Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, Волновая функция и распределение токов вероятности связанного электрона, движущегося в однородном магнитном поле, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 1, 157–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:49:34

© 2010 г. В. Н. Родионов*, Г. А. Кравцова[†], А. М. Мандель[‡]

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОНА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Изучаются эффекты воздействия электромагнитных полей на нерелятивистские заряженные спинорные частицы, связанные короткодействующим потенциалом. Проведен анализ точного решения уравнения Паули для электрона, движущегося в потенциальном поле, определяемом трехмерной δ -ямой, в присутствии интенсивного магнитного поля. Получены асимптотики этого решения для различных значений параметров задачи. Кроме того, рассмотрены токи вероятности для электрона и их зависимость от магнитного поля. Показано, что учет спина в рамках нерелятивистского подхода позволяет корректно учесть влияние магнитного поля на электрический ток. Полученные зависимости распределения тока, являющегося экспериментально наблюдаемой величиной, могут непосредственно проявляться, например, в процессах рассеяния.

Ключевые слова: связанный электрон, магнитное поле, распределение тока вероятности.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

Подробное изучение эффектов воздействия внешних электромагнитных полей на связанные нерелятивистские заряженные частицы систематически проводится уже на протяжении нескольких десятилетий (см., например, обзоры [1], [2]). Однако, хотя эта проблема имеет весьма длительную историю, ряд вопросов по-прежнему нуждается в дополнительном исследовании. К таким вопросам, в частности, можно отнести анализ влияния интенсивного магнитного поля на связанные заряженные частицы при корректном учете их спиновых состояний.

*Российский государственный геологоразведочный университет им. С. Орджоникидзе, Москва, Россия. E-mail: vnrodionov@mtu-net.ru

[†]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: krav@dio.ru

[‡]Московский авиационный институт (Государственный технический университет), Москва, Россия. E-mail: arkadimandel@mail.ru

Существует распространенное представление о том, что последовательный учет спина заряженной частицы требуется только при исследовании релятивистских эффектов. Но, как было показано в работах [3], [4], в интенсивном магнитном поле это не всегда так. Отметим, что попытки анализа спиновых эффектов в нерелятивистском приближении проводились неоднократно. Для этого использовались модели, точно учитывающие влияние поля на частицу. Подчеркнем, что богатый опыт в описании бесспиновых частиц, связанных δ -образным потенциалом, в интенсивных электромагнитных полях, был накоплен именно благодаря использованию непертурбативного математического подхода. Разработанные методы, основанные на точных аналитических решениях уравнения Шредингера [1], [2], [5], применялись и к исследованию процессов с учетом спина частиц. Однако из-за сложности математических оценок в случае спинорных частиц получаемые выводы не всегда представляются достаточно убедительными. По нашему мнению, наиболее корректными с точки зрения необходимости учета спина частиц представляются работы, в которых проводится непосредственное сравнение влияния поля на поведение спинорных и скалярных частиц [2], [4], [6]. Для этих целей в указанных работах наряду с решениями уравнения Шредингера используются и решения уравнения Паули. В настоящей статье мы рассмотрим эффекты, обусловленные действием интенсивного постоянного однородного магнитного поля на электрон, связанный короткодействующим потенциалом.

Хорошо известно, что потенциал в виде δ -ямы является широко распространенной моделью, описывающей многоэлектронные атомы и в особенности отрицательные ионы. Под действием поля энергетические уровни электрона испытывают сдвиг, величина которого определяется из трансцендентного уравнения для энергии. Отметим, что в случае скалярной частицы эта задача анализировалась еще в работе [5]. Аналогичная задача для электрона с учетом его спиновых состояний в магнитном поле была корректно решена совсем недавно в статье [6].

Основная цель настоящей работы заключается в анализе точного решения уравнения Паули для электрона, движущегося в потенциальной яме, которая определяется трехмерной δ -функцией, в присутствии интенсивного магнитного поля, а также в получении асимптотик этого решения при различных значениях параметров задачи. Кроме того, мы рассматриваем токи вероятностей для данной частицы и их зависимость от спина и магнитного поля.

2. ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ ДЛЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ ТРЕХМЕРНОЙ δ -ЯМЫ И ЕГО АСИМПТОТИКИ

Точное аналитическое выражение для волновой функции заряженной скалярной частицы в связанном δ -потенциалом состоянии, движущейся в интенсивном магнитном поле, было найдено в работе [5] с помощью функции Грина соответствующего уравнения Шредингера. Отметим, что функция Грина скалярной частицы во внешнем магнитном поле представлена в классической монографии [7] (см. также статью [8]). Как известно, учет спина электрона можно провести, например, путем пе-

перехода к нерелятивистскому пределу в решениях уравнения Дирака, описывающих движение спинорной частицы в заданном внешнем поле [9]. Полученная функция Грина является решением уравнения Паули с δ -источником и может быть представлена в виде интеграла по времени [10]. Этот интеграл, определяющий функцию Грина, допускает виковский поворот в нижнюю комплексную полуплоскость по переменной t (см., например, книгу [11]). Данная операция делает интеграл чисто действительным. В результате стационарную функцию Грина можно представить в виде

$$G_W(\vec{r}, \vec{0}) = -i \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{\omega_H}{2} e^{-im\omega_H xy/4} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1/2}} \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{\omega_H t}{2} \right) e^{S/\hbar} \left(\frac{1/2 + s}{1/2 - s} \right), \quad (1)$$

где m – масса частицы, $\omega_H = eH/mc$ – циклотронная частота, e – модуль заряда частицы, H – напряженность однородного магнитного поля, ориентированного вдоль оси z , $s = \pm 1/2$ – спиновое число, а показатель экспоненты под интегралом по существу представляет собой классическую функцию действия

$$S = -\frac{mz^2}{2t} - \frac{1}{4} m\omega_H \rho^2 \operatorname{cth} \left(\frac{\omega_H t}{2} \right) + (W - s \cdot \hbar\omega_H)t \quad (2)$$

(хотя формально показатель экспоненты содержит постоянную Планка, благодаря сдвигу энергии связанной спинорной частицы в магнитном поле [6] эта зависимость исчезает). В формулах (1), (2) x, y, z – декартовы координаты, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $W < 0$ – полная энергия связанной частицы. Заметим, что (1), (2) – обычный пропагатор заряженной частицы, движущейся в магнитном поле, продолженный в область отрицательных энергий.

Запишем пространственную часть волновой функции в виде

$$\psi(\vec{r}) = \tilde{N} e^{-im\omega_H xy/4} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1/2}} \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{\omega_H t}{2} \right) e^{S/\hbar}, \quad (3)$$

где $\tilde{N}$ – нормировочный коэффициент. Перейдем к более естественным переменным, используя характерные масштабы данной задачи. В качестве масштаба энергии примем $|W_0|$ – модуль энергии связи частицы в отсутствие магнитного поля. В таких единицах безразмерную энергию частицы обозначим через $w = W/|W_0|$. В отсутствие внешнего поля она равна -1 . Разумеется, в общем случае w зависит как от внешнего поля H , так и от направления спина [6]. Магнитное поле удобно измерять в безразмерных единицах $h = \hbar\omega_H/|W_0|$. Естественным масштабом координат может служить длина волны де Бройля частицы при нулевом магнитном поле, $l_0 = \hbar(2m|W_0|)^{-1/2}$, а масштаб времени – величина $t_0 = \hbar|W_0|^{-1}$.

В таких единицах для пространственной части волновой функции мы имеем

$$\psi(\vec{r}) = N e^{-ih\tilde{x}\tilde{y}/4} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{1/2}} \frac{\exp \left[-\tilde{z}^2/(4\tau) - h\tilde{\rho}^2 \operatorname{cth}(h\tau/2)/8 - \tilde{w}\tau \right]}{1 - e^{-h\tau}}, \quad (4)$$

где N – нормировочный коэффициент в новых переменных, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tau$ – безразмерные координаты и время. Любопытно отметить аналогию подынтегрального выражения в (4) с классической формулой Планка для спектра абсолютно черного тела. Квантующий характер магнитного поля (как и квантовый характер излучения) не проявляется, пока показатель экспоненты $h\tau$ в знаменателе в правой части (4) достаточно мал. Обратим также внимание на фазовый множитель $e^{-ih\tilde{x}\tilde{y}/4}$, наличие которого явно указывает на существование орбитального тока вероятности.

