Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Гринин, С. Р. Рамазанов, М. Н. Смоляков, Симметрии вакуума в моделях мира на бране, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 141–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:23:17

© 2010 г. И. С. Гринин*, С. Р. Рамазанов*, М. Н. Смоляков†

СИММЕТРИИ ВАКУУМА В МОДЕЛЯХ МИРА НА БРАНЕ

Обсуждаются симметрии вакуумных конфигураций в стабилизированных 5-мерных моделях мира на бране и их связь со свойствами решений соответствующих уравнений движения. На примере модели, допускающей четырехмерную метрику де Ситтера на бранах, показано, что в некоторых случаях наличие таких симметрий приводит к уменьшению количества фундаментальных параметров, которые должны быть тонко подстроены.

Ключевые слова: дополнительные измерения, модели мира на бране, космологическая постоянная.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1983 г. был предложен оригинальный сценарий для теорий с дополнительными измерениями пространства-времени, основанный на идее локализации полей на доменной стенке [1], а также вид многомерной метрики, совместный с этой гипотезой [2]. Немногим более десяти лет назад появились указания на то, что модели такого типа могут возникать в теории струн [3]–[6] (см. также работу [7] и библиографию к ней). В этом случае наши три пространственных измерения реализованы как трехмерная гиперповерхность (мембрана), вложенная в многомерное пространство-время. Такие гиперповерхности называются 3-бранами, или просто бранами. В моделях мира на бране дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечный размер и приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам.

Одной из целей построения таких моделей является решение проблемы иерархии: почему гравитация такая слабая по сравнению с остальными типами взаимодействий? С этой точки зрения большой интерес представляет модель, предложенная Рэндалл и Сундрумом [8]. В ней гравитация в многомерном пространстве-времени становится “сильной” не при энергиях порядка 10^{19} ГэВ, а при намного меньших

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

†Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцина, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: smolyakov@theory.sinp.msu.ru

энергиях – возможно, порядка 1–10 ТэВ. Поэтому новые эффекты, предсказываемые такими моделями, могут быть проверены уже в ближайшее время в экспериментах на коллайдерах. Подробно эта модель рассмотрена, например, в обзоре [9].

Решение в модели Рэндалл–Сундрума не фиксирует расстояние между бранами, что проявляется в линеаризованной теории в виде безмассового скалярного поля – радиона. Взаимодействие этого поля с материей на бране оказывается противоречащим имеющимся экспериментальным данным. Таким образом, для того чтобы модель стала феноменологически приемлемой, необходимо наличие массы у радиона, что является, в частности, следствием стабилизации расстояния между бранами. Известно, что этого можно достичь путем введения 5-мерного скалярного поля ϕ с некоторым потенциалом $V(\phi)$ во всем пространстве и дополнительными потенциалами $\lambda_{1,2}(\phi)$ на бранах [10]. Размер дополнительного измерения в этой модели определяется значениями 5-мерного скалярного поля на бранах. Однако, хотя такая модель [10] и приводит к непротиворечивым следствиям с точки зрения линеаризованной теории [11], она не учитывает космологическую эволюцию. Действительно, есть предположение, что ускоренное расширение Вселенной обеспечивается ненулевым, хотя и очень маленьким, значением космологической постоянной, что соответствует ненулевой плотности вакуумной энергии. В рамках моделей мира на бране этому должно соответствовать ненулевое постоянное значение параметра Хаббла в фоновом решении для 5-мерной метрики.

Космология моделей мира на бране активно обсуждается в научной литературе (см. обзоры [12], [13] и библиографию в них). Интересным классом являются модели, описывающие метрику де Ситтера (dS_4) на бране в вакуумном состоянии. Есть примеры такого типа решений в слегка модифицированной модели Рэндалл–Сундрума с неодинаковыми абсолютными значениями натяжений бран [14], [15] в моделях с дополнительной материей в 5-мерном пространстве и на бранах [16], включая скалярное поле в 5-мерном пространстве [17], [18]. Модели последнего типа представляют особый интерес, так как позволяют зафиксировать размер дополнительного измерения, и далее мы сфокусируем свое внимание именно на них.

Данная работа посвящена некоторым общим свойствам моделей мира на бране. Мы покажем, что при определенном выборе 5-мерного скалярного потенциала в теории появляется явная дилатационная симметрия уравнений движения для фонового решения, приводящая к уменьшению числа параметров модели, которые должны быть тонко подстроены (такая подстройка присуща практически всем 5-мерным моделям мира на бране). Наличие такой симметрии оказывается тесно связанным со свойствами самих фоновых решений. Также мы обсудим феноменологический механизм, основанный на использовании калибровочного поля 3-формы на одной из бран и дополнительных симметричных аргументов, позволяющий полностью избавиться от тонкой подстройки параметров. В заключение мы рассмотрим возможные энергетические масштабы используемой нами модели.

2. ДЕЙСТВИЕ МОДЕЛИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим модель, описывающую 5-мерную гравитацию, взаимодействующую минимальным образом с 5-мерным скалярным полем и бранами. Действие модели запишем в виде

$$S = M^3 \int R \sqrt{-g} d^5x - \int \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^5x - \int (\lambda_1(\phi) \delta(y) + \lambda_2(\phi) \delta(y - L)) \sqrt{-g} d^5x, \quad (1)$$

где M – 5-мерная масса Планка, $\lambda_{1,2}(\phi)$ – потенциалы скалярного поля на бранах. Будем считать, что дополнительное измерение образует орбифолд S^1/Z_2 с отождествленными точками y и $-y$. В соответствии с этим метрика g_{MN} и скалярное поле ϕ удовлетворяют условиям симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), & g_{\mu 4}(x, -y) &= -g_{\mu 4}(x, y), \\ g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y), & \phi(x, -y) &= \phi(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y = 0$ и $y = L$.

