Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, Возможная комбинаторная точка для XYZ -спиновой цепочки, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 2, 179–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 07:25:14

© 2010 г.

А. В. Разумов*, Ю. Г. Строганов*

ВОЗМОЖНАЯ КОМБИНАТОРНАЯ ТОЧКА ДЛЯ XYZ -СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Формулируются и обсуждаются несколько гипотез, относящихся к векторам основного состояния XYZ -спиновых цепочек нечетной длины с периодическими граничными условиями при специальном выборе параметров гамильтониана. В частности, приводятся аргументы в пользу справедливости правила сумм для компонент вектора основного состояния, описывающего, в некотором смысле, степень антиферромагнитности цепочки.

Ключевые слова: XYZ -спиновая цепочка, основное состояние, комбинаторная точка, правила сумм.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная восьмивершинная решеточная модель тесно связана с квантовой одномерной XYZ -спиновой цепочкой. Насколько нам известно, впервые это было отмечено Сазерлендом в работе [1], где было показано, что гамильтониан периодической XYZ -спиновой цепочки

$$\mathcal{H}_{XYZ} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z] \quad (1.1)$$

коммутирует с трансфер-матрицей периодической восьмивершинной модели, если веса последней выбраны специальным образом. В отличие от шестивершинной модели и связанной с ней квантовой XXZ -спиновой цепочки, также описываемой гамильтонианом (1.1) с условием $J_x = J_y$, восьмивершинная модель и XYZ -спиновая цепочка не поддаются решению с помощью анзаца Бете. В 1971 году Бакстер предложил и применил для исследования этих моделей альтернативный метод, с помощью которого ему удалось найти статистическую сумму восьмивершинной модели в термодинамическом пределе [2], [3]. В том же году он установил связь между гамильтонианом (1.1) и логарифмической производной по спектральному параметру коммутирующего семейства трансфер-матриц восьмивершинной модели и нашел

*Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexander.Razumov@ihep.ru, Yuri.Stroganov@ihep.ru

энергию основного состояния, приходящуюся на один узел XYZ -спиновой цепочки в пределе бесконечного числа узлов [4], [5].

В работе [5] Бакстер отметил, что энергия основного состояния, приходящаяся на один узел XYZ -спиновой цепочки, в пределе бесконечного числа узлов имеет простой вид

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E}{N} = -\frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z), \quad (1.2)$$

если параметры J_x , J_y и J_z удовлетворяют соотношению

$$J_x J_y + J_y J_z + J_z J_x = 0 \quad (1.3)$$

и находятся в области

$$J_x + J_y + J_z > 0. \quad (1.4)$$

Позднее он установил, что инверсионные соотношения для собственных значений коммутирующего семейства трансфер-матриц восьмивершинной модели имеют в этом случае очень простое решение даже для решеток конечной длины [6]. Отметим, что не для каждого решения инверсионных соотношений существует соответствующий собственный вектор. Однако если собственный вектор, соответствующий решению, найденному Бакстером, существует, то он является собственным вектором гамильтониана (1.1) с собственным значением

$$E = -\frac{N}{2}(J_x + J_y + J_z), \quad (1.5)$$

что замечательно согласуется с формулой (1.2).

Как было замечено одним из авторов настоящей статьи [7], собственный вектор, соответствующий решению инверсионных соотношений, найденному Бакстером, существует для $N = 1, 3, 5, 7$, а для $N = 2, 4, 6$ такого вектора нет. Это позволило сформулировать гипотезу, что рассматриваемый вектор существует только для цепочек нечетной длины и в этом случае является основным состоянием системы. Справедливость этой гипотезы для случая XXZ -спиновой цепочки была установлена в работах [8]–[10]. Были найдены также соответствующие явные решения TQ -уравнений Бакстера [11], [12], что позволило, в частности, найти выражения для простейших корреляционных функций [13], [14].

Для случая XXZ -спиновой цепочки можно без потери общности выбрать энергетический масштаб, для которого $J_x = J_y = 1$. Тогда из соотношения (1.3) следует, что $J_z = -1/2$. При этом матричные элементы гамильтониана (1.1) относительно естественного базиса, образованного собственными функциями операторов σ_j^z , являются рациональными числами, а энергия основного состояния есть рациональное число $-3N/4$. Ясно, что в этом случае можно нормировать вектор основного состояния так, чтобы его компоненты являлись целыми числами. Мы обнаружили, что для всех нечетных $N \leq 17$ компоненты являются положительными целыми числами [15]. При этом оказалось, что некоторые компоненты, а также определенные их суммы предположительно связаны с перечислениями матриц чередующихся знаков [15], [16]. Некоторые из гипотез, предложенных в работе [15], уже доказаны [16]–[19], некоторые обобщены на случай других граничных условий [20], [21].

Настоящая статья посвящена исследованию XYZ-спиновой цепочки. Предположив, что условия (1.3) и (1.4) выполнены, мы нашли явный вид собственного вектора гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$ с собственным значением (1.5) для всех нечетных $N \leq 19$. Полученные данные позволили нам выдвинуть ряд гипотез о свойствах компонент рассматриваемого вектора. В частности, как и в случае XXZ-спиновой цепочки, удастся проследить связь с комбинаторными объектами. Приводятся также аргументы в пользу справедливости правила сумм для компонент, описывающего, в некотором смысле, степень антиферромагнитности цепочки.

Было бы интересно найти для рассматриваемого случая соответствующее решение TQ -уравнений Бакстера. Пока это сделать не удалось. Многообещающим продвижением в этом направлении являются работы Бажанова и Мангазеева [22], [23], где, в частности, предложена рекуррентная процедура построения решения.

2. ВОСЬМИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И XYZ-ЦЕПОЧКА

Мы используем параметризацию больцмановских весов восьмивершинной модели, предложенную Бакстером [3]. Она имеет вид

$$\begin{aligned} a(v; \rho, \eta, k) &= \rho \Theta(2\eta) \Theta(v - \eta) H(v + \eta), \\ b(v; \rho, \eta, k) &= \rho \Theta(2\eta) H(v - \eta) \Theta(v + \eta), \\ c(v; \rho, \eta, k) &= \rho H(2\eta) \Theta(v - \eta) \Theta(v + \eta), \\ d(v; \rho, \eta, k) &= \rho H(2\eta) H(v - \eta) H(v + \eta), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\Theta(v)$ и $H(v)$ – тета-функции Якоби. Необходимые соотношения для тета-функций и эллиптических функций Якоби можно найти в монографии Бакстера [24]. Всего имеется четыре параметра: v – спектральный параметр, ρ – нормировочный множитель, η – параметр, который иногда называют кроссинг-параметром, и модуль тета-функций k . Мы считаем параметры ρ , η и k фиксированными и в дальнейшем опускаем явное указание на зависимость от них.

Полезно иметь в виду, что

$$a(\eta) = c(\eta) = \rho \Theta(0) H(2\eta) \Theta(2\eta), \quad b(\eta) = d(\eta) = 0 \quad (2.2)$$

и что следующие комбинации весов не зависят от спектрального параметра:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab} &= 2 \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta), \\ \frac{cd}{ab} &= k \operatorname{sn}^2(2\eta). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее $\operatorname{sn}(v)$, $\operatorname{cn}(v)$ и $\operatorname{dn}(v)$ – эллиптические функции Якоби.

Семейство трансфер-матриц $\mathcal{T}(v)$, построенное с использованием весов (2.1), обладает свойством

$$[\mathcal{T}(v), \mathcal{T}(v')] = 0$$

для всех v и v' [2], [3]. Это значит, что мы можем искать векторы $|\Psi\rangle$, которые не зависят от v и удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{T}(v)|\Psi\rangle = T(v)|\Psi\rangle,$$

где $T(v)$ – некоторая функция спектрального параметра. Слегка злоупотребляя терминологией, мы говорим, что $|\Psi\rangle$ есть собственный вектор трансфер-матрицы с собственным значением $T(v)$.

Как показал Бакстер [5], гамильтониан XYZ -спиновой цепочки тесно связан с логарифмической производной трансфер-матрицы восьмивершинной модели по спектральному параметру v в точке $v = \eta$. Буквально повторяя его вычисления, мы получаем

$$T^{-1}(\eta)T'(\eta) = \frac{N}{2a(\eta)}(a'(\eta) + c'(\eta)) + \frac{1}{2a(\eta)} \sum_{j=1}^N [(b'(\eta) + d'(\eta))\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \\ + (b'(\eta) - d'(\eta))\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + (a'(\eta) - c'(\eta))\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z],$$

где штрих означает производную по спектральному параметру. Таким образом,

$$T^{-1}(\eta)T'(\eta) = \frac{N}{2a(\eta)}(a'(\eta) + c'(\eta)) - \frac{1}{a(\eta)}\mathcal{H}_{XYZ}, \quad (2.4)$$

где $\mathcal{H}_{XYZ}$ дается формулой (1.1) с

$$J_x = b'(\eta) + d'(\eta), \quad J_y = b'(\eta) - d'(\eta), \quad J_z = a'(\eta) - c'(\eta). \quad (2.5)$$

Эти соотношения описывают соответствие между тремя фиксированными параметрами восьмивершинной модели и тремя параметрами гамильтониана XYZ -спиновой цепочки.

Обсудим простейшие свойства симметрии гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$. Будем использовать ортонормированный базис, образованный векторами $|\mu_1\mu_2\ldots\mu_N\rangle$ такими, что

$$\sigma_j^z |\mu_1\mu_2\ldots\mu_j\ldots\mu_N\rangle = \mu_j |\mu_1\mu_2\ldots\mu_j\ldots\mu_N\rangle.$$

Таким образом, величины μ_j принимают значения $+1$ и -1 . Если $\mu_j = +1$, то мы говорим, что спин в узле с номером j направлен вверх. Аналогично, если $\mu_j = -1$, мы говорим, что спин в узле с номером j направлен вниз. Часто удобно писать вместо $+1$ или -1 просто $+$ или $-$ соответственно.

Прежде всего отметим, что гамильтониан $\mathcal{H}_{XYZ}$ инвариантен относительно сдвигов на один узел цепочки вправо или влево. Для определенности будем рассматривать сдвиги влево. Оператор $\mathcal{S}$, реализующий эти сдвиги, задается его действием на базисные векторы:

$$\mathcal{S}|\mu_1\mu_2\ldots\mu_N\rangle = |\mu_2\ldots\mu_N\mu_1\rangle. \quad (2.6)$$

Инвариантность гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$ относительно сдвигов выражается в том, что он коммутирует с оператором $\mathcal{S}$.

Нетрудно убедиться в том, что гамильтониан $\mathcal{H}_{XYZ}$ инвариантен также относительно поворотов вокруг любой из координатных осей на угол π . Рассмотрим сначала повороты вокруг оси z . Генератор таких поворотов есть

$$\Sigma^z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^z.$$

Следовательно, оператор $e^{i\pi\Sigma^z}$ коммутирует с гамильтонианом $\mathcal{H}_{XYZ}$. Базисные векторы $|\mu_1\mu_2\ldots\mu_N\rangle$ являются собственными векторами оператора $N/2 + \Sigma^z$ с собственным значением, совпадающим с числом спинов, направленных вверх, а оператор

$$\mathcal{P} = (-1)^{N/2+\Sigma^z} = (-1)^N \sigma_1^z \sigma_2^z \ldots \sigma_N^z \quad (2.7)$$

описывает четность числа спинов, направленных вверх. Так как

$$\mathcal{P} = e^{i\pi N/2} e^{i\pi\Sigma^z},$$

то оператор $\mathcal{P}$ также коммутирует с гамильтонианом $\mathcal{H}_{XYZ}$. Следовательно, мы можем искать собственные векторы гамильтониана, ограничиваясь секторами с определенной четностью числа спинов, направленных вверх¹⁾.

