a_0} \Psi_{a_0}^V$, определенному на предыдущем уровне (3.7). Следовательно, состояние (3.9) БРСТ-замкнуто, так как состояние (3.7) БРСТ-замкнуто.

ШАГ 2. Покажем, что состояние (3.9) также БРСТ-точно. Действительно, в силу результатов Лиана и Цукермана (3.3) у единственного нетривиального класса когомологий в пространстве $H_*^{\text{rel}}(V_{a_1})$ духовое число равно 2, тогда как у состояния (3.9) духовое число равно 1 (так как у оператора $H_{a_0}^{a_0}$ духовое число равно нулю). Следовательно, это состояние БРСТ-точно. Значит, существует некоторый оператор $H_{a_1}^{a_0}$ такой, что

$$Q(H_{a_1}^{a_0} \Psi_{a_1}^V) = O_{a_0|a_1}^{a_0}. \quad (3.10)$$

Правая часть этого уравнения полностью определяется единственным классом когомологий на предыдущем уровне и структурой вложений модулей Верма. Поэтому в дальнейшем будем называть это уравнение рекуррентным уравнением. Решение уравнения (3.10), а именно оператор $H_{a_1}^{a_0}$, используется для получения представителя пространства когомологий $H_0^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ на следующем шаге.

ШАГ 3. Мы утверждаем, что состояние $O_{a_1}^{a_0} = H_{a_1}^{a_0} \Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}$ представляет класс когомологий в $H_0^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_0})$. Действительно, из (3.10) и (3.9) получаем⁴⁾

$$Q(O_{a_1}^{a_0}) = H_{a_0}^{a_0} D_{a_0, a_1} |\mathcal{L}_{a_1}\rangle \otimes |v^g\rangle = 0,$$

поскольку $D_{a_0, a_1} |\mathcal{L}_{a_1}\rangle = 0$. Более того, можно показать, что состояние $O_{a_1}^{a_0}$ не является БРСТ-точным. Таким образом, оно представляет класс когомологий.

Мы получили все классы когомологий в пространстве $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$, используя связь этих классов с особым вектором в модуле Верма V_{a_1} .

Классы когомологий в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{b_1})$ можно получить аналогичным способом. Старший класс когомологий этого пространства был ранее представлен в (3.6), дальнейшее построение аналогично построению для пространства $H_0^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$.

Приведем результаты этого построения. Существует особый вектор на втором уровне в модуле Верма V_{b_1} . Этот вектор имеет вид $D_{a_0, b_1} |V_{b_1}\rangle$ для некоторого оператора D_{a_0, b_1} . В нашем случае $D_{a_0, b_1} = (L_{-1}^2 + (2/3)L_{-2})$. Рекуррентное уравнение имеет вид

$$Q(H_{b_1}^{a_0} \Psi_{b_1}^V) = O_{a_0|b_1}^{a_0}, \quad O_{a_0|b_1}^{a_0} = H_{a_0}^{a_0} D_{a_0, b_1} \Psi_{b_1}^V. \quad (3.11)$$

Решение этого уравнения позволяет определить оператор $H_{b_1}^{a_0}$, а значит, и представителя $O_{b_1}^{a_0} = H_{b_1}^{a_0} \Psi_{b_1}^{\mathcal{L}}$ когомологий $H_0^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{b_1})$. Точные формулы для $O_{b_1}^{a_0}$ приведены в приложении.

УРОВЕНЬ ВЛОЖЕНИЯ 2. Вершины на этом уровне диаграммы вложений соответствуют старшим весам $a_2 = -4$ и $b_2 = -6$. Рассмотрим пространство когомологий $H^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Размерности и духовые числа когомологий известны из результатов Лиана и Цукермана (3.2). Старший класс когомологий $O_{a_2}^{a_2}$ приведен в (3.6).

Рассмотрим пространство когомологий $H_1^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Два его базисных класса когомологий можно построить тем же способом, что и классы на предыдущем уровне. В модуле Верма V_{a_2} имеются два особых вектора. Первый из них, $D_{a_1, a_2} |V_{a_2}\rangle$, лежит на уровне 4, а второй, $D_{b_1, a_2} |V_{a_2}\rangle$, – на уровне 3. В этом случае рекуррентные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} Q(H_{a_2}^{a_1} \Psi_{a_2}^V) &= O_{a_1|a_2}^{a_1}, & O_{a_1|a_2}^{a_1} &= H_{a_1}^{a_1} D_{a_1, a_2} \Psi_{a_2}^V, \\ Q(H_{a_2}^{b_1} \Psi_{a_2}^V) &= O_{b_1|a_2}^{b_1}, & O_{b_1|a_2}^{b_1} &= H_{b_1}^{b_1} D_{b_1, a_2} \Psi_{a_2}^V. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Операторы $H_{a_2}^{a_1}$ и $H_{a_2}^{b_1}$ определяют представителей $O_{a_2}^{a_1} = H_{a_2}^{a_1} \Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}$ и $O_{a_2}^{b_1} = H_{a_2}^{b_1} \Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}$ классов когомологий $H_1^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$.

Построение представителей пространства когомологий $H_{-1}^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$ несколько хитрее.

⁴⁾ Существует отображение $V_{a_1} \rightarrow \mathcal{L}_{a_1}$ из модуля Верма в неприводимый модуль Виасоро. Следовательно, существует отображение $H_*^{\text{rel}}(V_{a_1}) \rightarrow H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$. Правая часть равенства (3.10) лежит в ядре этого отображения, тогда как образом состояния $H_{a_1}^{a_0} \Psi_{a_1}^V$ является состояние $H_{a_1}^{a_0} \Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}$. Обозначим последнее как $O_{a_1}^{a_0}$, тогда под действием этого отображения уравнение (3.10) принимает вид $Q(O_{a_1}^{a_0}) = 0$.