Фоновую (вакуумную) метрику и фоновое решение для скалярного поля будем искать в виде [10]

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(y)} (-dt^2 + a^2(t) \eta_{ij} dx^i dx^j) + dy^2, \quad (3)$$

где $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$, т.е. мы предполагаем, что брана является пространственно-плоской, а также

$$\phi(x, y) = \phi(y). \quad (4)$$

Последнее условие гарантирует нам, что в вакуумном состоянии размер дополнительного измерения не будет меняться во времени.

Ниже мы будем интересоваться случаем, когда 4-мерное пространство-время на бранах в вакуумном состоянии является максимально симметричным (максимально симметричными являются пространства Минковского, де Ситтера и анти-де Ситтера [19]). Из физических соображений очевидно, что следует ограничиться плоским 4-мерным пространством и пространством де Ситтера, т.е. взять

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (5)$$

где H – 4-мерный параметр Хаббла. В этом случае уравнения движения, следующие из действия (1), принимают вид [10]

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{dV}{d\phi} + \frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y - L), \quad (6)$$

$$M^3(A'^2 - H^2 e^{-2A}) = \frac{\phi'^2}{24} - \frac{V}{12}, \quad (7)$$

$$3M^3(A'' + H^2 e^{-2A}) = -\frac{\phi'^2}{2} - \frac{1}{2} \lambda_1 \delta(y) - \frac{1}{2} \lambda_2 \delta(y - L). \quad (8)$$

Из общих соображений следует, что уравнений должно быть четыре: 00-, ij - и 44-компоненты уравнений Эйнштейна и уравнение для скалярного поля. Однако для метрики вида (3) 00- и ij -компоненты уравнений Эйнштейна совпадают. Более того, несложно показать, что во всем пространстве, кроме бран, только два из представленных выше уравнений (6)–(8) независимы.

Уравнения (6)–(8) можно представить в виде уравнений на интервале $(0, L)$ и граничных условий на бранах. Граничные условия получаются стандартным способом – интегрированием уравнений (6), (8) в бесконечно малой области около бран с учетом условий (2). Они принимают вид

$$\phi'|_{y=+0} = \frac{1}{2} \frac{d\lambda_1}{d\phi}, \quad \phi'|_{y=L-0} = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda_2}{d\phi}, \quad (9)$$

$$A'|_{y=+0} = -\frac{1}{12M^3} \lambda_1, \quad A'|_{y=L-0} = \frac{1}{12M^3} \lambda_2. \quad (10)$$

Теперь определим вид потенциалов на бранах, которые мы будем использовать в дальнейшем. Возьмем $\lambda_{1,2}(\phi)$ в виде

$$\lambda_1(\phi) = \epsilon_1 + F_1(x)(\phi - \phi_1), \quad (11)$$

$$\lambda_2(\phi) = \epsilon_2 + F_2(x)(\phi - \phi_2), \quad (12)$$

где $\epsilon_{1,2}$, $\phi_{1,2}$ – параметры теории, а $F_{1,2}(x)$ – вспомогательные скалярные поля. Поля $F_{1,2}(x)$ не имеют кинетических членов и выглядят довольно странно, однако можно вспомнить, что в суперсимметричных теориях поля такого типа используются для обеспечения полноты алгебры суперсимметрии [20]. Примеры использования полей такого типа в классической теории поля также можно найти в монографии [20].

Уравнения движения для скалярных полей $F_{1,2}(x)$ приводят к условиям на бранах

$$\phi|_{y=0} = \phi_1, \quad (13)$$

$$\phi|_{y=L} = \phi_2. \quad (14)$$

Таким образом, по своим физическим следствиям потенциалы (11), (12) эквивалентны “бесконечно жестким” потенциалам на бранах, рассмотренным в работе [17]. Тем не менее потенциалы (11), (12) фактически содержат в себе дополнительные степени свободы, связанные с полями $F_{1,2}(x)$, что ставит вопрос о стабильности фоновых решений. Для выяснения ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть линеаризованную гравитацию в теории и найти спектр физических возмущений гравитационного и скалярного полей. В общем случае, при $H \neq 0$, вопрос стабильности фонового решения (и не только при потенциалах вида (11), (12)) представляется очень сложным, и его изучение выходит за рамки данной работы. Однако в более простом случае $H = 0$ мы можем воспользоваться результатами работы [11], в которой обсуждался вопрос о стабильности решений для любого 5-мерного скалярного потенциала. В этой работе показано, что тензорный сектор эффективной теории на бране не меняется при изменении стабилизирующих скалярных потенциалов $\lambda_{1,2}(\phi)$ на бранах. Также результаты работы [11] показывают, что граничные условия вида (13), (14), которые фактически соответствуют пределу $\beta_{1,2} \rightarrow \infty$ в работе [11], не приводят к возникновению в скалярном секторе нулевой моды и тахионов.

Ниже мы рассмотрим некоторые фоновые решения в модели (1), (3)–(5) для случаев $H \neq 0$ и $H = 0$ и обсудим их свойства.

3. МОДЕЛЬ С НЕНУЛЕВЫМ ПАРАМЕТРОМ ХАББЛА НА БРАНАХ

Перейдем к рассмотрению модели, которая приводит к ненулевому значению параметра Хаббла на бранах. Выберем 5-мерный потенциал скалярного поля в виде

$$V(\phi) = \beta^2 e^{-\phi/\sqrt{6M^3}}, \quad (15)$$

где β – действительная константа.