Аналогично, рассматривая повороты на угол π вокруг оси x , мы приходим к выводу, что оператор

$$\mathcal{I} = \sigma_1^x \sigma_2^x \ldots \sigma_N^x, \quad (2.8)$$

обрабатывающий направление всех спинов, коммутирует с гамильтонианом цепочки. Таким образом, если $|\Psi\rangle$ есть собственный вектор гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$, то вектор $\mathcal{I}|\psi\rangle$ также является собственным вектором с тем же самым собственным значением. В частности, если длина цепочки нечетна, то каждое собственное значение гамильтониана по крайней мере дважды вырождено.

Повороты на угол π вокруг оси y могут быть представлены как комбинации поворотов на угол π вокруг осей x и z , поэтому рассмотрение этих поворотов не приводит к дополнительным выводам о собственных векторах и собственных значениях гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$.

3. ПРОСТОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

В этом разделе, используя связь с восьмивершинной моделью, мы приводим аргументы в пользу того, что в случае, когда условие (1.3) выполнено и N нечетно, гамильтониан $\mathcal{H}_{XYZ}$ имеет собственный вектор с собственным значением (1.5).

Перепишем условие (1.3) в терминах фиксированных параметров восьмивершинной модели. Для этого запишем сначала равенства (2.3) в слегка измененном виде:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 &= 2 \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta) ab, \\ cd &= k \operatorname{sn}^2(2\eta) ab, \end{aligned}$$

продифференцируем их по спектральному параметру v и положим $v = \eta$. В результате, учитывая равенства (2.2), получаем

$$\begin{aligned} a'(\eta) - c'(\eta) &= \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta) b'(\eta), \\ d'(\eta) &= k \operatorname{sn}^2(2\eta) b'(\eta). \end{aligned} \quad (3.1)$$

¹⁾Конечно, можно в качестве альтернативы фиксировать четность числа спинов, направленных вниз.

Следовательно, соотношения (2.5) можно записать в виде

$$J_x = [1 + k \operatorname{sn}^2(2\eta)]b'(\eta), \quad J_y = [1 - k \operatorname{sn}^2(2\eta)]b'(\eta), \quad J_z = \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta)b'(\eta)$$

и заметить, что справедливо равенство

$$J_x J_y + J_y J_z + J_z J_x = [1 - k^2 \operatorname{sn}^4(2\eta) + 2 \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta)](b'(\eta))^2.$$

Таким образом, величины J_x , J_y и J_z удовлетворяют соотношению (1.3), если $b'(\eta) = 0$ или

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^4(2\eta) + 2 \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta) = 0. \quad (3.2)$$

В случае, когда $b'(\eta) = 0$, мы получаем тривиальные значения для J_x , J_y и J_z . Предполагая, что η – действительное число, можно показать, что с точностью до периодичности равенство (3.2) справедливо только при $\eta = \pm 2K/3$ и $\eta = \pm 4K/3$, где K – полный эллиптический интеграл первого рода. При этом получаемые значения для J_x , J_y и J_z не зависят от выбора возможного значения η .

Рассмотрим теперь инверсионные соотношения, которым должны удовлетворять собственные значения трансфер-матрицы [25]–[27]:

$$T(v - \eta)T(v + \eta) = \phi^N(v - 2\eta)\phi^N(v + 2\eta) + \phi^N(v)P(v). \quad (3.3)$$

Здесь собственное значение трансфер-матрицы $T(v)$, а также функция $P(v)$ – это некоторые квазипериодические целые функции порядка N , а

$$\phi(v) = \rho \Theta(0)H(v)\Theta(v).$$

Инверсионные соотношения могут быть получены, например, из TQ -уравнений Бакстера [6]. Подчеркнем еще раз, что произвольное решение инверсионных соотношений, удовлетворяющее необходимым свойствам квазипериодичности, может и не быть собственным значением трансфер-матрицы в силу отсутствия соответствующего собственного вектора.

В случае, когда $\eta = \pm 2K/3$ или $\eta = \pm 4K/3$, существуют простые решения инверсионных соотношений:

$$T(v) = \phi^N(v), \quad P(v) = 0 \quad (3.4)$$

и

$$T(v) = -\phi^N(v), \quad P(v) = 0. \quad (3.5)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться свойствами

$$\Theta(v \pm 2K) = \Theta(v), \quad H(v \pm 2K) = -H(v),$$

из которых следует, что

$$\phi(v \pm 2K) = -\phi(v).$$

Используя это равенство, несложно убедиться в том, что (3.4) и (3.5) действительно суть решения инверсионных соотношений (3.3).

Удобно иметь выражение для $T(v)$ в терминах больцмановских весов (2.1). Рассмотрим сумму

$$a(v) + b(v) = \rho\Theta(2\eta)[\Theta(v - \eta)H(v + \eta) + \Theta(v + \eta)H(v - \eta)].$$

Поделив функцию, являющуюся правой частью этого равенства, на $\phi(v)$, мы получаем эллиптическую функцию без полюсов, т.е. постоянную. Полагая $v = 2\eta$, мы видим, что эта постоянная имеет вид

$$\frac{\Theta(\eta)H(3\eta) + \Theta(3\eta)H(\eta)}{\Theta(0)H(2\eta)},$$

что в случаях $\eta = 2K/3$ и $\eta = -4K/3$ равно 1, а в случаях $\eta = -2K/3$ и $\eta = 4K/3$ равно -1 . Следовательно,

$$T(v) = [a(v) + b(v)]^N, \quad (3.6)$$

если для $\eta = 2K/3$ и $\eta = -4K/3$ мы рассматриваем решение (3.4), а для $\eta = -2K/3$ и $\eta = 4K/3$ – решение (3.5), и

$$T(v) = (-1)^N[a(v) + b(v)]^N,$$

если для $\eta = 2K/3$ и $\eta = -4K/3$ мы рассматриваем решение (3.5), а для $\eta = -2K/3$ и $\eta = 4K/3$ – решение (3.4). Можно проверить, что для небольших значений N только функция (3.6) и только для нечетных N является собственным значением трансфер-матрицы.