ШАГ 1. Рассмотрим относительный БРСТ-комплекс $C_*^{\text{rel}}(V_{a_2})$. Как отмечалось выше, в модуле Верма V_{a_2} имеются два особых вектора. Введем состояния

$$O_{a_1|a_2}^{a_0} = H_{a_1}^{a_0} D_{a_1,a_2} \Psi_{a_2}^V, \quad O_{b_1|a_2}^{a_0} = H_{b_1}^{a_0} D_{b_1,a_2} \Psi_{a_2}^V.$$

Эти состояния подобны состояниям $H_{a_1}^{a_0} \Psi_{a_1}^V$ и $H_{b_1}^{a_0} \Psi_{b_1}^V$, определенным на предыдущем уровне. Таким образом, из соотношений (3.9)–(3.11) получаем

$$Q(O_{a_1|a_2}^{a_0}) = H_{a_1}^{a_0} D_{a_0,a_1} D_{a_1,a_2} \Psi_{a_2}^V, \quad Q(O_{b_1|a_2}^{a_0}) = H_{b_1}^{a_0} D_{a_0,b_1} D_{b_1,a_2} \Psi_{a_1}^V. \quad (3.13)$$

Как обсуждалось выше, в модулях Верма V_{a_1} и V_{b_1} имеются особые векторы с весом $a_0 = 1$. Эти модули, а следовательно, и особые векторы, содержатся в модуле Верма V_{a_2} . Поскольку модуль Верма V_{a_2} содержит только один особый вектор с весом a_0 , получаем операторное тождество $D_{a_0,a_1} D_{a_1,a_2} = D_{a_0,b_1} D_{b_1,a_2}$. Таким образом, из (3.13) получаем

$$Q(O_{a_1|a_2}^{a_0} - O_{b_1|a_2}^{a_0}) = 0.$$

Последующие рассуждения аналогичны шагам 2, 3, которые мы применяли на предыдущем уровне. Рекуррентное уравнение принимает вид

$$Q(H_{a_2}^{a_0} \Psi_{a_2}^V) = O_{a_1|a_2}^{a_0} - O_{b_1|a_2}^{a_0}, \quad (3.14)$$

$O_{a_0}^{a_2} = H_{a_2}^{a_0} \Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}$ – класс когомологий в пространстве $H_{-1}^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Мы видим, что уравнение (3.14) определяет класс когомологий на втором уровне через классы когомологий на первом уровне.

Точные формулы для классов когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$ приведены в приложении.

УРОВЕНЬ ВЛОЖЕНИЯ n . Укажем, как выглядят рекуррентные уравнения для классов когомологий пространства $H_*(\mathcal{L}_{a_n})$. Базисные классы когомологий этого пространства и их духовые числа N^g можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} O_{a_n}^{a_1} & O_{a_n}^{a_2} & \dots & O_{a_n}^{a_{n-1}} & & & \\ & & & & & & O_{a_n}^{a_n} \\ O_{a_n}^{a_0} & & & & & & \\ & & & & & & \\ O_{a_n}^{b_1} & O_{a_n}^{b_2} & \dots & O_{a_n}^{b_{n-1}} & & & \end{array}$$

$$N^g = -n+1, \quad -n+3, \quad -n+5, \quad \dots, \quad n-1, \quad n+1.$$

Пусть γ_k и δ_k – это или a_k , или b_k . Определим множество операторов $H_{a_n}^{\gamma_k}$ формулой

$$O_{a_n}^{\gamma_k} = H_{a_n}^{\gamma_k} \Psi_{a_n}^{\mathcal{L}}.$$

Эти операторы являются многочленами от образующих L_n алгебры Вирасоро и духов c_n, b_n с $n < 0$. Введем множество состояний

$$O_{\delta_{n-1}|a_n}^{\gamma_j} = H_{\delta_{n-1}}^{\gamma_j} D_{\delta_{n-1},a_n} \Psi_{a_n}^V.$$

Эти состояния подобны состояниям $H_{\delta_{n-1}}^{\gamma_j} \Psi_{\delta_{n-1}}^{\mathcal{L}}$, т. е. классам когомологий на предыдущем уровне $n - 1$. Таким образом, по предположению рекуррентной процедуры множество операторов $H_{\delta_{n-1}}^{\gamma_j}$ должно быть определено. Операторы D_{δ_{n-1}, a_n} определяются особыми векторами в модуле Верма V_{a_n} . Теперь можно сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для классов когомологий пространства $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ множество рекуррентных уравнений имеет вид*

$$Q(H_{a_n}^{\gamma_j} \Psi_{a_n}^V) = \begin{cases} O_{a_{n-1}|a_n}^{\gamma_j} - O_{b_j|a_n}^{\gamma_j}, & j = 0, \dots, n-2, \\ O_{\gamma_{n-1}|a_n}^{\gamma_{n-1}}, & j = n-1, \\ 0, & j = n, \end{cases}$$

и состояния $O_{a_n}^{\gamma_j} = H_{a_n}^{\gamma_j} \Psi_{a_n}^{\mathcal{L}}$ образуют базис в пространстве когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Можно сформулировать аналогичное предложение для пространства когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Как следствие предложения 2, мы видим, что формы для всех классов когомологий можно определить из старших классов и операторов $D_{\Delta', \Delta}$. Выражения для операторов $D_{\Delta', \Delta}$ были найдены в работе [17].

3.3. Операторы, действующие на пространстве относительных когомологий. В п. 3.2 мы построили базис в пространстве когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Для исследования операторной алгебры удобно выбрать другой базис в этом пространстве когомологий. Для этого введем некоторые операторы, действующие на пространстве когомологий.

Рассмотрим два оператора

$$X = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_{-n} c_n, \quad X_+ = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3 c_{-n} c_n.$$

Эти операторы коммутируют с БРСТ-зарядом Q . Действительно, легко проверить, что оператор X равен $[Q, c_0]$ и коммутирует с БРСТ-зарядом в силу свойства $Q^2 = 0$. Коммутативность оператора X_+ с БРСТ-зарядом проверяется прямым вычислением. Таким образом, эти операторы действуют на пространстве относительных когомологий, т. е. если w представляет класс БРСТ-когомологий с духовым числом k , то Xw и X_+w представляют классы когомологий с духовыми числами $k + 2$.