Так как уравнения (6)–(8) при $0 < y < L$ не независимы, для дальнейшего исследования мы возьмем уравнения (6), (7), которые при $0 < y < L$ принимают вид

$$\phi'' + 4A'\phi' = -\frac{\beta^2}{\sqrt{6M^3}} e^{-\phi/\sqrt{6M^3}}, \quad (16)$$

$$M^3(A'^2 - H^2 e^{-2A}) = \frac{\phi'^2}{24} - \frac{\beta^2}{12} e^{-\phi/\sqrt{6M^3}}. \quad (17)$$

Потенциал (15) выбран специальным образом, так как он позволяет упростить процедуру нахождения аналитического решения системы уравнений (16), (17). Заметим, что потенциал (15) также обеспечивает наличие дилатационной симметрии уравнений движения (16), (17). В явном виде эта симметрия может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A(y) &\rightarrow A(\alpha y), \\ \phi(y) &\rightarrow \phi(\alpha y) - \sqrt{24M^3} \ln \alpha, \\ H &\rightarrow \alpha H, \end{aligned} \quad (18)$$

где α – константа. Наличие подобного рода симметрий подсказывает, что в теории должен появиться некоторый свободный масштабный фактор. Ниже мы увидим, что в данном случае без учета бран эта симметрия действительно приводит к фоновому решению со свободным масштабным фактором. Очевидно, что наличие бран явно нарушает данную симметрию.

Отметим, что симметрия (18) есть не более чем симметрия уравнений движения для фоновой конфигурации вида (3)–(5). Она существенно отличается от дилатационной симметрии действия, которая, в частности, рассматривалась в работах [21], [22], посвященных космологии в теориях с дополнительными измерениями.

Будем искать решение в виде

$$A = \frac{1}{\sqrt{24M^3}} \phi + C, \quad (19)$$

который подсказан уравнением (17). Из этого же уравнения следует определение параметра Хаббла

$$H = \frac{\beta}{\sqrt{12M^3}} e^C. \quad (20)$$

В итоге остается одно уравнение (16), которое принимает вид

$$\phi'' + \sqrt{\frac{2}{3M^3}} \phi'^2 + \frac{\beta^2}{\sqrt{6M^3}} e^{-\phi/\sqrt{6M^3}} = 0. \quad (21)$$

Несложно показать, что решение уравнения (21) является также решением более простого уравнения

$$\phi'^2 = \frac{3M^3}{2} k^2 e^{-4\phi/\sqrt{6M^3}} - \frac{2}{3} \beta^2 e^{-\phi/\sqrt{6M^3}}, \quad (22)$$

которое является первым интегралом уравнения (21), разрешенным относительно ϕ'^2 , а константа k^2 есть значение этого первого интеграла. Множитель $3M^3/2$ перед k^2 введен для удобства. Наличие свободного параметра k является следствием дилатационной симметрии (18), которая, в свою очередь, показывает в данном случае фактическое отсутствие в теории (если не принимать во внимание наличие бран) энергетических масштабов, определяющих характерные расстояния и промежутки времени. Таким образом, мы убеждаемся, что симметрия (18) действительно соответствует существованию множества решений с разными значениями параметра k . Мы не можем строго доказать, что только потенциал (15) приводит к такому эффекту. Однако явные частные решения при других формах потенциала (даже экспоненциальных) приводят к отсутствию свободных параметров в решении. Более детально мы обсудим этот момент ниже.

Мы не будем решать уравнение (22) точно. Для получения физических предсказаний при выполнении определенных условий достаточно решить эти уравнения приближенно. Действительно, пусть k такое, что

$$\frac{3M^3}{2} k^2 e^{-3\phi/\sqrt{6M^3}} \gg \frac{2}{3} \beta^2 \quad (23)$$

для всех значений, которые пробегает скалярное поле (пока мы не определили значение параметра k ; это будет сделано ниже с помощью граничных условий на бранах). В этом случае можно решать приближенное уравнение

$$\phi'^2 \approx \frac{3M^3}{2} k^2 e^{-4\phi/\sqrt{6M^3}}, \quad (24)$$

приводящее к решению

$$A(y) = \frac{1}{4} \ln(k|y| + C_1) + C, \quad (25)$$

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{3M^3}{2}} \ln(k|y| + C_1). \quad (26)$$

Отметим, что выражения (25), (26) являются точным решением уравнений движения при $0 < y < L$ в случае $H = 0$, $V \equiv 0$.

Для скалярного поля с учетом решения (26) и при $C_1 = 0$ симметрия (18) принимает приближенный вид (приближенный, так как решение (26) не является точным)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3M^3}{2}} \ln(k|y|) &\rightarrow \sqrt{\frac{3M^3}{2}} \ln(k\alpha|y|) - \sqrt{24M^3} \ln \alpha = \\ &= \sqrt{\frac{3M^3}{2}} \ln(k|y|) - 3\sqrt{\frac{3M^3}{2}} \ln \alpha = \sqrt{\frac{3M^3}{2}} \ln\left(\frac{k}{\alpha^3}|y|\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Мы видим, что симметрия (18) действительно приводит к существованию множества фоновых решений.

Итак, константа интегрирования k в решении (26) соответствует наличию дилатационной симметрии. Стоит отметить, что константа интегрирования C_1 соответствует трансляционной инвариантности уравнения (22). Таким образом, мы имеем две константы интегрирования, что соответствует второму порядку уравнения (21).