ГИПОТЕЗА 1. При $\eta = \pm 2K/3$ и $\eta = \pm 4K/3$ трансфер-матрица $T(v)$ восьми-вершинной модели для случая периодических граничных условий и нечетного числа узлов N в горизонтальном направлении имеет собственный вектор с собственным значением (3.6).

Как следует из равенства (2.4), собственное значение трансфер-матрицы (3.6) соответствует собственному значению $-N(a'(\eta) + 2b'(\eta) - c'(\eta))/2$ гамильтониана $\mathcal{H}_{XUZ}$. Используя равенства (2.5), нетрудно убедиться в том, что это собственное значение как раз совпадает с $-N(J_x + J_y + J_z)/2$. Фиксируем энергетический масштаб таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$J_x + J_y = 2,$$

что согласуется с фиксацией энергетического масштаба для XXZ -спиновой цепочки. Вводя обозначение

$$\alpha = k \operatorname{sn}^2(2\eta) \quad (3.7)$$

и принимая во внимание соотношение (3.2), мы получаем

$$J_x = 1 + \alpha, \quad J_y = 1 - \alpha, \quad J_z = \frac{\alpha^2 - 1}{2}. \quad (3.8)$$

Тогда исследуемое нами собственное значение имеет вид

$$E(\alpha) = -\frac{N}{2}(J_x + J_y + J_z) = -\frac{N}{4}(3 + \alpha^2).$$

Обозначим гамильтониан $\mathcal{H}_{XYZ}$ с величинами J_x , J_y и J_z , задаваемыми равенствами (3.8), как $\mathcal{H}(\alpha)$ и сформулируем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. *Для нечетного числа узлов N основное состояние гамильтониана $\mathcal{H}(\alpha)$ дважды вырожденно и имеет энергию*

$$E(\alpha) = -\frac{N}{4}(3 + \alpha^2). \quad (3.9)$$

Стоит отметить несколько специальных значений параметра α . При $\alpha = 0$ мы имеем XXZ -спиновую цепочку с $J_x = J_y = 1$ и $J_z = -1/2$. При $\alpha = \pm 3$ получаем XXZ -спиновую цепочку с $J_x = J_y = 1$ и $J_z = -1/2$, повернутую на угол $\pi/2$ вокруг оси x или оси y . В случае $\alpha = 1$ получаем тривиальный гамильтониан $\mathcal{H}(1) = -\sum_{j=1}^N \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x$.

В случае, когда $\eta = \pm 2K/3$ или $\eta = \pm 4K/3$, инверсионные соотношения неоднородной восьмивершинной модели

$$\begin{aligned} T(v - \eta|v_1, \dots, v_N)T(v + \eta|v_1, \dots, v_N) = \\ = \prod_{j=1}^N [\phi(v - v_j - 2\eta)\phi(v - v_j + 2\eta)] + \left[\prod_{j=1}^N \phi(v - v_j) \right] P(v|v_1, \dots, v_N) \end{aligned}$$

также имеют два простых решения:

$$T(v|v_1, \dots, v_N) = \prod_{j=1}^N \phi(v - v_j), \quad P(v|v_1, \dots, v_N) = 0$$

и

$$T(v|v_1, \dots, v_N) = -\prod_{j=1}^N \phi(v - v_j), \quad P(v|v_1, \dots, v_N) = 0.$$

Используя аргументацию, аналогичную приведенной выше, мы приходим к выводу, что следующая гипотеза является весьма правдоподобной.

ГИПОТЕЗА 3. *При $\eta = \pm 2K/3$ или $\eta = \pm 4K/3$ неоднородная трансфер-матрица $\mathcal{T}(v|v_1, \dots, v_N)$ восьмивершинной модели для случая периодических граничных условий и нечетного числа узлов N в горизонтальном направлении имеет собственный вектор с собственным значением*

$$T(v|v_1, \dots, v_N) = \prod_{j=1}^N [a(v - v_j) + b(v - v_j)]. \quad (3.10)$$

Так же как и в однородном случае, можно считать, что собственный вектор, о котором идет речь в гипотезе 3, не зависит от v , так как трансфер-матрицы $\mathcal{T}(v|v_1, \dots, v_N)$ для различных значений спектрального параметра v коммутируют.

В заключение этого раздела заметим, что, учитывая равенства (2.3), можно записать (3.2) в виде изящного условия на веса:

$$(a^2 + ab)(b^2 + ab) = (c^2 + ab)(d^2 + ab),$$

которое мы, впрочем, далее не используем.

4. ГИПОТЕЗЫ О СВОЙСТВАХ КОМПОНЕНТ

Матричные элементы гамильтониана $\mathcal{H}(\alpha)$ в рассматриваемом нами базисе, так же как и собственное значение $E(\alpha)$, являются полиномами от α с рациональными коэффициентами. Можно нормировать собственный вектор $|\Psi(\alpha)\rangle$, соответствующий собственному значению $E(\alpha)$, так, чтобы все его компоненты стали полиномами по α с целыми коэффициентами.

В пределе XXZ -спиновой цепочки, когда $\alpha = 0$, компоненты суть просто целые числа, и мы заметили [15], что они являются положительными целыми числами и связаны с перечислениями матриц чередующихся знаков.

В этом и следующих разделах мы изучаем свойства компонент для XYZ -спиновой цепочки и видим, что существуют указания на то, что и здесь возможна связь с комбинаторными задачами.

Для наглядности приведем явные выражения для компонент вектора $|\Psi(\alpha)\rangle$ при $N = 3, 5, 7$. Для каждого нечетного N имеются два собственных вектора с собственным значением $E(\alpha)$, различающихся четностью числа спинов, направленных вверх. Мы будем использовать обозначение $|\Psi(\alpha)\rangle$ для собственного вектора, принадлежащего к сектору с положительной четностью числа спинов, направленных вверх. Соответствующий вектор, принадлежащий сектору с отрицательной четностью числа спинов, направленных вверх, будет обозначаться $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle$. В соответствии с нашими соглашениями

$$\mathcal{P}|\Psi(\alpha)\rangle = |\Psi(\alpha)\rangle, \quad \mathcal{P}|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle = -|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle,$$

где оператор $\mathcal{P}$ задан равенством (2.7), и мы можем считать, что $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle = \mathcal{I}|\Psi(\alpha)\rangle$, где оператор $\mathcal{I}$ задан равенством (2.8). Компоненты векторов $|\Psi(\alpha)\rangle$ и $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle$ связаны очевидным соотношением

$$\bar{\Psi}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(\alpha) = \Psi_{\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\ldots\bar{\mu}_n}(\alpha), \quad (4.1)$$

где мы обозначили $\bar{\mu}_j = -\mu_j$. Потому мы приводим выражения только для компонент вектора $|\Psi(\alpha)\rangle$.