Операторы X и X_+ удовлетворяют соотношению

$$X \cdot X_+ = 0$$

на пространстве когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{\Delta})$. Это соотношение можно проверить следующим образом. Введем оператор

$$\tilde{Y} = \frac{1}{12} \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i, j, k \neq 0}} (i-j)(j-k)(k-i) c_i c_j c_k. \quad (3.15)$$

Можно проверить, что $X \cdot X_+ = [\tilde{Y}, Q]$. Поэтому для любого класса когомологий w имеем $XX_+w = [\tilde{Y}, Q]w = -Q\tilde{Y}(w)$, т. е. $XX_+w = 0$ на пространстве когомологий.

Операторы X и X_+ с отношением $XX_+ = 0$ порождают алгебру, действующую на пространстве когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)^5$.

Операторы X и X_+ можно использовать для построения представителей классов когомологий. Рассмотрим пространство $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Для краткости обозначим через O_{a_n} класс когомологий $O_{a_n}^{a_0}$ с наименьшим духовым числом.

ТЕОРЕМА 1. *Классы когомологий*

$$O_{a_n}, \quad XO_{a_n}, X^2O_{a_n}, \dots, X^nO_{a_n}, \quad X_+O_{a_n}, X_+^2O_{a_n}, \dots, X_+^{n-1}O_{a_n}$$

образуют базис в пространстве когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Теорему 1 можно проиллюстрировать следующим образом:

$$N^g = \quad -n+1, \quad -n+3, \quad -n+5, \quad \dots, \quad n-1, \quad n+1.$$

Похожая теорема имеет место для пространства когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Доказательство этих теорем будет опубликовано в другой статье⁶⁾. Проверим теорему 1 на первом нетривиальном примере $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Из явного вида классов когомологий (см. приложение) получаем

$$\begin{aligned} X(O_{a_2}^{a_0}) &= -\frac{5}{3} O_{a_2}^{b_1} - O_{a_2}^{a_1}, & X_+(O_{a_2}^{a_0}) &= \frac{7}{3} O_{a_2}^{b_1} - O_{a_2}^{a_1}, \\ X^2(O_{a_2}^{a_0}) &= 240 O_{a_2}^{a_2}, & X_+^2(O_{a_2}^{a_0}) &= -3696 O_{a_2}^{a_2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

откуда следует, что классы когомологий $O_{a_2}, XO_{a_2}, X^2O_{a_2}, X_+O_{a_2}$ образуют базис в пространстве когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Также из (3.16) следует, что базис, введенный в теореме 1, отличается от введенного в предложении 2.

Из теоремы 1 следует, что $O_{a_n}^{a_n} = \lambda X^n O_{a_0}^{a_n}$, где $\lambda \neq 0$, т. е. старший класс когомологий можно получить из младшего с помощью оператора X . Этот факт имеет

⁵⁾С более абстрактной точки зрения, мы изучаем действие когомологий алгебры Вирасоро на полубесконечных когомологиях. Операторы X и X_+ образуют базис в двумерном пространстве $H^2(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathbb{C})$, где $\text{Vir}_0 = \langle L_0, c \rangle$. Вся алгебра $H^*(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathbb{C})$ порождается образующими X и X_+ с одним отношением $XX_+ = 0$.

⁶⁾Идея доказательства следующая (она принадлежит Б. Фейгину). Алгебра, порожденная образующими X, X_+ с отношением $XX_+ = 0$, – это алгебра когомологий $H^*(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathbb{C})$. Пространство гомологий $H_*(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathbb{C})$ – косвободный модуль над этой алгеброй. Неприводимый модуль Вирасоро $\mathbb{C}$ является двойственным к некоторому бесконечному комплексу $\mathcal{K}$ посредством двойственности между $c = 0$ и $c = 26$ модулями Вирасоро. Отсюда следует, что $H^{\infty/2+*}(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathcal{K})$ – свободный модуль над алгеброй $H^*(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathbb{C})$. Неприводимый модуль $\mathcal{L}_{a_n}$ квазиизоморфен обрезанию комплекса $\mathcal{K}$. Поэтому пространство $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) = H^{\infty/2+*}(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathcal{L}_{a_n})$ – циклический модуль над алгеброй $H^*(\text{Vir}, \text{Vir}_0, \mathbb{C})$.

отношение только к старшему и младшему классам когомологий, поэтому у него должен быть аналог в подходе, в котором теория Лиувилля реализована через свободные поля (см. сноску 2). Действительно, формула $O_{a_n}^{a_n} = \lambda X^n O_{a_0}^{a_n}$ эквивалентна уравнению (2.12) в работе [14].

Напомним, что все классы когомологий, за исключением старших, получаются из классов когомологий предыдущего уровня рекуррентной процедурой. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что все классы когомологий (включая старший) в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ можно получить из класса когомологий с наименьшим духовым числом O_{a_n} применением операторов X, X_+ . Поэтому все классы когомологий можно найти из простейшей когомологии $O_{a_0}^{a_0} \in H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_0})$ (см. (3.8)).

3.4. Операторная алгебра. Физические операторы можно построить из состояний в гильбертовом пространстве, используя соответствие между состояниями и операторами. Любое состояние в гильбертовом пространстве имеет образ в пространстве локальных операторов. Например, вектору старшего веса соответствует примарное поле такой же конформной размерности.