Теперь перейдем к граничным условиям на бранах. С учетом решения (26) из условий (13), (14) получаем

$$C_1 = e^{\sqrt{2/(3M^3)}\phi_1}, \quad (28)$$

$$kL = e^{\sqrt{2/(3M^3)}\phi_2} - e^{\sqrt{2/(3M^3)}\phi_1}. \quad (29)$$

Граничные условия (9), (10) принимают вид

$$\frac{k\sqrt{6M^3}}{C_1} = F_1, \quad \frac{k\sqrt{6M^3}}{kL + C_1} = -F_2, \quad (30)$$

$$3M^3 \frac{k}{C_1} = -\epsilon_1, \quad 3M^3 \frac{k}{kL + C_1} = \epsilon_2. \quad (31)$$

Из уравнений (31) и выражений (28), (29) получаем

$$k = -\frac{\epsilon_1}{3M^3} e^{\sqrt{2/(3M^3)}\phi_1} = \frac{\epsilon_2}{3M^3} e^{\sqrt{2/(3M^3)}\phi_2}, \quad (32)$$

$$L = \frac{3M^3}{\epsilon_2} (1 - e^{\sqrt{2/(3M^3)}(\phi_1 - \phi_2)}), \quad (33)$$

$$F_1 = -\sqrt{\frac{2}{3M^3}} \epsilon_1, \quad F_2 = -\sqrt{\frac{2}{3M^3}} \epsilon_2. \quad (34)$$

Таким образом, если фундаментальными параметрами теории являются натяжения бран ϵ_1 , ϵ_2 , значения скалярного поля на бранах ϕ_1 , ϕ_2 и 5-мерная масса Планка M , то они полностью определяют решение (25), (26) и фиксируют размер дополнительного измерения L . Пока мы не будем определять конкретные значения фундаментальных параметров, а обсудим общие свойства модели. Заметим, что из уравнения (32) следует, что $\epsilon_1 < 0$ и $\epsilon_2 > 0$, а также тот факт, что натяжения бран не являются независимыми:

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 e^{\sqrt{2/(3M^3)}(\phi_2 - \phi_1)}, \quad (35)$$

что является тонкой подстройкой параметров. Следует отметить, что в отличие от модели Рэндалл–Сундрума [8], где натяжения бран определяются 5-мерной космологической постоянной, а также от обычных стабилизированных моделей, где потенциалы на бранах также определяются 5-мерным скалярным потенциалом [10], в данном случае натяжения связаны только друг с другом. Действительно, мы имеем больше свободных параметров (C_1, k, L) , что позволяет ослабить требования к тонкой подстройке фундаментальных параметров теории.

Константа C в решении (25) определяется выбором системы координат на бране. Для получения корректных предсказаний мы должны работать в галилеевых координатах [23] на бране, на которой находимся. Последнее означает, что $A = 0$ на выбранной нами бране. Таким образом, если мы работаем в координатах, галилеевых на бране в точке $y = 0$, мы должны положить

$$C = -\frac{1}{\sqrt{24M^3}} \phi_1, \quad (36)$$

а если мы работаем в координатах, галилеевых на бране в точке $y = L$, мы должны положить

$$C = -\frac{1}{\sqrt{24M^3}} \phi_2. \quad (37)$$

Более подробно этот вопрос обсуждается в работах [9], [24], [25].

Как было отмечено выше, если не учитывать браны, симметрия (18) приводит к существованию в решении свободного параметра k . Это верно не только при $H \neq 0$, но и для некоторых случаев при $H = 0$. Действительно, выражения (25), (26) являются точным решением уравнений движения при $0 < y < L$ в случае $H = 0$, $V \equiv 0$ и также имеют свободный параметр k . Это соответствует простой симметрии уравнений движения при $H = 0$, $V \equiv 0$:

$$A(y) \rightarrow A(\alpha y), \quad (38)$$

$$\phi(y) \rightarrow \phi(\alpha y). \quad (39)$$

Однако оказывается, что наличие симметрии фоновых уравнений движения еще не гарантирует наличия дополнительного свободного параметра в решении. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим 5-мерный скалярный потенциал вида

$$V(\phi) = \beta^2 e^{-\gamma\phi}, \quad (40)$$

где $\gamma > \sqrt{8/(3M^3)}$, и положим $H = 0$. В этом случае независимые уравнения движения за исключением членов, описывающих браны, принимают вид

$$M^3 A'^2 = \frac{\phi'^2}{24} - \frac{\beta^2}{12} e^{-\gamma\phi}, \quad (41)$$

$$3M^3 A'' = -\frac{\phi'^2}{2}. \quad (42)$$

В случае потенциала (40) также существует дилатационная симметрия, которая имеет вид

$$A(y) \rightarrow A(\alpha y), \quad (43)$$

$$\phi(y) \rightarrow \phi(\alpha y) - \frac{2}{\gamma} \ln \alpha.$$

Частное решение уравнений (41), (42) есть

$$A(y) = \frac{2}{3\gamma^2 M^3} \ln(ky + C_1) + C, \quad (44)$$

$$\phi(y) = \frac{2}{\gamma} \ln(ky + C_1), \quad (45)$$

$$k^2 = \frac{3\gamma^4 M^3 \beta^2}{6\gamma^2 M^3 - 16}. \quad (46)$$

Мы видим, что масштабный фактор k определяется через фундаментальные параметры модели.

Симметрия (43) может быть выписана в явном виде (для простоты мы полагаем $C_1 = 0$):

$$\frac{2}{\gamma} \ln(ky) \rightarrow \frac{2}{\gamma} \ln(k\alpha y) - \frac{2}{\gamma} \ln \alpha = \frac{2}{\gamma} \ln(ky), \quad (47)$$

$$\frac{2}{3\gamma^2 M^3} \ln(ky) + C \rightarrow \frac{2}{3\gamma^2 M^3} \ln(k\alpha y) + C = \frac{2}{3\gamma^2 M^3} \ln(ky) + \tilde{C}, \quad (48)$$

где $\tilde{C} = C + 2 \ln \alpha / (3\gamma^2 M^3)$. Мы видим, что преобразование симметрии (43) не приводит к новому решению, т.е. фоновое решение (45) является инвариантным относительно преобразования симметрии (43). Можно сказать, что на данном решении уравнений движения симметрия “вырождается” в тривиальную.