Для расчета нормировочного коэффициента в (4) необходимо вычислить несколько интегралов. Интегралы по координатам являются чисто гауссовыми, а интегралы по времени простой заменой сводятся к обобщенной дзета-функции Римана $\zeta(3/2, \varepsilon)$. В результате имеем

$$N = \frac{h^{5/4}}{2\pi l_0^{3/2}} \zeta^{-1/2} \left(\frac{3}{2}, \frac{\tilde{w}}{h} \right), \quad (5)$$

где $\tilde{w} = w_{\text{sh}} - w$ – модуль так называемой *эффективной энергии* частицы. Появление параметра $\tilde{w}$ обусловлено тем, что нижняя граница сплошного спектра в магнитном поле испытывает сдвиг наряду со сдвигом самих связанных состояний w . Вследствие этого *эффективные энергии* связи отсчитываются уже от новых границ, определяемых выражением $w_{\text{sh}} = (s + 1/2)h$ [6]. Из этого соотношения также непосредственно следует, что сдвиг сплошного спектра w_{sh} явно зависит как от величины магнитного поля, так и от ориентации спина частицы. Однако, как показано в работе [6] на примере слабых ($h \ll 1$) и сильных ($h \gg 1$) полей, величина $\tilde{w}$ от спина не зависит.

Легко видеть, что интеграл в (4) относится к интегралам типа Лапласа [12], [13]. Существенная область интегрирования определяется окрестностью единственной точки максимума экспоненциальной функции. Рассмотрим вклад седловой точки в интеграл (4), записанный в виде

$$\int_0^\infty \frac{du}{u^{1/2}} \frac{e^{-hg(u)}}{1 - e^{-u}}, \quad g(u) = \frac{\tilde{z}^2}{4u} + \frac{\tilde{\rho}^2}{8} \operatorname{cth}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{\tilde{w}}{h^2} u. \quad (6)$$

Здесь $u = h\tau$, а седловая точка является корнем уравнения

$$Bu^2 - A = \frac{u^2}{\operatorname{sh}^2(u/2)}, \quad A = 4\tilde{z}^2\tilde{\rho}^{-2}, \quad B = 16\tilde{w}\tilde{\rho}^{-2}h^{-2}. \quad (7)$$

Графическая иллюстрация поиска решения этого трансцендентного уравнения приведена на рис. 1, где изображены семейство парабол, отвечающих левой части уравнения (7) при разных значениях параметра h (сплошные линии) и график функции в правой части уравнения (штрихпунктирная кривая). Нетрудно убедиться, что пересечение ветви параболы с монотонной функцией $u^2 \operatorname{sh}^{-2}(u/2)$ может произойти в различных областях значений параметра интегрирования u . Так, в области $u \ll 1$ правая часть уравнения мало отличается от константы, и для седловой точки, являющейся в этом случае корнем квадратного уравнения, получаем

$$u_0 = \frac{h\sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2}}{2\sqrt{\tilde{w}}}. \quad (8)$$

Рис. 1. Решение трансцендентного уравнения (7) в плоскости $z = 1.6$ при $\rho = 1$. Сплошные кривые – левая часть уравнения (7) для различных значений магнитного поля, штрихпунктирная кривая – график правой части уравнения (7).

В другом предельном случае $u \gg 1$ правая часть уравнения (7) практически обращается в нуль, и для точки перевала мы имеем

$$u_0 = \frac{h\tilde{z}}{2\sqrt{\tilde{w}}} . \quad (9)$$

Наконец, в промежуточной области решение уравнения (7) можно записать в приближенном виде

$$u_0 \approx \left[\frac{\tilde{z}^2 h^2}{8\tilde{w}} - 6 + 6 \left[1 + \frac{\tilde{z}^2 h^2}{24\tilde{w}} + \frac{\tilde{\rho}^2 h^2}{12\tilde{w}} + \frac{\tilde{z}^4 h^4}{2304\tilde{w}^2} \right]^{1/2} \right]^{1/2} . \quad (10)$$

Легко видеть, что данное решение в пределах слабых ($h \ll 1$) и сильных ($h \gg 1$) полей переходит в (8) и (9) соответственно. Оценка интеграла (6), полученная методом перевала, при этом записывается как

$$I(\tilde{z}, \tilde{\rho}) \approx 2 \sqrt{\frac{\pi}{h}} \left[\frac{4\tilde{z}^2}{u_0^2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{u_0}{2} \right) + \frac{\tilde{\rho}^2 u_0}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{u_0}{2} \right) \right]^{-1/2} e^{(u_0/2) - hg(u_0)} . \quad (11)$$

Перейдем теперь к изучению волновой функции в пределах слабых и сильных полей. Из дальнейших рассуждений будет видно, что сами эти понятия в рассматриваемой задаче нуждаются в некотором уточнении. Если $h \ll 1$, а $\tilde{\rho}$ и $\tilde{z}$ не слишком

Рис. 2. Точная зависимость от магнитного поля h функции $\zeta(3/2, \tilde{w}/h)$ (штриховая линия) и зависимость, определяемая правой частью формулы (13) (сплошная линия).