Для любого класса когомологий O можно рассмотреть соответствующий локальный оператор $O(z)$, коммутирующий с БРСТ-зарядом Q . Этот оператор не зависит от точки z , по модулю БРСТ-точных слагаемых. Действительно,

$$\delta O(z) = L_{-1}O(z), \quad L_{-1}O = [Q, b_{-1}]O = Qb_{-1}O.$$

Хорошо известно, что любой нетривиальный класс БРСТ-когомологий O имеет нулевую конформную размерность. Это легко доказать. Предположим, что $L_0O = \Delta O$ и $\Delta \neq 0$. Отсюда мы имеем

$$O = \Delta^{-1}L_0O = \Delta^{-1}[Q, b_0]O = Q(\Delta^{-1}b_0O).$$

Общий вид разложения операторного произведения любых двух локальных операторов $O_1(z)$ и $O_2(0)$ можно записать как

$$O_1(z)O_2(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(0)z^n,$$

где коэффициенты разложения $A_n(0)$ – некоторые операторы конформной размерности n . Поскольку операторы $O_1(z)$ и $O_2(0)$ коммутируют с БРСТ-зарядом Q , коэффициенты разложения $A_n(z)$ тоже с ним коммутируют. Поскольку не существует классов когомологий с ненулевой конформной размерностью, только $A_0(z)$ может соответствовать некоторому нетривиальному классу БРСТ-когомологий. Обозначим $A_0(z)$ как $O_3(z)$. Таким образом, операторное произведение по модулю БРСТ-точных слагаемых индуцирует структуру кольца:

$$O_1(z)O_2(0) = O_3(0) + \text{БРСТ-точные слагаемые},$$

что обозначается

$$O_1 \cdot O_2 = O_3. \quad (3.17)$$

Заметим, что операторная алгебра на пространстве относительных когомологий не является ассоциативной. Действительно, рассмотрим простейший нетривиальный пример и покажем, что

$$(O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}) \cdot O_{a_2}^{a_0} \neq O_{a_1}^{a_1} \cdot (O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_2}^{a_0}). \quad (3.18)$$

Левая часть (3.18) равна нулю в пространстве когомологий. Действительно, из правил слияния вырожденных представлений алгебры Вирасоро [3] и условия сохранения духового числа следует, что $O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}$ принадлежит $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$ и имеет духовое число 4. В силу результатов Лиана и Цукермана (3.2) $H_4^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1}) = 0$. Поэтому если $O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}$ равняется нулю, то левая часть (3.18) равняется нулю.

Правую часть (3.18) можно вычислить, используя явный вид операторов, приведенный в приложении. Можно показать, что правая часть равна $240 O_{a_2}^{a_2}$. Это вычисление показывает, что операторная алгебра классов относительных когомологий неассоциативна.

Отсутствие ассоциативности в операторной алгебре довольно нежелательно. Укажем причину этого. До сих пор мы обсуждали классы относительных БРСТ-когомологий w по модулю Qw' , где w , и w' обращаются в нуль оператором b_0 . Заметим, что существуют состояния вида $Q\tilde{w}$ такие, что $b_0\tilde{w} \neq 0$. Например, таким состоянием является состояние $O_{a_1}^{a_1}$:

$$O_{a_1}^{a_1} = Q(c_0 b_{-1} \Psi_{a_1}).$$

Любая корреляционная функция, содержащая такие состояния, обращается в нуль. Можно сказать, что эти состояния не являются физическими.

Таким образом, мы должны исключить такие состояния из физического спектра. Для этого в следующем разделе мы рассмотрим абсолютный БРСТ-комплекс.

4. АБСОЛЮТНЫЕ КОГОМОЛОГИИ

4.1. Базисные классы когомологий. Рассмотрим абсолютный БРСТ-комплекс $C_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Лиан и Цукерман доказали, что классы когомологий $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $\Delta \in E$. Напомним, что E — это множество старших весов, появляющихся в диаграмме вложений модулей Верма (3.1). Можно уточнить результат Лиана и Цукермана и сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\Delta \in E$, то размерность пространства когомологий $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_\Delta)$ дается формулой*

$$\dim H_k^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n + 1, -n + 3, \dots, n - 1, \\ 1, & k = -n + 4, -n + 6, \dots, n + 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в которой предполагается, что $n > 0$. В случае $n = 0$ размерность пространства когомологий

$$\dim H_k^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1} + \delta_{k,2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для $H_k^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ (другой случай разбирается аналогично). Следуя работам [15], [6], можно рассмотреть длинную точную последовательность, содержащую пространства относительных и абсолютных когомологий:

$$\dots \xrightarrow{\gamma_{k-1}} H_{k-2}^{\text{rel}} \xrightarrow{\alpha_{k-1}} H_k^{\text{rel}} \xrightarrow{\beta_k} H_k^{\text{abs}} \xrightarrow{\gamma_k} H_{k-1}^{\text{rel}} \xrightarrow{\alpha_k} H_{k+1}^{\text{rel}} \xrightarrow{\beta_{k+1}} H_{k+1}^{\text{abs}} \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \dots \quad (4.1)$$

Из точности этой последовательности следует, что

$$\dim H_k^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim \text{im}(\gamma_k) + \dim \text{im}(\beta_k) = \dim \ker(\alpha_k) + \dim H_k^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) - \dim \text{im}(\alpha_{k-1}).$$

Поскольку размерности пространств когомологий $\dim H_k^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ известны (3.2), достаточно изучить отображения α_k .

Отображение $\alpha_*: H_{*-1}^{\text{rel}} \rightarrow H_{*+1}^{\text{rel}}$ определяется действием оператора c_0 , а затем действием БРСТ-заряда Q . Заметим, что $[Q, c_0] = X$. Поэтому отображение α_* эквивалентно действию оператора X . Тогда из теоремы 1 заключаем, что ядро отображения α_* порождается классами когомологий вида $X_+^j O_{a_n}$, $1 \leq j < n$, и $X^n O_{a_n}$. Образ этого отображения порожден классами когомологий $X^j O_{a_n}$, $1 \leq j \leq n$. Из этих соображений можно легко получить размерности пространств когомологий.