Если рассмотреть граничные условия, то можно показать, что теперь натяжения бран ϵ_1 , ϵ_2 должны быть не только связаны друг с другом, но и выражаться через параметры ϕ_1 , ϕ_2 и M , что уменьшает количество независимых фундаментальных параметров модели и приводит к дополнительной тонкой подстройке.

Заметим, что мы имеем всего одну неопределенную константу интегрирования C_1 в решении для скалярного поля (45) в отличие от случая (26), где их две – C_1 и k . Аналогичная ситуация возникает и в модели с $H = 0$, рассмотренной в работе [10] (отметим, что в ней дилатационная симметрия фоновых уравнений движения отсутствует). Там решение для скалярного поля без учета бран также обладает всего одной константой интегрирования, что приводит к отсутствию свободных масштабных факторов, подобных нашему параметру k . Это связано с тем, что наше решение (45), (46), а также фоновое решение из работы [10], хотя и являются формально решениями системы дифференциальных уравнений второго порядка, фактически являются решениями дифференциальных уравнений первого порядка. Такое упрощение системы уравнений происходит, если 5-мерный потенциал скалярного поля можно представить в специальной форме, которая используется в так называемом “методе суперпотенциала” [10], [26]. Действительно, если при $H = 0$ потенциал представим в виде

$$V(\phi) = \frac{1}{8} \left(\frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{12M^3} W^2(\phi), \quad (49)$$

то решения уравнений

$$\phi' = \pm \frac{1}{2} \frac{dW}{d\phi}, \quad (50)$$

$$A' = \mp \frac{1}{12M^3} W \quad (51)$$

будут также решениями уравнений (6)–(8) при $H = 0$ и $0 < y < L$. Несложно проверить, что для потенциала (40) простейшее решение уравнения (49) имеет вид

$$W(\phi) = \beta \sqrt{\frac{32}{\gamma^2 - 8/(3M^3)}} e^{-\phi\gamma/2}, \quad (52)$$

и выражения (44)–(46) действительно являются решением дифференциальных уравнений первого порядка (50), (51) с потенциалом (52).

Хотя метод суперпотенциала и позволяет упростить нахождение фоновых решений уравнений движения, он обычно снижает количество свободных параметров в этих решениях, по крайней мере в случае $H = 0$. Однако отметим, что, возможно, существует другое решение уравнений (41), (42), не найденное нами, которое неинвариантно относительно преобразования симметрии (43). Этот вопрос требует дополнительного изучения.

Таким образом, само по себе наличие дилатационной симметрии уравнений движения не является достаточным для уменьшения числа фундаментальных параметров, которые должны быть тонко подстроены. Действительно, некоторые решения, например, найденные с помощью метода суперпотенциала, оказываются инвариантными относительно преобразований симметрии. Однако если при определенном 5-мерном потенциале фоновое решение не является инвариантным относительно преобразований симметрии, то это приводит к увеличению количества не связанных между собой фундаментальных параметров. В этом смысле такие потенциалы (а точнее, соответствующие им фоновые решения) кажутся более предпочтительными с точки зрения построения естественных моделей мира на бране.

4. МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ БРАНЫ

Из уравнения (32) следует, что натяжения бран должны быть связаны друг с другом. Таким образом, в теории все же остается одна тонкая подстройка параметров. Однако небольшая модификация действия на бране 1 предлагает возможное решение этой проблемы. Рассмотрим вместо потенциалов (11), (12) потенциалы на бранах вида

$$S_1^{\text{brane}} = \int \sqrt{-\tilde{g}} d^4x \left(\frac{1}{48} G_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\mu\nu\rho\sigma} - \hat{\lambda}_1 - F_1(x)(\phi - \phi_1) \right), \quad (53)$$

$$S_2^{\text{brane}} = \int \sqrt{-\tilde{g}} d^4x (-\hat{\lambda}_2 - F_2(x)(\phi - \phi_2)), \quad (54)$$

где $\hat{\lambda}_{1,2}$ – вакуумные плотности энергии на бранах, которые могут быть достаточно большими и включать в себя, например, вклады, индуцированные 5-мерной гравитацией и 5-мерным скалярным полем; $G_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho\sigma]}$, $B_{\nu\rho\sigma}$ – поле 3-формы.

Отметим, что значения $\hat{\lambda}_{1,2}$ не подстроены друг относительно друга. Мы только предполагаем, что $\hat{\lambda}_{1,2} > 0$ и $\hat{\lambda}_{1,2} \sim 1\text{ТэВ}$. Поле 3-формы возникает в теориях супергравитации [27], но здесь мы будем использовать его без ссылки на какую-либо конкретную теорию. Использование таких полей есть известный способ превращения космологической постоянной в константу интегрирования уравнений Эйнштейна [27]–[31]. Таким образом, потенциалы (53), (54) не являются тонко подстроенными.