велики, то решение (8) приводится к виду

$$u_0 = \frac{h\tilde{r}}{2\sqrt{\tilde{w}}} \ll 1, \quad (12)$$

где $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{z}^2 + \tilde{\rho}^2}$ – безразмерная радиальная координата. Фактически в рассматриваемом пределе это выражение определяет сферический тип симметрии электронного облака.

Как уже говорилось во введении, в работе [6] изучено поведение связанного уровня энергии спинорной частицы, находящейся в δ -яме, в магнитном поле. Важно отметить, что полученное решение имеет устойчивые асимптотики по спиновой переменной в пределах слабого и сильного полей, т.е. и в том, и в другом случае эффективная энергетическая характеристика $\tilde{w}$ не зависит от спина. Хотя используемый в работе [6] способ расчета несколько отличается от методов, принятых в ранних работах [5], [8] для скалярных частиц, имеется полная согласованность полученных в статье [6] результатов, как в пределе слабых, так и в пределе сильных полей. В частности, согласно работе [6] при небольших значениях магнитного поля имеем $\tilde{w} \approx 1 + h/2$, откуда непосредственно видно отсутствие зависимости $\tilde{w}$ от спина частиц.

Учитывая изложенное выше, используем оценку для дзета-функции

$$\zeta\left(\frac{3}{2}, \frac{\tilde{w}}{h}\right) \sim 2h^{1/2}, \quad (13)$$

справедливую в области $h \leq 1$. О применимости такой асимптотики, в частности, свидетельствуют графики, приведенные на рис. 2. Таким образом, в рассматривае-

Рис. 3. Зависимость безразмерного квадрата модуля функции $\chi(\vec{r})$ от поперечной (x) и продольной (z) координат для полей $h \leq 1$.

мой области $h < 1$ (и при не слишком большом удалении от δ -ямы) для пространственной части волновой функции получаем выражение

$$\psi(\vec{r}) \approx N \frac{2\sqrt{\pi}}{h\tilde{r}} \exp\left(-\frac{i}{4}h\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{r}\right). \quad (14)$$

Для графического представления результатов удобно использовать функцию $(\vec{r}) = r\psi(\vec{r})$, не имеющую особенности в нуле и определяющую пространственное распределение плотности вероятности электронного облака в сферической системе координат:

$$dW \sim 2\pi|\chi(\vec{r})|^2 \sin(\theta) d\theta dr.$$

На рис. 3 представлен график функции $|\chi(\vec{r})|^2$. При этом длина волны де Бройля частицы принята за единицу. Подчеркнем, что данная оценка для волновой функции получена вблизи δ -ямы в пределе слабого поля. Отметим, однако, что поле порядка нескольких десятых долей от внутриатомного не является слабым в обычном представлении.

Вдали от δ -ямы даже в приближении слабого поля ситуация кардинально меняется. При $h\tilde{z} \gg 1$ из формулы (10) для точки перевала имеем

$$u_0 = \frac{h\tilde{z}}{2\sqrt{w}} \gg 1. \quad (15)$$

В результате асимптотика пространственной части волновой функции принимает вид

$$\psi(\vec{r}) \approx N \sqrt{\frac{\pi}{1+h/2}} \exp\left(-\frac{i}{4} h\tilde{x}\tilde{y} - \frac{h\tilde{\rho}^2}{8} - \tilde{z} \sqrt{1 + \frac{h}{2}}\right). \quad (16)$$

Это выражение важно для качественного анализа. В данной области решение имеет осевую симметрию. Ясно, что величина поля определяет зону, где характерная для связанного s -состояния сферическая симметрия переходит в осевую симметрию, присущую волновым функциям частиц в чисто магнитном поле. Кроме того, видно, что на больших расстояниях от δ -ямы даже в слабом поле основной вклад вносит только основной уровень эффективной энергии, т.е. уровень, наиболее близко расположенный к границе сплошного спектра ($1+h/2$ в принятых нами единицах). Это полностью согласуется с выводами работ [5], [6]. Обычно, когда рассматриваются процессы со свободными частицами во внешнем магнитном поле, предполагается, что слабое поле вообще не проявляет свой квантующий характер, давая лишь малые поправки в сечения соответствующих процессов. Напротив, традиционно считается, что в сильном поле вклад вносят лишь несколько минимальных по энергии уровней [11].