Смысл длинной точной последовательности (4.1) состоит в следующем. Любой класс абсолютных когомологий может быть либо классом из $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$, либо представлен состоянием вида $c_0 w + w'$, где $w \in H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$ и $w' \in C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_\Delta)$. Некоторые классы относительных когомологий не являются классами абсолютных когомологий. Действительно, можно рассмотреть действие БРСТ-оператора на состояние вида $c_0 w + w'$ и получить

$$Q(c_0 w + w') = Xw + Qw'. \quad (4.2)$$

Таким образом, любой класс относительных когомологий вида Xw БРСТ-точен в пространстве абсолютных когомологий. Из теоремы 1 следует, что классы относительных когомологий

$$O_{a_n}, \quad X_+ O_{a_n}, \quad X_+^2 O_{a_n}, \quad \dots, \quad X_+^{n-1} O_{a_n} \quad (4.3)$$

не имеют вида Xw и, следовательно, образуют базис в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Чтобы расширить набор состояний (4.3) до базиса в пространстве абсолютных когомологий $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$, надо добавить некоторые состояния вида $c_0 w + w'$, где $w \in H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$ и $w' \in C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Из (4.2) следует, что если $Q(c_0 w + w') = 0$, то $Xw = 0$ в $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Тогда согласно теореме 1 w является линейной комбинацией классов когомологий $X_+ O_{a_n}, X_+^2 O_{a_n}, \dots, X_+^{n-1} O_{a_n}, X^n O_{a_n}$. Тогда все дополнительные базисные состояния имеют вид $c_0 X_+ O_{a_n}, c_0 X_+^2 O_{a_n}, \dots, c_0 X_+^{n-1} O_{a_n}, c_0 X^n O_{a_n}$ по модулю $C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Введем оператор

$$Y = \frac{1}{12} \sum_{i+j+k=0} (i-j)(j-k)(k-i) c_i c_j c_k$$

с духовым числом 3. Легко проверить, что этот оператор коммутирует с БРСТ-зарядом Q и, таким образом, действует на пространстве когомологий. Более того, если $w \in H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$, то $Yw = c_0 X_+ w + w'$ при $w' \in C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$.

Из изложенного выше следует, что набор (4.3) можно расширить до базиса в пространстве абсолютных когомологий $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ добавлением следующих классов когомологий:

$$YO_{a_n}, YX_+ O_{a_n}, YX_+^2 O_{a_n}, \dots, YX_+^{n-1} O_{a_n}.$$

Действительно, $YO_{a_n} = c_0 X_+ O_{a_n}$, $YX_+ O_{a_n} = c_0 X_+^2 O_{a_n}$, $\dots$, $YX_+^{n-2} O_{a_n} = c_0 X_+^{n-1} O_{a_n}$ по модулю $C_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Остается доказать, что $YX_+^{n-1} O_{a_n} \neq 0$ в пространстве когомологий $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Это можно доказать из соображений двойственности, как в сноске 6.

Наше обсуждение классов когомологий абсолютного БРСТ-комплекса $C_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ можно резюмировать следующей диаграммой:

$$N^g = \quad -n+1, \quad -n+3, \quad -n+5, \quad \dots, \quad n-1$$

$$\begin{array}{ccccccc} O_{a_n} & \xrightarrow{X_+} & X_+ O_{a_n} & \xrightarrow{X_+} & X_+^2 O_{a_n} & \xrightarrow{X_+} & \dots \xrightarrow{X_+} X_+^{n-1} O_{a_n} \\ & \searrow Y & & & & & \\ & & YO_{a_n} & \xrightarrow{X_+} & YX_+ O_{a_n} & \xrightarrow{X_+} & \dots \xrightarrow{X_+} YX_+^{n-1} O_{a_n} \end{array}$$

$$N^g = \quad -n+4, \quad -n+6, \quad \dots, \quad n+2.$$

Пусть γ_n — либо a_n , либо b_n . Удобно обозначить базисные классы когомологий следующим образом:

$$O_{\gamma_n}^i = (n-i-1)! X_+^i O_{\gamma_n}, \quad N_{\gamma_n}^i = (n-i-1)! YX_+^i O_{\gamma_n}, \quad 0 \leq i < n. \quad (4.4)$$

Мы увидим, что эти обозначения упрощают структурные константы операторной алгебры. Ясно, что

$$X_+ O_{\gamma_n}^i = (n-i-1) O_{\gamma_n}^{i+1}, \quad X_+ N_{\gamma_n}^i = (n-i-1) N_{\gamma_n}^{i+1}. \quad (4.5)$$

Духовые числа для этих классов когомологий равны

$$N^g(O_{\gamma_n}^i) = 2i - n + 1, \quad N^g(N_{\gamma_n}^i) = 2i - n + 4.$$

4.2. Операторная алгебра. Разложение операторного произведения индуцирует на пространстве абсолютных когомологий структуру кольца (3.17). Из стандартных предположений про операторное произведение следует, что это кольцо должно быть ассоциативным и коммутативным. В кольце имеется единичный элемент, а именно тождественный оператор $O_{a_1}^0(z) = \mathbb{I}(z)$.

Как мы покажем, операторная алгебра в пространстве абсолютных когомологий почти определяется операторами X_+ и Y . Таким образом, полезно сначала рассмотреть эти операторы. Благодаря существующему соответствию между состояниями и операторами любой оператор, действующий на гильбертовом пространстве состояний, имеет образ, действующий на пространстве локальных операторов. Можно показать, что образ оператора X_+ дается контурным интегралом:

$$X_+ = - \oint dz c(z) \partial^3 c(z), \quad (4.6)$$

где мы опустили БРСТ-точные слагаемые. Как следствие этого представления, мы заключаем, что оператор X_+ дифференцирует произведение любых двух локальных операторов, т. е.

$$X_+(O_1 \cdot O_2) = (X_+ O_1) \cdot O_2 + O_1 \cdot (X_+ O_2). \quad (4.7)$$

Теперь рассмотрим оператор Y . Можно проверить, что применение оператора Y к некоторому физическому оператору эквивалентно взятию нулевой моды в операторном произведении оператора O и $\frac{1}{2} : c \partial c \partial^2 c :$, т. е.

$$YO(0) = \frac{1}{2} \text{Res} \Big|_{z=0} \left(\frac{:c(z) \partial c(x) \partial^2 c(z): O(0)}{z} \right)$$