Для случая $N = 3$ ненулевые компоненты вектора $|\Psi(\alpha)\rangle$ суть

$$\Psi_{---}(\alpha) = \alpha, \quad \Psi_{-++}(\alpha) = \Psi_{+-+}(\alpha) = \Psi_{++-}(\alpha) = 1.$$

Заметим, что для $N = 3$ вектор $|\Psi(\alpha)\rangle$, так же как и вектор $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle$, является трансляционно-инвариантным. Это справедливо для всех нечетных N , по крайней мере вплоть до $N = 19$.

ГИПОТЕЗА 4. Векторы $|\Psi(\alpha)\rangle$ и $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle$ являются трансляционно-инвариантными, т.е. справедливы равенства

$$\mathcal{S}|\Psi(\alpha)\rangle = |\Psi(\alpha)\rangle, \quad \mathcal{S}|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle = |\bar{\Psi}(\alpha)\rangle,$$

где оператор $\mathcal{S}$ задан равенством (2.6).

Приведем теперь выражения для ненулевых компонент векторов $|\Psi(\alpha)\rangle$ при $N = 5$ и $N = 7$, которые не получаются друг из друга сдвигом индексов:

а) для $N = 5$

$$\begin{aligned}\Psi_{-----}(\alpha) &= \alpha + \alpha^3, & \Psi_{-----+}(\alpha) &= 1 + \alpha^2, \\ \Psi_{---+--+}(\alpha) &= 2, & \Psi_{-++++}(\alpha) &= 2\alpha;\end{aligned}$$

б) для $N = 7$

$$\begin{aligned}\Psi_{-----}(\alpha) &= 4\alpha^2 + 3\alpha^4 + \alpha^6, & \Psi_{-----+}(\alpha) &= 4\alpha + 3\alpha^3 + \alpha^5, \\ \Psi_{-----+}(\alpha) &= 7\alpha + \alpha^3, & \Psi_{---+--+}(\alpha) &= 7\alpha + \alpha^3, \\ \Psi_{---++++}(\alpha) &= 1 + 5\alpha^2 + 2\alpha^4, & \Psi_{--+++++}(\alpha) &= 3 + 5\alpha^2, \\ \Psi_{-++--+}(\alpha) &= 4 + 3\alpha^2 + \alpha^4, & \Psi_{-+-----}(\alpha) &= 3 + 5\alpha^2, \\ \Psi_{-+-+--+}(\alpha) &= 7 + \alpha^2, & \Psi_{-+++++}(\alpha) &= 3\alpha + 5\alpha^3.\end{aligned}$$

Использована нормировка, при которой компоненты являются полиномами от α с минимально возможными целыми коэффициентами. Можно сразу заметить, что все компоненты являются полиномами с положительными коэффициентами, что говорит о возможной комбинаторной интерпретации.

Рассматривая предел соотношения

$$\mathcal{H}(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = E(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle \quad (4.2)$$

при α , стремящемся к бесконечности, легко понять, что среди компонент вектора $|\Psi(\alpha)\rangle$ полиномом максимальной степени по α является компонента $\Psi_{-----}(\alpha)$. Обозначим эту степень через D_N . Можно заметить, что в используемой нами нормировке коэффициент при α^{D_N} в $\Psi_{-----}(\alpha)$ равен единице.

ГИПОТЕЗА 5. Для $N = 2n + 1$ степень полинома $\Psi_{-----}(\alpha)$ дается формулой

$$D_N = \frac{N^2 - 1}{8} = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

ГИПОТЕЗА 6. Нормируем вектор $|\Psi(\alpha)\rangle$ так, что

$$\Psi_{-----}(\alpha) = \alpha^{D_N} + o(\alpha^{D_N}).$$

При такой нормировке компоненты вектора $|\Psi(\alpha)\rangle$ являются полиномами от α с положительными целыми коэффициентами.

В пределе, когда α стремится к нулю, мы получаем вектор основного состояния XXZ -спиновой цепочки в нормировке, при которой минимальная компонента вектора равна единице.

ГИПОТЕЗА 7. При нормировке, описанной в гипотезе 6, мы имеем для $N = 4m + 1$

$$\Psi_{-----}(\alpha) = \alpha^{(2m+1)m} + \dots + A_V(2m + 1)^2 \alpha^m,$$

где $A_V(2m+1)$ – число вертикально-симметричных матриц чередующихся знаков порядка $2m+1$, и для $N = 4m-1$

$$\Psi_{\dots\dots\dots}(\alpha) = \alpha^{(2m-1)m} + \dots + N_8(2m)^2 \alpha^m,$$

где $N_8(2m)$ – число циклически-симметричных транспонированно-дополнительных плоских разбиений, помещающихся в ящик размером $2m \times 2m \times 2m$.

Формула для $A_V(2m+1)$ была предложена в работе [28] и доказана в статье [29]. Приведем ее в виде, заимствованном из нашей работы [30]:

$$A_V(2m+1) = \frac{1}{2^m} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(6i+4)!(2i+1)!}{(4i+3)!(4i+2)!}.$$

Формула для $N_8(2m)$, имеющая вид

$$N_8(2m) = \prod_{i=0}^{m-1} (3i+1) \frac{(6i)!(2i)!}{(4i+1)!(4i)!},$$

была доказана в работе Миллса, Роббинса и Рамси [31].