В противоположность к этому в связанном состоянии любое сколь угодно слабое поле ведет себя как сильное на большом расстоянии от центра. В частности, из формулы (16) следует, что магнитное поле сжимает электронное облако не только в поперечном к полю направлении (что вполне ожидаемо), но и вдоль поля. Однако, если пренебречь сдвигом основного уровня эффективной энергии в магнитном поле, т.е. считать, что $\tilde{w} = 1$, то подобные эффекты не могут быть описаны. Отметим, что при этих упрощающих предположениях решение (16) согласуется с основной функцией, используемой в работе [14].

В сильном поле ситуация оказывается более сложной. Причина очевидна, т.к. в данном случае переходная зона от сферической к осевой симметрии лежит в области, где волновая функция существенно отлична от нуля. Используя результаты работы [6] по определению эффективной энергии электрона в сильных полях ($h \gg 1$), $\tilde{w} \approx 0.295h$, рассмотрим малую окрестность δ -центра. При $\tilde{r} \ll 1/\sqrt{h}$ положение точки перевала определяется выражением (12). Для волновой функции с помощью соотношений (4), (11) имеем аналог выражения (14), но с другим значением эффективной энергии:

$$\psi(\vec{r}) \approx N \frac{2\sqrt{\pi}}{h\tilde{r}} \exp\left(-\frac{i}{4} h\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{r}\sqrt{0.295h}\right). \quad (17)$$

Таким образом, дополняя наши выводы о поведении функции на больших расстояниях в слабом поле, укажем, что любое сколь угодно сильное поле в непосредственной близости от притягивающего δ -центра проявляет себя как слабое. Истинная

Рис. 4. Зависимость $|\chi|^2$ от z на оси $\rho = 0$ для поля $h = 100$. Точки соответствуют расчету по точной формуле (4), сплошные линии (последовательно снизу вверх) определяют приближения сильного поля: вклад основного уровня (18), вклады для $K = 20$ и $K = 2000$, рассчитанные по формуле (20).

причина этого состоит в том, что глубина δ -ямы много больше любого конечного сдвига уровня энергии в магнитном поле. Именно из того, что характер этой асимптотики не зависит от внешнего магнитного поля, и следует уравнение для энергии связанного уровня $w(h)$ [5], [6], [8].

Волновая функция становится осесимметричной в сильном поле на расстояниях $\tilde{z} \gg 1/\sqrt{h}$. Для $h \gg 1$ при фиксированных $\tilde{\rho} \neq 0$ и $\tilde{z} \neq 0$ получаем формулу (15). Для волновой функции из соотношений (4), (11) имеем аналог формулы (16) для сильных полей:

$$\psi(\vec{r}) \approx N \sqrt{\frac{\pi}{0.295h}} \exp\left(-\frac{i}{4}h\tilde{x}\tilde{y} - \frac{h\tilde{\rho}^2}{8} - \tilde{z}\sqrt{0.295h}\right). \quad (18)$$

Легко видеть, что здесь также вклад вносит только основной уровень эффективной энергии.

Сферически-симметричная (12) и осесимметричная (15) оценки точки максимума согласуются в окрестности прямой $\tilde{\rho} = 0$. Интересно, что изначально зависимость энергии связанного уровня от магнитного поля получена авторами работы [5] с помощью предельного перехода в выражении для волновой функции именно вдоль этой линии. Поэтому для расширения области применимости полученного соотношения (18) в сторону малых z можно в исходной формуле (4) разложить знаменатель как геометрическую прогрессию по парциальным эффективным уровням

$$\tilde{w}_k = \tilde{w} + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

Рис. 5. Зависимость $|\chi|^2$ от ρ для поля $h = 100$ при различных z . Точки – расчет по точной формуле (4), сплошные линии – приближения сильного поля по формулам (10), (11).