по модулю БРСТ-точных слагаемых. Заметим, что $\frac{1}{2} : c \partial c \partial^2 c :$ – локальный оператор, соответствующий классу когомологий $N_{a_1}^0$:

$$N_{a_1}^0 = \frac{1}{2} : c \partial c \partial^2 c : .$$

Поэтому на пространстве когомологий мы имеем

$$YO = N_{a_1}^0 \cdot O. \quad (4.8)$$

Изучение операторной алгебры упрощается благодаря правилам слияния. Сначала рассмотрим случай, когда операторы имеют вид $O_{a_n}^i$. Соответствующие состояния образуют базис в $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Приняв во внимание правила слияния для вырожденных представлений алгебры Вирасоро и условие сохранения духового числа, получаем

$$O_{a_{k+1}}^i \cdot O_{a_{l+1}}^j = \sum_{n=0}^{i+j} \lambda_n O_{a_{k+l+1}-2n}^{i+j-n}, \quad (4.9)$$

где λ_n – некоторые структурные константы, зависящие от индексов i, j, k, l .

Операторы X_+ и Y почти определяют структурные константы операторной алгебры в силу следующих двух предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что*

$$O_{a_{k+1}}^0 \cdot O_{a_{l+1}}^0 = O_{a_{k+l+1}}^0. \quad (4.10)$$

Тогда подкольцо $H_^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ изоморфно кольцу многочленов от двух образующих $O_{a_2}^0$ и $O_{a_2}^1$. Более того, имеем*

$$O_{a_{n+1}}^i = (O_{a_2}^0)^{n-i} (O_{a_2}^1)^i. \quad (4.11)$$

В условии (4.10) мы предположили, что операторное произведение невырождено, тогда как соответствующий коэффициент λ_0 (см. (4.9)) можно приравнять единице с помощью нормировки младших классов когомологий O_{a_n} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Достаточно доказать соотношение (4.11). При $n = 0$ это соотношение эквивалентно тому, что $O_{a_1}^0$ — единичный элемент. При $n = 1$ уравнение (4.11) очевидно. Из предположения (4.10) следует, что

$$O_{a_{n+1}}^0 = O_{a_n}^0 \cdot O_{a_2}^0 = O_{a_{n-1}}^0 \cdot O_{a_2}^0 \cdot O_{a_2}^0 = \dots = (O_{a_2}^0)^n, \quad (4.12)$$

т. е.

$$O_{a_{n+1}}^0 = (O_{a_2}^0)^n. \quad (4.13)$$

Применяя X_+ к обеим частям последнего равенства и используя (4.7), (4.5), получаем, что

$$O_{a_{n+1}}^1 = (O_{a_2}^0)^{n-1} \cdot O_{a_2}^1.$$

Далее, применяя X_+ к обеим частям этого равенства, получаем, что

$$O_{a_{n+1}}^2 = (O_{a_2}^0)^{n-2} \cdot (O_{a_2}^1)^2.$$

Таким образом, можно показать, что применение оператора X_+ i раз к обеим частям равенства (4.13) приводит к формуле (4.11).

Интересно сравнить наши результаты с результатами Канно и Сармади [8], где неприводимые модули алгебры Вирасоро в лиувиллевском секторе заменены модулями Фейгина–Фукса. Как упоминалось в сноске 2, классы когомологий из работы [8] соответствуют нашим классам относительных когомологий со старшим и младшим духовыми числами. Например, w^n в обозначениях работы [8] соответствует $O_{a_{n+1}}^0$, $n \geq 0$. Результаты работы [8] подтверждают, что произведения классов когомологий вида $O_{a_{n+1}}^0$ невырождены, и предположение предложения 3 выполняется.

Структурные константы операторной алгебры на пространстве $\bigoplus_{n>0} H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ указаны в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При условиях предложения 3 имеем

$$\begin{aligned} O_{a_{k+1}}^{k-i} \cdot O_{a_{l+1}}^{l-j} &= O_{a_{k+l+1}}^{k+l-i-j}, & N_{a_{k+1}}^{k-i} \cdot O_{a_{l+1}}^{l-j} &= N_{a_{k+l+1}}^{k+l-i-j}, \\ N_{a_{k+1}}^{k-i} \cdot N_{a_{l+1}}^{l-j} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство очевидно следует из (4.11). Умножим первое равенство на $N_{a_1}^0$. Из (4.8) и (4.4) получаем

$$N_{a_{k+1}}^{k-i} \cdot O_{a_{l+1}}^{l-j} = N_{a_1}^0 \cdot O_{a_{k+1}}^{k-i} \cdot O_{a_{l+1}}^{l-j} = N_{a_1}^0 \cdot O_{a_{k+l+1}}^{k+l-i-j} = N_{a_{k+l+1}}^{k+l-i-j}.$$

Последнее равенство в (4.14) легко следует из равенств $N_{a_{k+1}}^{k-i} = Y O_{a_{k+1}}^{k-i} = N_{a_1}^0 \cdot O_{a_{k+1}}^{k-i}$ и $N_{a_1}^0 \cdot N_{a_1}^0 = Y N_{a_1}^0(z) = 0$.

Заметим, что мы рассматриваем операторную алгебру для состояний только из подпространства $\bigoplus_{n>0} H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Этого достаточно, так как существует изоморфизм пространств когомологий $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ и $H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{b_n})$. Этот изоморфизм реализуется с помощью оператора

$$O_{b_1}^0(z) = \left(\partial + \frac{2}{3} :bc: \right) \Phi_{b_1}(z),$$

где $\Phi_{b_1}(z) = \Phi_{1,2}(z)$ – примарное поле Лиувилля, соответствующее состоянию $|\mathcal{L}_{b_1}\rangle$ в гильбертовом пространстве. Действительно, из правил слияния для вырожденных представлений алгебры Вирасоро [3] и условия сохранения духового числа получаем

$$O_{b_1}^0 \cdot O_{a_{n+1}}^i = \lambda_{b_1, a_{n+1}}^i O_{b_{n+1}}^i, \quad O_{b_1}^i \cdot O_{b_{n+1}}^i = \lambda_{b_1, b_{n+1}}^i O_{a_{n+1}}^i, \quad (4.15)$$