Решение уравнений движения для поля 3-формы

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad (55)$$

где ∇_μ – ковариантная производная, имеет вид [31]

$$G^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{q\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-\tilde{g}}}, \quad (56)$$

где константа q не фиксируется уравнениями движения, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор Леви-Чивита. Можно показать, что тензор энергии-импульса поля 3-формы соответствует тензору энергии-импульса эффективного действия [31]

$$\int \sqrt{-\tilde{g}} d^4x \frac{q^2}{2}. \quad (57)$$

Теперь у нас имеется еще один свободный параметр q , который, если мы предполагаем фоновое решение вида (3)–(5), однозначно определяется (см. (32), (35)):

$$q^2 \approx 2(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 e^{\sqrt{2/(3M^3)}(\phi_2 - \phi_1)}). \quad (58)$$

Параметр $\hat{\lambda}_2$ теперь играет роль параметра ϵ_2 .

В принципе q^2 может иметь любое значение, что в общем случае приводит к совсем другому виду фонового решения. Выше мы определили значение q^2 исходя из вида фонового решения (3)–(5). Этот факт подсказывает некоторое предположение, которое мы сейчас обсудим.

Допустим, что по аналогии с квантовой теорией в теории гравитации (в данном случае это 5-мерная гравитация в присутствии бран) мы также можем ввести понятие вакуумного состояния. В этом состоянии все поля, локализованные на бране, принимают свои вакуумные значения. Также можно предположить, что это вакуумное состояние стационарно и имеет максимальный набор (пространственно-временных) симметрий. Заметим, что фоновое решение нашей модели (3)–(5) обладает этими свойствами. Действительно, для самих бран это фактически означает пространство де Ситтера, являющееся максимально симметричным пространством [19] (либо плоское пространство Минковского, либо пространство анти-де Ситтера, однако эти решения не интересны с точки зрения космологии). При этом метрика фонового решения является стационарной, т.е. вакуумное состояние выглядит одинаково не только во всех точках и направлениях, но и во все моменты времени [19]. Заметим, что стационарные космологические модели рассматривались и раньше;

наиболее известными являются модели Бонди и Голда [32] и Хойла [33], [34]. В нашем случае мы предполагаем стационарность не всей космологии, а только стационарность вакуума, которая, кстати, достигается при $t \rightarrow \infty$, так как в этом пределе плотности обычной материи, темной материи и излучения на бранах стремятся к нулю. Конечно, данная гипотеза опирается на наличие гипотетической теории, объединяющей квантовую теорию поля и гравитацию, и является не более чем феноменологическим предположением.

Наличие нарушенной присутствием бран дилатационной симметрии фоновых уравнений движения и неинвариантного фонового решения может быть использовано как некий селективный принцип для выбора 5-мерного скалярного потенциала (15). Действительно, в этом случае, если на одной из бран есть поле 3-формы, можно полностью избежать тонкой подстройки параметров модели, определить значение параметра q^2 исходя из требований симметрии вакуумного состояния и при этом получить малое значение эффективного параметра Хаббла на бране при больших значениях натяжений бран. Фактически вся эта процедура есть замена тонкой подстройки требованиями симметрии вакуумного состояния.

Наличие материи на бранах разрушает эту симметрию. При этом космологическое решение, даже с учетом пространственной однородности и изотропии бран, может содержать зависящее от времени решение для скалярного поля. Действительно, независимость параметра Хаббла на бранах от времени обеспечивается определенным видом 5-мерного скалярного потенциала. Наличие обычной материи на бране может привести к обратному эффекту – изменению решения во всем 5-мерном пространстве. Этот вопрос требует дальнейшего изучения. Также интересным является вопрос о существовании других вакуумных фоновых решений с потенциалом (15), возможно, с другой зависимостью масштабного фактора $a(t)$ и фонового решения для скалярного поля от времени.

Предположение о том, что поле 3-формы локализовано только на одной (“нашей”) бране, приводит к тому, что браны являются неодинаковыми с точки зрения своей структуры. Мы сделали такое предположение исходя из того, что, как часто считается в моделях мира на бране, поля стандартной модели находятся только на одной из бран. Это также вносит аналогичную асимметрию (здесь мы не рассматриваем случай универсальных дополнительных измерений, в котором все поля находятся во всем 5-мерном пространстве). Конечно, можно предположить, что на второй бране также есть аналогичное поле 3-формы, тогда браны фактически будут иметь одинаковую структуру. Но это приведет к тому, что в модели окажется один неопределенный параметр. Если размер дополнительного измерения L фиксируется каким-либо другим механизмом, то все параметры модели будут определены в нашем предположении о форме фонового решения. Однако в этом случае все равно требуется дополнительный механизм фиксации размера дополнительного измерения (если не предполагать, что размер дополнительного измерения определяется спонтанным образом), что также сильно усложняет теорию. Наличие поля 3-формы только на одной бране в такой ситуации кажется более простым решением. Тем не менее стоит отметить, что наличие полей 3-формы на обеих бранах позволяет

(феноменологически) решить проблему тонкой подстройки в случае, если фоновое решение инвариантно относительно преобразований дилатационной симметрии, или в случае, если такая симметрия отсутствует (как в модели, рассмотренной в работе [10]).

5. ПРОБЛЕМА ИЕРАРХИЙ В МОДЕЛИ И ЭФФЕКТИВНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ НА БРАНЕ

Модель, рассмотренная выше, обладает достаточно интересными общими свойствами. Однако не ясно, возможно ли в такой модели воспроизвести реалистичные значения 4-мерной массы Планка и 4-мерного параметра Хаббла. Для изучения этого вопроса предположим, что мы находимся на бране в точке $y = 0$ (брана 1). Тогда с учетом выражения (36) из формулы (20) получим для параметра Хаббла на бране 1

$$H = \frac{\beta}{\sqrt{12M^3}} e^{-\phi_1/\sqrt{24M^3}}. \quad (59)$$

Отметим, что параметр Хаббла на бране 2 (в точке $y = L$) будет иметь другое значение, так как для этой браны нужно выбрать другое значение константы C (см. формулу (37)).