заменяющим собой уровни Ландау в чисто магнитном поле [15], и использовать для каждого слагаемого оценку (18). Волновая функция в этом случае принимает вид

$$\psi(\vec{r}) \approx N\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{i}{4} h\tilde{x}\tilde{y} - \frac{h\tilde{\rho}^2}{8}\right) \sum_{k=0}^K \frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{(0.295+k)h}}}{\sqrt{(0.295+k)h}}. \quad (20)$$

Легко убедиться, что, увеличивая в сумме максимальное число K учтенных уровней, можно продлить область применимости полученной формулы вплоть до сколь угодно малых значений координаты z .

На рис. 4 квадрат модуля функции $\chi(\vec{r})$, рассчитанной с помощью точной формулы (4), сопоставлен с асимптотиками (18), (20) для поля $h = 100$ на оси $\rho = 0$. Ряд в решении (20) сходится тем лучше (и, следовательно, первый член ряда (18) тем ближе к точному решению), чем больше параметр $\sqrt{h}z$. Это оказывается важным, т.к. в этой области ток вероятности максимален.

На рис. 5 сопоставлены выражения для $|\chi(\vec{r})|^2$ при трех различных значениях $z = 0, 0.3, 0.6$ в сильном поле $h = 100$, рассчитанное по точной формуле (4) и по приближенной формуле (11) с учетом (10).

Подведем краткие итоги раздела. В слабом магнитном поле во всей значимой области изменения координат решение уравнения Паули сферически-симметрично. Оно, по сути, определяется только характером особенности в δ -яме, в формировании этой особенности вносят вклад все эффективные парциальные уровни $\tilde{w}_k$ (см. формулу (19)). Квантующий характер магнитного поля (т.е. ощутимость вклада отдельных уровней энергии) сказывается только далеко от центра, где волновая

функция экспоненциально подавлена. В сильном поле характер симметрии решения меняется уже в значимой области изменения координат. Относительный вклад отдельных уровней при фиксированной интенсивности поля определяется прежде всего продольной (в направлении магнитного поля) координатой, хотя сжимается электронное облако магнитным полем прежде всего в поперечном направлении.

3. ТОКИ ВЕРОЯТНОСТИ ЧАСТИЦЫ, СВЯЗАННОЙ δ -ПОТЕНЦИАЛОМ, В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Общее выражение для нерелятивистского тока вероятности спинора приведено в классической монографии [15]. Воспользовавшись обычными тензорными обозначениями, представим этот ток J_k в следующей форме:

$$J_k = -i \frac{\hbar}{2m} [(\nabla_k \psi_\alpha^*) \psi_\alpha - \psi_\alpha^* \nabla_k \psi_\alpha] + \frac{e}{mc} A_k \psi_\alpha^* \psi_\alpha - \frac{\mu c}{e|s|} \varepsilon_{kpq} \nabla_p (\psi_\alpha^* \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^q \psi_\beta), \quad (21)$$

где $k = 1, 2, 3$ – пространственные координатные индексы, $\alpha = 1, 2$ – спиновые индексы, ∇_k – обычный оператор градиента, A_k – векторный потенциал внешнего магнитного поля, μ – магнитный момент электрона, ε_{kpq} – единичный абсолютно антисимметричный тензор, $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^q$ – двоичные сигма-матрицы. Полное нормированное решение уравнения Паули можно представить в виде

$$\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1/2 + s \\ 1/2 - s \end{pmatrix},$$

где пространственная часть $\psi(\vec{r})$ определяется в (4). Первое и второе слагаемые в (21) определяют градиентный (орбитальный) ток, а последнее соответствует спиновому току.

Проводя свертку по спиновым индексам с учетом явного вида σ -матриц, для пространственных компонент полного тока вероятности получаем

$$\begin{aligned} J_x &= -i \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{e}{mc} A_x \psi^* \psi - \frac{\mu c}{e} \frac{s}{|s|} \frac{\partial}{\partial y} (\psi^* \psi), \\ J_y &= -i \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{e}{mc} A_y \psi^* \psi + \frac{\mu c}{e} \frac{s}{|s|} \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \psi), \\ J_z &= -i \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{e}{mc} A_z \psi^* \psi. \end{aligned}$$