Как мы уже отмечали, повороты вокруг координатных осей на угол π являются преобразованиями симметрии для гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$, а следовательно, и для оператора $\mathcal{H}(\alpha)$. Оказывается, что рассмотрение поворотов вокруг координатных осей на угол $\pi/2$, которые не являются преобразованиями симметрии, позволяет извлечь полезную информацию о векторах $|\Psi(\alpha)\rangle$ и $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle$.

Рассмотрим сначала повороты на угол $\pi/2$ вокруг оси z . Оператор

$$\rho^z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + i\sigma^z \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i\sigma^z}{\sqrt{2}}$$

описывает повороты индивидуального спина, а повороты всей цепочки описываются оператором

$$\mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho_1^z\left(\frac{\pi}{2}\right) \rho_2^z\left(\frac{\pi}{2}\right) \dots \rho_N^z\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Используя соотношения

$$\mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma_j^x = -\sigma_j^y \mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma_j^y = \sigma_j^x \mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma_j^z = -\sigma_j^z \mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

нетрудно показать, что справедливо равенство

$$\mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathcal{H}(\alpha) = \mathcal{H}(-\alpha) \mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.3)$$

Подействуем на обе части равенства (4.2) оператором $\mathcal{R}^z(\pi/2)$. Учитывая соотношение (4.3) и заменяя α на $-\alpha$, получаем

$$\mathcal{H}(\alpha) \left[\mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) |\Psi(-\alpha)\rangle \right] = E(\alpha) \left[\mathcal{R}^z\left(\frac{\pi}{2}\right) |\Psi(-\alpha)\rangle \right].$$

Если справедлива гипотеза 2, то собственное значение $E(\alpha)$ в секторе с определенной четностью числа спинов, направленных вверх, является невырожденным. Принимая во внимание то, что оператор $\mathcal{R}^z(\pi/2)$ не меняет четности числа спинов, направленных вверх, мы приходим к выводу, что вектор $\mathcal{R}^z(\pi/2)|\Psi(-\alpha)\rangle$ пропорционален вектору $|\Psi(\alpha)\rangle$. Нетрудно понять, что это возможно только в случае, когда компоненты $|\Psi(\alpha)\rangle$ являются полиномами от α определенной четности. Сформулируем это утверждение в более конкретном виде как следствие наших гипотез.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого нечетного N имеем*

$$\begin{aligned}\Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(-\alpha) &= (-1)^{D_N} (-1)^{(N+\mu_1+\dots+\mu_N)/4} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha) = \\ &= (-1)^{(N^2-1)/8} (-1)^{(N+\mu_1+\dots+\mu_N)/4} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha).\end{aligned}$$

Рассматривая повороты на угол $\pi/2$ вокруг осей x и y , получаем

$$\mathcal{R}^x\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathcal{H}(\alpha) = \frac{(1+\alpha)^2}{4}\mathcal{H}\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)\mathcal{R}^x\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (4.4)$$

$$\mathcal{R}^y\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathcal{H}(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{4}\mathcal{H}\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-1}\right)\mathcal{R}^y\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (4.5)$$

Эти равенства, в частности, описывают связь собственных векторов гамильтониана XXZ -спиновой цепочки, соответствующего случаю $\alpha = 0$, и собственных векторов гамильтонианов повернутых XXZ -спиновых цепочек, соответствующих случаям $\alpha = 3$ и $\alpha = -3$.

5. ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ КОМПОНЕНТ

В этом разделе мы рассматриваем линейные и квадратичные суммы компонент векторов $|\Psi(\alpha)\rangle$ и $|\bar{\Psi}(\alpha)\rangle$. Прежде всего введем обозначения

$$S_1(\alpha) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha), \quad S_2(\alpha) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}^2(\alpha)$$

и отметим, что из соотношения (4.1) следует, что

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \bar{\Psi}_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha) = S_1(\alpha), \quad \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \bar{\Psi}_{\mu_1 \dots \mu_N}^2(\alpha) = S_2(\alpha).$$

Первым нашим наблюдением, касающимся свойств функций $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$, является тот факт, что полином $S_1(\alpha)$ почти является делителем полинома $S_2(\alpha)$.

ГИПОТЕЗА 8. *Если $N = 4m - 1$ или $N = 4m + 1$, то*

$$\frac{S_2(\alpha)}{S_1(\alpha)} = \frac{F(\alpha)}{(\alpha+3)^m},$$

где $F(\alpha)$ – полином от α .

Рассмотрим опять поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси y и обозначим

$$|\Phi(\alpha)\rangle = \mathcal{R}^y\left(\frac{\pi}{2}\right)|\Psi(\alpha)\rangle.$$

Как следует из соотношения (4.5), вектор $|\Phi(\alpha)\rangle$ есть собственный вектор гамильтониана $\mathcal{H}(\alpha')$ с собственным значением $E(\alpha')$, где $\alpha' = (\alpha + 3)/(\alpha - 1)$. Предположим, что гипотеза 2 справедлива, тогда $|\Phi(\alpha)\rangle$ является линейной комбинацией векторов $|\Psi(\alpha')\rangle$ и $|\bar{\Psi}(\alpha')\rangle$. Так как

$$\rho^y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + i\sigma^y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1 + i\sigma^z}{\sqrt{2}},$$

то мы имеем

$$\rho^y\left(\frac{\pi}{2}\right)|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \quad \rho^y\left(\frac{\pi}{2}\right)|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \quad (5.1)$$

поэтому

$$\mathcal{R}^y\left(\frac{\pi}{2}\right)|\mu_1 \dots \mu_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N}}|+\dots+\rangle + \dots + (-1)^{(N+\mu_1+\dots+\mu_N)/2} \frac{1}{\sqrt{2^N}}|-\dots-\rangle.$$

Используя это соотношение, несложно показать, что

$$|\Phi(\alpha)\rangle = \frac{S_1(\alpha)}{\sqrt{2^N}} \left[\frac{1}{\Psi_{- \dots -}(\alpha')} |\Psi(\alpha')\rangle + \frac{1}{\bar{\Psi}_{+ \dots +}(\alpha')} |\bar{\Psi}(\alpha')\rangle \right]. \quad (5.2)$$