Теперь перейдем к вычислению эффективной 4-мерной массы Планка на бране 1. Эффективная масса Планка на бране определяется стандартным образом [11]:

$$M_{\text{Pl}}^2 = M^3 \int_{-L}^L e^{2A} dy. \quad (60)$$

С учетом формул (25), (32) и (36) получим

$$\begin{aligned} M_{\text{Pl}}^2 &= \frac{4M^6}{\hat{\lambda}_2} e^{-\sqrt{2/(3M^3)}\phi_1/2} e^{-\sqrt{2/(3M^3)}\phi_2} \times \\ &\times \left(e^{3\sqrt{2/(3M^3)}\phi_2/2} - e^{3\sqrt{2/(3M^3)}\phi_1/2} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Если $e^{\sqrt{2/(3M^3)}(\phi_2-\phi_1)} \gg 1$, имеем

$$M_{\text{Pl}} \approx \frac{2M^3}{\sqrt{\hat{\lambda}_2}} e^{(\phi_2-\phi_1)/\sqrt{24M^3}}. \quad (62)$$

Теперь рассмотрим конкретные значения параметров модели. В большинстве моделей мира на бране предполагается, что 5-мерные фундаментальные параметры находятся в области энергий порядка ТэВ. В нашем случае имеется пять независимых параметров – M , $\hat{\lambda}_2$, ϕ_1 , ϕ_2 и β . Предположим, что $M \sim 1$ ТэВ, $\hat{\lambda}_2 \sim 1$ ТэВ⁴, $\beta \sim 1$ ТэВ^{5/2}, $\phi_1 \sim 500$ ТэВ^{3/2} и $\phi_2 \sim 670$ ТэВ^{3/2}. Тогда из формул (62) и (59) получим

$$M_{\text{Pl}} = \frac{1}{\sqrt{16\pi G}} \sim 10^{18} \text{ ГэВ}, \quad (63)$$

$$H \sim 10^{-42} \text{ ГэВ}. \quad (64)$$

Таким образом, в обсуждаемой модели проблема иерархий гравитационного взаимодействия решается аналогично тому, как это происходит в модели Рэндалл–Сундрума [8]. Значение параметра Хаббла на бране соответствует значению, которое определяется плотностью вакуумной энергии $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{-47} \text{ ГэВ}^4$ в обычной 4-мерной теории.

Теперь проверим, выполняется ли при выбранных нами значениях фундаментальных параметров условие (23). Для максимального значения ϕ_2 скалярного поля имеем

$$\begin{aligned} \frac{3M^3}{2} k^2 e^{-3\phi_2/\sqrt{6M^3}} &\sim \text{ТэВ}^5 e^{-3\phi_2/\sqrt{6M^3} + 2\phi_2\sqrt{2/(3M^3)}} = \\ &= \text{ТэВ}^5 e^{\phi_2/\sqrt{6M^3}} \gg \frac{2}{3} \beta^2 \sim \text{ТэВ}^5. \end{aligned} \quad (65)$$

Условие (23) действительно выполняется, и мы можем использовать приближенное фоновое решение (25), (26).

Остальные параметры модели принимают значения (см. формулы (32), (33))

$$\begin{aligned} L &\sim 1 \text{ ТэВ}^{-1}, \\ k &\sim e^{546} \text{ ТэВ}. \end{aligned}$$

Значение параметра k оказывается экстремально большим, однако он определяется независимыми фундаментальными параметрами модели, которые сами по себе не создают иерархий. Но при таких значениях k нарушается условие $R < M^2$, где R – 5-мерная скалярная кривизна. Выполнение данного условия обычно гарантирует возможность использования эффективного действия вида (1) без возможных вкладов более высокого порядка по 5-мерной кривизне [8], [24]. В нашем случае $R|_{y=L} \sim M^2$, $R|_{y=0.1L} \sim 100M^2$, однако максимальное значение $R \sim M_{\text{Pl}}^8/M^6 \gg M^2$ при $y = 0$ без учета вклада браны, что обесценивает данную модель как реалистичную с феноменологической точки зрения. Однако стоит упомянуть, что само наличие бран обычно нарушает условие $R < M^2$ даже в более простых моделях. Действительно, бесконечно тонкая брана является идеализацией, логично предположить, что брана имеет толщину $l \ll L$. В таком случае мы можем оценить значение R в окрестности браны как $R \sim \epsilon/(lM^3)$, где ϵ – натяжение браны. Если $\epsilon \sim M^4$, $L \sim 1/M \gg l$, то получаем $R \gg M^2$. Таким образом, принципиальная возможность использования эффективного действия вида (1) в моделях мира на бране должна быть исследована более тщательно с учетом возможных свойств фундаментальной теории, приводящей к возникновению бран и локализации на них материи, а также с учетом конечной толщины самих бран. Не исключено, что вместо условия $R < M^2$ должно использоваться более слабое условие.

Тем не менее фоновое решение, рассмотренное нами выше, обладает интересными общими свойствами, которые в принципе могут реализовываться в более реалистичных и последовательных моделях мира на бране.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена стабилизированная модель мира на бране, обладающая нарушенной бранами дилатационной симметрией уравнений движения для фонового решения. Само фоновое решение определяется в виде (3)–(5), что подразумевает пространство де Ситтера на бранах. Также рассмотрен механизм фиксации граничных значений 5-мерного скалярного поля на бранах, использующий вспомогательные поля. Показано, что в рамках такого сценария можно уменьшить число фундаментальных параметров, которые должны быть подстроены друг относительно друга, до двух. Если же предположить определенный вид действия на бране 1, включающего калибровочное поле 3-формы, а также использовать гипотезу существования и определенной структуры вакуумного состояния в теории 5-мерной гравитации с бранами, то можно избежать тонкой подстройки фундаментальных параметров модели, присущей большинству 5-мерных моделей мира на бране с компактным дополнительным измерением.