Для дальнейших расчетов необходимо фиксировать калибровку векторного потенциала. Выбирая его в виде $A_x = -Hy$, $A_y = A_z = 0$ и переходя к безразмерным координатам, получаем

$$\vec{J} = \left(\frac{|W_0|}{2m} \right)^{1/2} \frac{\hbar}{2} \psi^* \psi (\vec{j}\tilde{x} - \vec{i}\tilde{y}) + \frac{(2m|W_0|)^{1/2}}{2\hbar} \frac{\mu c}{e} \frac{s}{|s|} \psi^* \tilde{\psi} (\vec{j}\tilde{x} - \vec{i}\tilde{y}), \quad (22)$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ – орты декартовой системы, а функция $\tilde{\psi}(\vec{r})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{r}) = N e^{-ih\tilde{x}\tilde{y}/4} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{1/2}} \frac{1 + e^{-h\tau}}{[1 - e^{-h\tau}]^2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\tilde{z}^2}{4\tau} - \frac{h}{8} \tilde{\rho}^2 \operatorname{cth} \left(\frac{h\tau}{2} \right) - \tilde{w}\tau \right]. \end{aligned}$$

Считая магнитный момент электрона равным магнетону Бора, получим

$$\vec{J} = \left(\frac{|W_0|}{2m} \right)^{1/2} \frac{h}{2} \psi^* (\psi + 2s\tilde{\psi}) (\vec{j}\tilde{x} - i\vec{j}\tilde{y}). \quad (23)$$

Используя точное выражение для пространственной части волновой функции (4), получаем формулу для тока вероятности при произвольной ориентации спина и интенсивности поля:

$$\begin{aligned} \vec{J} = M h^{7/2} \zeta^{-1} \left(\frac{3}{2}, \frac{\tilde{w}}{h} \right) (\vec{j}\tilde{x} - i\vec{j}\tilde{y}) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{1/2}} \frac{\exp[-\tilde{z}^2/(4\tau) - h\tilde{\rho}^2 \operatorname{cth}(h\tau/2)/8 - \tilde{w}\tau]}{1 - e^{-h\tau}} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{1/2}} \frac{\exp[-\tilde{z}^2/(4\tau) - h\tilde{\rho}^2 \operatorname{cth}(h\tau/2)/8 - \tilde{w}\tau]}{1 - e^{-h\tau}} \left[1 + 2s \cdot \operatorname{cth} \left(\frac{h\tau}{2} \right) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где $M = m|W_0|^2/4\pi^2\hbar^3$ – размерный коэффициент, не зависящий от магнитного поля.

Получим оценки для тока в приближении слабого поля. В этом случае имеем

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) \approx N \cdot \frac{8\sqrt{\pi}}{h^2\tilde{r}^3} (1 + \tilde{r}) \exp \left(-\frac{i}{4} h\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{r} \right).$$

Учитывая также (14) и (23), запишем выражение для тока вероятности в слабом магнитном поле:

$$\vec{J} = M \zeta^{-1} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right) \frac{4\pi h^{3/2}}{\tilde{r}^2} e^{-2\tilde{r}} \left[1 + 2s \cdot \frac{4(1 + \tilde{r})}{h\tilde{r}^2} \right] (\vec{j}\tilde{x} - i\vec{j}\tilde{y}). \quad (25)$$

На рис. 6а изображена зависимость логарифма величины $|J|/M$ от поперечной координаты ρ в различных плоскостях $z = \text{const}$ в поле $h = 0.1$, рассчитанная с помощью точной (24) и приближенной (25) формул, для случая $s = -1/2$, т.е. для частицы со спином, ориентированным против поля. Для частицы со спином вдоль поля меняется только ориентация вектора $\vec{J}$, т.е. изменяется направление вращения частицы. Это происходит потому, что второе слагаемое в (25) вблизи δ -ямы оказывается гораздо больше первого. Другими словами, в этом случае орбитальный ток вероятности пренебрежимо мал по сравнению со спиновым. Сравнимы-

Рис. 6. Зависимости величины $\ln(|J|/M)$ от поперечной координаты в плоскостях $z = \text{const}$ в слабом поле $h = 0.1$ для частицы со спином, направленным против поля (а), и скалярной частицы (б). Точки – расчет по точной формуле (24), сплошные линии – приближение слабого поля (25).

Рис. 7. Зависимости величины $\ln(|J|/M)$ от поперечной координаты, рассчитанные по точной формуле (24), в плоскостях $z = \text{const}$ в сильном поле $h = 100$ для частицы со спином, направленным против поля (а), и скалярной частицы (б).

Рис. 8. Зависимость $\ln(|J|/M)$ от поперечной координаты по точной формуле (24) в плоскости $z = 0$ для сильного поля $h = 100$ при различной ориентации спина (вдоль поля, против поля и в случае спина, равного нулю).