Из равенств (5.1) следует, что если $|\varphi\rangle = \rho^y(\pi/2)|\psi\rangle$, то

$$\sum_{\mu} \varphi_{\mu} = \sqrt{2} \psi_{-}, \quad \sum_{\mu} \psi_{\mu} = \sqrt{2} \varphi_{+}.$$

Теперь можно убедиться в том, что

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha) = \sqrt{2^N} \Psi_{- \dots -}(\alpha), \quad \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha) = \sqrt{2^N} \Phi_{+ \dots +}(\alpha). \quad (5.3)$$

Перепишем равенство (5.2) в терминах компонент:

$$\Phi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha) = \frac{S_1(\alpha)}{\sqrt{2^N}} \left[\frac{\Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha')}{\Psi_{- \dots -}(\alpha')} + \frac{\bar{\Psi}_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha')}{\bar{\Psi}_{+ \dots +}(\alpha')} \right]. \quad (5.4)$$

Суммируя по индексам и принимая во внимание первое из равенств (5.3) и соотношение (4.1), получаем следствие наших гипотез.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливо соотношение*

$$\frac{S_1(\alpha)}{\Psi_{- \dots -}(\alpha)} \frac{S_1(\alpha')}{\bar{\Psi}_{- \dots -}(\alpha')} = 2^{N-1}, \quad (5.5)$$

где $\alpha' = (\alpha + 3)/(\alpha - 1)$.

Используя явный вид компонент векторов $|\Psi(\alpha)\rangle$ для нечетных $N \leq 19$, мы приходим к выводу, что, по-видимому, справедлива следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА 9. *Выполняются равенства*

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) &= 2^{-(N-3)(N-1)/8} (\alpha - 1)^{D_N} \Psi_{-...-}(\alpha'), \\ S_1(\alpha') &= 2^{(N-1)(N+5)/8} (\alpha - 1)^{-D_N} \Psi_{-...-}(\alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha' = (\alpha + 3)/(\alpha - 1)$.

Матрица $\rho^y(\pi/2)$ является ортогональной, следовательно,

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_N}^2(\alpha) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}^2(\alpha). \quad (5.6)$$

Используя соотношения (5.6) и (5.4), а также тот факт, что компоненты $\Psi_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha)$ и $\bar{\Psi}_{\mu_1 \dots \mu_N}(\alpha)$ отличны от нуля для разных наборов индексов, получаем

$$2^{N-1} \Psi_{-...-}^2(\alpha') S_2(\alpha) = S_1^2(\alpha) S_2(\alpha').$$

Исходя из этого и принимая во внимание равенство (5.5), сформулируем еще одно следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедливо равенство*

$$\frac{S_2(\alpha)}{S_1(\alpha) \Psi_{-...-}(\alpha)} = \frac{S_2(\alpha')}{S_1(\alpha') \Psi_{-...-}(\alpha')},$$

где $\alpha' = (\alpha + 3)/(\alpha - 1)$.

Если справедлива гипотеза 9, то следствие 3 можно переформулировать в следующем виде.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Справедливо равенство*

$$S_2(\alpha') = 2^{2D_N} (\alpha - 1)^{-2D_N} S_2(\alpha),$$

где $\alpha' = (\alpha + 3)/(\alpha - 1)$.

Введя обозначение $\tilde{S}_2(\alpha) = (\alpha + 1)^{-2D_N} S_2(\alpha)$, можно сформулировать следствие 4 как утверждение об инвариантности рациональной функции $\tilde{S}_2(\alpha)$ относительно дробно-линейного преобразования $\alpha \rightarrow (\alpha + 3)/(\alpha - 1)$.

6. СТЕПЕНЬ АНТИФЕРРОМАГНИТНОСТИ ЦЕПОЧКИ

Рассмотрим трансфер-матрицу $\mathcal{T}(v|v_1, \dots, v_N)$ неоднородной восьмивершинной модели. При $v_j = 0$ трансфер-матрица $\mathcal{T}(v|v_1, \dots, v_N)$ сводится к трансфер-матрице однородной модели, а ее собственные векторы – к собственным векторам трансфер-матрицы однородной модели, которые являются также собственными векторами гамильтониана $\mathcal{H}_{XYZ}$.

Предположим теперь, что $\eta = \pm 2K/3$ или $\eta = \pm 4K/3$ и что гипотеза 3 справедлива. Осуществим переход к однородному случаю в два шага. Сначала положим, что $v_1 = 0$ и $v_j = v - \eta$, $j = 2, \dots, N$, а затем положим $v = \eta$. Пусть $|\Psi(v_1, \dots, v_N)\rangle$ есть собственный вектор трансфер-матрицы с собственным значением, задаваемым соотношением (3.10), т.е. справедливо равенство

$$\mathcal{T}(v|v_1, \dots, v_N)|\Psi(v_1, \dots, v_N)\rangle = \left[\prod_{j=1}^N [a(v - v_j) + b(v - v_j)] \right] |\Psi(v_1, \dots, v_N)\rangle.$$

Полагая в этом равенстве $v_1 = 0$ и $v_j = v - \eta$, $j = 2, \dots, N$, и учитывая, что $b(\eta) = 0$, мы получаем

$$\mathcal{U}(v)|\Phi(v)\rangle = [a(v) + b(v)]|\Phi(v)\rangle, \quad (6.1)$$

где $|\Phi(v)\rangle = |\Psi(0, v - \eta, \dots, v - \eta)\rangle$, а

$$\mathcal{U}(v) = \frac{1}{a^{N-1}(\eta)} \mathcal{T}(v|0, v - \eta, \dots, v - \eta).$$