где $\lambda_{b_1, a_{n+1}}^i$ и $\lambda_{b_1, b_{n+1}}^i$ – структурные константы. Чтобы показать, что эти константы не равны нулю, умножим обе части первого уравнения в (4.15) на оператор $O_{b_1}^0$. Принимая во внимание ассоциативность операторной алгебры, имеем

$$(O_{b_1}^0)^2 \cdot O_{a_{n+1}}^i = \lambda_{b_1, a_{n+1}}^i O_{b_1}^0 \cdot O_{b_{n+1}}^i = \lambda_{b_1, a_{n+1}}^i \lambda_{b_1, b_{n+1}}^i O_{a_{n+1}}^i.$$

Поскольку

$$(O_{b_1}^0)^2 = -\frac{14}{9} C_{(1,2),(1,2)}^{(1,1)} \mathbb{I}(z), \quad (4.16)$$

где $C_{(1,2),(1,2)}^{(1,1)}$ – структурная константа в теории Лиувилля [18], [9], мы заключаем, что

$$\lambda_{b_1, a_{n+1}}^i \lambda_{b_1, b_{n+1}}^i = -\frac{14}{9} C_{(1,2),(1,2)}^{(1,1)} \neq 0.$$

Можно перенормировать локальные операторы $O_{b_n}^0$ так, что

$$O_{b_1}^0 \cdot O_{a_{n+1}}^0 = O_{b_{n+1}}^0.$$

Применяя операторы X_+ и Y к обеим частям этого равенства, получаем

$$O_{b_1}^0 \cdot O_{a_{n+1}}^i = O_{b_{n+1}}^i, \quad O_{b_1}^0 \cdot N_{a_{n+1}}^i = N_{b_{n+1}}^i. \quad (4.17)$$

Используя предложение 4 и формулы (4.16), (4.17), легко посчитать операторное произведение любых двух локальных полей.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Одна из главных целей настоящей работы – прояснить различие между классами относительных и абсолютных когомологий. С математической точки зрения удобно сначала вычислить относительные когомологии, а затем перейти к абсолютным. В некоторых случаях (например, в случае реализации лиувиллевого сектора свободно-полевыми модулями [8], [13], [14]) существует изоморфизм $H_k^{\text{abs}} \cong H_k^{\text{rel}} + c_0 H_{k-1}^{\text{rel}}$. В частности, любой класс относительных когомологий является также классом абсолютных когомологий. В нашем случае соотношение между классами абсолютных и относительных когомологий более сложное.

В предложении 3 было доказано, что структура операторной алгебры в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$ изоморфна алгебре многочленов от двух переменных $\mathbb{C}[a, b]$, и изоморфизм реализуется отображением

$$O_{a_{n+1}}^i \mapsto a^{n-i} b^i.$$

Хорошо известно, что алгебра sl_2 действует на $\mathbb{C}[a, b]$. Таким образом, можно ожидать, что алгебра sl_2 действует в пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Легко проверить, что оператор X_+ соответствует повышающей образующей алгебры sl_2 ,

$$X_+ \mapsto b \frac{\partial}{\partial a}.$$

Можно ожидать, что существует оператор X_- , соответствующий понижающей образующей алгебры sl_2 ,

$$X_- \mapsto a \frac{\partial}{\partial b}.$$

Однако как строить такой оператор на комплексе, неизвестно. Похоже, что не существует понижающего оператора X_- такого, что $[Q, X_-] = 0$, и действие X_- на пространстве когомологий отлично от нуля. Ожидается, что существует оператор X_- такой, что $[Q, X_-] \neq 0$, но X_- действует на некоторых представителях $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{\text{abs}}(\mathcal{L}_{a_n})$. Это аналогично действию алгебры sl_2 на пространстве гармонических форм на кэлеровом многообразии (см. гл. 0, § 7 в [19]).

Лиан и Цукерман установили [20], что пространство абсолютных когомологий имеет структуру алгебры Герстенхабера. Другими словами, они определили скобку $\{u, v\}$. Эта скобка дифференцирует операторное произведение и наделяет пространство абсолютных когомологий структурой алгебры Ли. Было бы интересно вычислить эту скобку в нашем случае. Простейший пример — $\{N_{a_1}^0, O\} = X_+ O$, что эквивалентно формуле (4.6) и объясняет тот факт, что X_+ дифференцирует операторное произведение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы приводим здесь явный вид некоторых состояний в пространстве относительных когомологий. Явный вид нескольких старших классов когомологий приведен в (3.6). Здесь мы рассматриваем другие состояния. Эти примеры получаются с помощью описанной выше рекуррентной процедуры. Начнем с уровня 1.

УРОВЕНЬ ВЛОЖЕНИЯ 1. Рассмотрим пространство когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_1})$. Легко проверить, что класс когомологий с духовым числом 0 имеет следующий вид:

$$O_{a_1}^{a_0} = H_{a_1}^{a_0} \Psi_{a_1}^{\mathcal{L}} = b_{-1} \Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}.$$

Тогда $Q(O_{a_1}^{a_0}) = L_{-1} \Psi_{a_1}^{\mathcal{L}} = 0$, поскольку $L_{-1}|V_{a_1}\rangle$ — особый вектор в модуле Верма V_{a_1} и, следовательно, в неприводимом модуле $L_{-1}|\mathcal{L}_{a_1}\rangle = 0$.

В пространстве $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{b_1})$ класс когомологий с духовым числом 0 имеет вид

$$O_{b_1}^{a_0} = H_{b_1}^{a_0} \Psi_{b_1}^{\mathcal{L}} = \left(b_{-1} L_{-1} + \frac{2}{3} b_{-2} \right) \Psi_{b_1}^{\mathcal{L}}.$$

Тогда $Q(O_{b_1}^{a_0}) = (L_{-1}^2 + (2/3)L_{-2})\Psi_{b_1}^{\mathcal{L}} = 0$, поскольку $(L_{-1}^2 + (2/3)L_{-2})|V_{b_1}\rangle$ – особый вектор в модуле Верма V_{b_1} и, следовательно, в неприводимом модуле $(L_{-1}^2 + (2/3)L_{-2})|\mathcal{L}_{b_1}\rangle = 0$.