ми они становятся лишь на расстояниях от центра $\tilde{r} \sim 1/h$, где сам ток в слабом поле ($h \ll 1$) экспоненциально подавлен. Этот вывод подтверждается при сравнении рис. 6а с рис. 6б, где та же величина $\ln(|J|/M)$ построена для скалярной частицы. При этом сама пространственная часть волновой функции в слабом поле (см. формулу (14)) от спина не зависит. Полученный результат вполне ожидаем, если вспомнить, что в слабом поле δ -яма может связать заряженную частицу только в s -состоянии.

Зависимости величины $\ln(|J|/M)$ от поперечной координаты в плоскостях с различными z в сильном магнитном поле $h = 100$, дающие представление о пространственном распределении тока вероятности, приведены на рис. 7а для электрона со спином против поля и на рис. 7б для скалярной частицы. Для расчета здесь была использована точная формула (24).

На рис. 8 в сильном поле в плоскости $z = 0$ величина $\ln(|J|/M)$ для скалярной частицы сопоставлена с аналогичными значениями для электрона при различной ориентации его спина. В частности, из рис. 8 видно, что орбитальный и спиновый токи в сильном поле становятся соизмеримыми уже вблизи δ -центра. Как и следовало ожидать, в случае электрона со спином, ориентированным против магнитного поля, ток убывает быстрее по мере удаления от центра, т.е. это движение частицы более локализовано. По-видимому, наиболее интересной для исследования спиновых эффектов является именно область, где орбитальный и спиновый токи оказываются соизмеримыми.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем некоторые итоги рассмотрения проблемы учета спина частицы в нерелятивистской задаче. В интенсивном магнитном поле игнорирование спина может привести к некорректным выводам о влиянии поля на целый ряд пороговых процессов [3], [4]. В рамках рассматриваемой темы отметим, что электрический ток, прямо пропорциональный току вероятности, является, в принципе, экспериментально наблюдаемой величиной. Кроме того, он оказывает непосредственное влияние на процессы рассеяния [14]. Из формулы (25) видно, что даже в слабом поле характер особенности тока в окрестности притягивающего δ -центра для частицы со спином имеет характер $\tilde{r}^{-3}$, тогда как для скалярной частицы зависимость оказывается более слабой, вида $\tilde{r}^{-1}$. Для низкоэнергетического рассеяния резерфордского типа это может иметь принципиальное значение. Отметим также, что орбитальный ток в аналогичной задаче рассчитывался в работе [14] с помощью метода калибровочных преобразований. Это позволило привести волновую функцию к весьма удобному для дальнейших расчетов виду – она становится чисто действительной, и весь орбитальный ток сводится лишь ко второму слагаемому в (21). Однако, поскольку расчет спинного тока в работе [14] не проводился и в ней был также использован приближенный вид волновых функций (см. замечание к формуле (16)), полное сравнение полученных результатов не представляется возможным.

Благодарности. Работа выполнена при частичном участии Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-65255.2010.2) и РФФИ (грант № 09-02-00725_а). Работа Г.А. Кравцовой частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8265.2010.1).

Список литературы

- [1] В. С. Попов, *УФН*, **174**:9 (2004), 921–951.
- [2] N.L. Manakov, M.V. Frolov, A.F. Starace, I.I. Fabrikant, *J. Phys. B*, **33**:15 (2000), R141–R214.
- [3] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, *Письма в ЖЭТФ*, **75**:8 (2002), 435–439.
- [4] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, *Докл. АН СССР*, **386**:6 (2002), 753–755.
- [5] Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, *ЖЭТФ*, **49** (1966), 691–698.
- [6] V.N. Rodionov, *Phys. Rev. A*, **75**:6 (2007), 062111; arXiv: [hep-ph/0702228](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0702228).
- [7] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [8] В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, *ЖЭТФ*, **113**:5 (1998), 1579–1605.
- [9] В. Н. Родионов, А. М. Мандель, *Вестн. МГУ. Сер. Физ. Астрономия*, **3** (2001), 25–29.
- [10] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, *ТМФ*, **145**:2 (2005), 198–211.
- [11] И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов, *Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем*, МГУ, М., 1982.
- [12] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [13] А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, М., 1975.
- [14] F.Kh. Chibirova, V.R. Khalilov, *Modern Phys. Lett. A*, **20**:9 (2005), 663–672.
- [15] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, Квантовая механика. Нерелятивистская теория, Наука, М., 1974.