Также показано, что если фундаментальная 5-мерная энергетическая шкала теории лежит в области ТэВ, то формально в этой модели можно решить проблему иерархии гравитационного взаимодействия на бране 1, а также получить малое значение эффективного 4-мерного параметра Хаббла. Отметим, что, как было показано выше, с феноменологической точки зрения модель является неприемлемой. Тем не менее общие свойства, присущие данной модели, могут реализовываться в более реалистичных моделях мира на бране.

Благодарности. М. Н. Смоляков признателен С. Ю. Вернову и И. П. Волобуеву за полезные обсуждения. Работа С. Р. Рамазанова и М. Н. Смолякова была поддержана государственным контрактом 02.740.11.0244 Федерального агентства по науке и инновациям. Работа М. Н. Смолякова также была поддержана грантом МК-5602.2008.2 Президента РФ, грантом фонда “Династия”, грантом НШ-1456.2008.2 по государственной поддержке ведущих научных школ РФ, грантом РФФИ 08-02-92499-НЦНИЛ_a и стипендией для молодых преподавателей и ученых МГУ им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

- [1] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B*, **125**:2–3 (1983), 136–138.
- [2] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B*, **125**:2–3 (1983), 139–143.
- [3] J. Polchinski, *TASI lectures on D-branes*, 1996; arXiv: [hep-th/9611050](#).
- [4] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **471**:1–2 (1996), 135–158; arXiv: [hep-th/9602070](#).
- [5] J. D. Lykken, *Phys. Rev. D*, **54**:6 (1996), 3693–3697; arXiv: [hep-th/9603133](#).
- [6] C. P. Bachas, “Lectures on D-branes”, *Duality and Supersymmetric Theories*, Publ. Newton Inst., eds. D. I. Olive, P. C. West, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 414–473; arXiv: [hep-th/9806199](#).
- [7] I. Antoniadis, *Eur. Phys. J. C*, **33**, Suppl. 1 (2004), S914–S918.
- [8] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:17 (1999), 3370–3373.
- [9] В. А. Рубаков, *УФН*, **171** (2001), 913.
- [10] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, A. Karch, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 046008; arXiv: [hep-th/9909134](#).

- [11] Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. С. Михайлов, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 339–353.
- [12] P. Brax, C. van de Bruck, *Class. Quant. Grav.*, **20**:9 (2003), R201–R232; arXiv: [hep-th/0303095](#).
- [13] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, *Rep. Progr. Phys.*, **67**:12 (2004), 2183–2232; arXiv: [hep-th/0404011](#).
- [14] N. Kaloper, *Phys. Rev. D*, **60**:12 (1999), 123506; arXiv: [hep-th/9905210](#).
- [15] A. Karch, L. Randall, *JHEP*, **05** (2001), 008; arXiv: [hep-th/0011156](#).
- [16] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, D. Langlois, *Phys. Lett. B*, **477**:1–3 (2000), 285–291; arXiv: [hep-th/9910219](#).
- [17] J. M. Cline, H. Firouzjahi, *Phys. Lett. B*, **514**:3–4 (2001), 205–212; arXiv: [hep-ph/0012090](#).
- [18] P. Kanti, S. C. Lee, K. A. Olive, *Phys. Rev. D*, **67**:2 (2003), 024037; arXiv: [hep-ph/0209036](#).
- [19] С. Вейнберг, *Гравитация и Космология*, Платон, Волгоград, 2000.
- [20] П. Рамон, *Теория поля. Современный вводный курс*, Мир, М., 1984.
- [21] C. Wetterich, *Phys. Rev. Lett.*, **102**:14 (2009), 141303; arXiv: [0806.0741](#).
- [22] C. Wetterich, *The cosmological constant and higher dimensional dilatation symmetry*; 2009, arXiv: [0911.1063](#).
- [23] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. II, Теория поля, Физматлит, М., 1967.
- [24] Yu. A. Kubyshin, *Models with extra dimensions and their phenomenology*, arXiv: [hep-ph/0111027](#).
- [25] Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 216–230.
- [26] A. Brandhuber, K. Sfetsos, *JHEP*, **10**:10 (1999), 013; arXiv: [hep-th/9908116](#).
- [27] A. Aurilia, H. Nicolai, P. K. Townsend, “Spontaneous breaking of supersymmetry and the cosmological constant in $N = 8$ supergravity”, *Superspace and Supergravity*, eds. S. W. Hawking, M. Roček, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, 1981, 403–412; TH.2884–CERN, 1980, <http://ccdb4fs.kek.jp/cgi-bin/img/allpdf?198007255>.
- [28] A. Aurilia, H. Nicolai, P. K. Townsend, *Nucl. Phys. B*, **176**:2 (1980), 509–522.
- [29] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Phys. Lett. B*, **143**:4–6 (1984), 415–420.
- [30] S. W. Hawking, *Phys. Lett. B*, **134**:6 (1984), 403–404.
- [31] S. Weinberg, *Rev. Modern Phys.*, **61**:1 (1989), 1–23.
- [32] H. Bondi, T. Gold, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, **108** (1948), 252–270.
- [33] F. Hoyle, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, **108** (1948), 372–382.
- [34] F. Hoyle, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, **109** (1949), 365–371.

Поступила в редакцию 2.10.2009,
после доработки 19.11.2009