УРОВЕНЬ ВЛОЖЕНИЯ 2. Здесь мы рассматриваем только пространство когомологий $H_*^{\text{rel}}(\mathcal{L}_{a_2})$. Старший класс когомологий приведен в (3.6). Рассмотрим остальные классы.

Прямым вычислением проверяется, что классы когомологий с духовым числом 1 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} O_{a_2}^{a_1} &= H_{a_2}^{a_1}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = \left(-c_{-1}b_{-1}L_{-1}^3 - \frac{20}{3}c_{-1}b_{-2}L_{-1}^2 - 4c_{-1}b_{-2}L_{-2} - \frac{52}{3}c_{-1}b_{-3}L_{-1} + \right. \\ &\quad \left. + 3c_{-2}b_{-1}L_{-1}^2 + \frac{64}{3}c_{-3}b_{-1}L_{-1} - \frac{76}{3}c_{-1}b_{-4} + 20c_{-3}b_{-2} + \frac{44}{3}c_{-4}b_{-1} \right) \Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}, \\ O_{a_2}^{b_1} &= H_{a_2}^{b_1}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = (-c_{-2}b_{-1}L_{-1}^2 - 6c_{-2}b_{-2}L_{-1} + 4c_{-3}b_{-1}L_{-1} - \\ &\quad - 12c_{-2}b_{-3} + 16c_{-4}b_{-1})\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Действительно, можно проверить, что

$$Q(O_{a_2}^{a_1}) = D_{a_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = 0, \quad Q(O_{a_2}^{b_1}) = D_{b_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = 0.$$

Явный вид операторов D_{a_1,a_2} и D_{b_1,a_2} можно найти в работе [11].

Класс когомологий с духовым числом -1 имеет вид

$$O_{a_2}^{a_0} = \left(-\frac{2}{3}b_{-2}b_{-1}(L_{-1}^2 + 6L_{-2}) + \frac{2}{3}b_{-3}b_{-1}L_{-1} - \frac{4}{3}b_{-4}b_{-1} + 4b_{-3}b_{-2} \right) \Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}, \quad (\text{П.1})$$

и можно проверить, что

$$Q(O_{a_2}^{a_0}) = H_{a_1}^{a_0}D_{a_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} - H_{b_1}^{a_0}D_{b_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = 0,$$

что согласуется с результатом нашей рекуррентной процедуры построения.

В силу сноски 2 формула (П.1) для младшей когомологии имеет аналог в подходе, в котором лиувиллевский сектор реализован свободными полями. Действительно, эта формула эквивалентна формуле (2.9) в работе [14], полученной другими методами.

Благодарности. Авторы благодарны А. Белавину за постановку задачи и постоянное внимание к нашей работе. Мы также признательны О. Берштейн, Б. Фейгину, М. Лашкевичу, А. Лосеву, Д. Полякову и Я. Пугаю за полезные обсуждения. Работа частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 07-02-00799, 09-02-12446-офи_м) и Министерством науки и технологий РФ (грант НШ-3472.2008.2). Исследования проводились в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

Список литературы

- [1] A. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103**:3 (1981), 207–210.
- [2] J. Distler, H. Kawai, *Nucl. Phys. B*, **321**:2 (1989), 509–527; F. David, *Modern Phys. Lett. A*, **3**:17 (1988), 1651–1656.
- [3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [4] Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **142**:2 (2005), 218–234; arXiv:hep-th/0505063.
- [5] А. А. Белавин, Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **147**:3 (2006), 339–371; *Polyakov's string: twenty five years after*, arXiv:hep-th/0510214.
- [6] B. H. Lian, G. J. Zuckerman, *Phys. Lett. B*, **254**:3–4 (1991), 417–423.
- [7] B. Feigin, D. Fuchs, “Representations of the Virasoro algebra”, *Representations of Lie Groups and Related Topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, eds. A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko, Gordon and Breach, New York, 1990, 465–554.
- [8] H. Kanno, M. Sarmadi, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:1 (1994), 39–56; arXiv:hep-th/9207078.
- [9] A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605; arXiv:hep-th/9506136.
- [10] C. Imbimbo, S. Mahapatra, S. Mukhi, *Nucl. Phys. B*, **375**:2 (1992), 399–420.
- [11] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, “Verma modules over the Virasoro algebra”, *Topology, Lecture Notes in Math.*, **1060**, eds. L. D. Faddeev, A. A. Mal'cev, Springer, Berlin, 1984, 230–245.
- [12] E. Frenkel, *Phys. Lett. B*, **286**:1–2 (1992), 71–77.
- [13] S. Govindarajan, T. Jayaraman, V. John, P. Majumdar, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:12 (1992), 1063–1077; arXiv:hep-th/9112033.
- [14] S. Govindarajan, T. Jayaraman, V. John, *Nucl. Phys. B*, **402**:1–2 (1993), 118–136; arXiv:hep-th/9207109.
- [15] I. B. Frenkel, H. Garland, G. J. Zuckerman, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **83**:22 (1986), 8442–8446.
- [16] Л. В. Гончарова, *Функц. анализ и его прил.*, **7**:2 (1973), 6–14.
- [17] M. Bauer, P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Nucl. Phys. B*, **362**:3 (1991), 515–562.
- [18] H. Dorn, H.-J. Otto, *Phys. Lett. B*, **291**:1–2 (1992), 39–43; arXiv:hep-th/9206053; *Nucl. Phys. B*, **429**:2 (1994), 375–388; arXiv:hep-th/9403141.
- [19] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982.
- [20] B. H. Lian, G. J. Zuckerman, *Comm. Math. Phys.*, **154**:3 (1993), 613–646; arXiv:hep-th/9211072.

Поступила в редакцию 22.01.2010