Оператор $\mathcal{U}(v)$ при $v = \eta$ совпадает с оператором сдвига, заданным соотношением (2.6), а для произвольного v является оператором сдвига с одним дефектом. Используя стандартное определение трансфер-матрицы, мы видим, что уравнение (6.1) эквивалентно уравнениям

$$a(v)\Phi_{\mu\mu\mu_3\dots\mu_N}(v) + d(v)\Phi_{\bar{\mu}\bar{\mu}\mu_3\dots\mu_N}(v) = [a(v) + b(v)]\Phi_{\mu\mu_3\dots\mu_N\mu}(v), \quad (6.2)$$

$$c(v)\Phi_{\mu\bar{\mu}\mu_3\dots\mu_N}(v) + b(v)\Phi_{\bar{\mu}\bar{\mu}\mu_3\dots\mu_N}(v) = [a(v) + b(v)]\Phi_{\mu\mu_3\dots\mu_N\bar{\mu}}(v). \quad (6.3)$$

Суммируя равенства (6.2) и (6.3) по индексам и складывая полученные равенства, имеем

$$\begin{aligned} [a(v) + d(v)] \sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu\mu\mu_3\dots\mu_N}(v) + [c(v) + b(v)] \sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu\bar{\mu}\mu_3\dots\mu_N}(v) = \\ = [a(v) + b(v)] \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_N}(v). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Учитывая тождество

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_N}(v) = \sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu\mu\mu_3\dots\mu_N}(v) + \sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu\bar{\mu}\mu_3\dots\mu_N}(v),$$

мы записываем равенство (6.4) в виде

$$\frac{\sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu\bar{\mu}\mu_3\dots\mu_N}(v)}{\sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Phi_{\mu\mu\mu_3\dots\mu_N}(v)} = \frac{d(v) - b(v)}{a(v) - c(v)}.$$

Когда v стремится к η , вектор $|\Phi(v)\rangle$ переходит в вектор $|\Psi(\alpha)\rangle$. Используя правило Лопиталя, соотношения (3.1), (3.2) и обозначение (3.7), получаем еще одно следствие наших гипотез.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Справедливо равенство*

$$\Xi(\alpha) = \frac{\sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Psi_{\mu \bar{\mu} \mu_3 \dots \mu_N}(\alpha)}{\sum_{\mu, \mu_3, \dots, \mu_N} \Psi_{\mu \mu \mu_3 \dots \mu_N}(\alpha)} = \frac{2}{\alpha + 1}.$$

Величину $\Xi(\alpha)$ можно рассматривать, как некоторую оценку степени антиферромагнитности цепочки.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы привели первые результаты изучения собственного вектора гамильтониана периодической XYZ -спиновой цепочки нечетной длины, соответствующего простому собственному значению, существующему при специальном выборе параметров гамильтониана. Представляется весьма правдоподобным, что этот вектор является вектором основного состояния, что подтверждается результатами, полученными для предела XXZ -спиновой цепочки. При соответствующем выборе нормировки компоненты изучаемого вектора в естественном базисе являются полиномами с целыми положительными коэффициентами от единственного остающегося свободным параметра гамильтониана. Это позволяет предполагать существование связи с комбинаторными задачами. Связь с перечислениями плоских разбиений уже проявилась.

Благодарности. Авторы благодарны Ф. Ди Франческо, В. Паске и П. Зинн-Жюстену за интересные и полезные обсуждения, а также В. Бажанову и В. Мангазееву за содержательную дискуссию. Работа над статьей была частично поддержана РФФИ (гранты № 07-01-00234, 09-01-93107). А. В. Разумов был также частично поддержан РФФИ (грант № 09-01-12123).

Список литературы

- [1] B. Sutherland, *J. Math. Phys.*, **11**:11 (1970), 3183–3186.
- [2] R. J. Baxter, *Phys. Rev. Lett.*, **26**:14 (1971), 832–833.
- [3] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **70**:1 (1972), 193–228.
- [4] R. J. Baxter, *Phys. Rev. Lett.*, **26**:14 (1971), 834–834.
- [5] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **70**:2 (1972), 323–337.
- [6] R. J. Baxter, “Solving models in statistical mechanics”, *Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Adv. Stud. Pure Math., **19**, eds. M. Jimbo, T. Miwa, A. Tsuchiya, Math. Soc. Japan, Tokyo; Academic Press, Boston, MA, 1989, 95–116.
- [7] Yu. G. Stroganov, “The 8-vertex model with a special value of the crossing parameter and the related XYZ spin chain”, *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **35**, eds. S. Pakulyak, G. von Gehlen, Kluwer, Dordrecht, 2001, 315–319.
- [8] X. Yang, P. Fendley, *J. Phys. A*, **37**:38 (2004), 8937–8948, arXiv: cond-mat/0404682.
- [9] G. Veneziano, J. Wosiek, *JHEP*, **2006**:11 (2006), 030, 18 pp., arXiv: hep-th/0609210.

- [10] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, P. Zinn-Justin, *J. Phys. A*, **40**:39 (2007), 11827–11847, arXiv:0704.3542.
- [11] V. Fridkin, Yu. Stroganov, D. Zagier, *J. Phys. A*, **33**:13 (2000), L121–L125, arXiv:hep-th/9912252.
- [12] V. Fridkin, Yu. Stroganov, D. Zagier, *J. Stat. Phys.*, **102**:3–4 (2001), 781–794, arXiv:nlin/0010021.
- [13] Yu. G. Stroganov, *J. Phys. A*, **34**:13 (2001), L179–L185, arXiv:cond-mat/0012035.
- [14] Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 345–359.
- [15] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *J. Phys. A*, **34**:14 (2001), 3185–3190, arXiv:cond-mat/0012141.
- [16] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *J. Stat. Mech.*, **2006**:7 (2006), P07004, 12 pp., arXiv:math-ph/0605004.
- [17] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Phys. A*, **35**:27 (2002), L385–L388, arXiv:hep-th/0201134.
- [18] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Phys. A*, **35**:49 (2002), L753–L758, arXiv:hep-th/0210019.
- [19] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, J.-B. Zuber, *J. Stat. Mech.*, **2006**:8 (2006), P08011, arXiv:math-ph/0603009.
- [20] M. T. Batchelor, J. de Gier, B. Nienhuis, *J. Phys. A*, **34**:19 (2001), L265–L270, arXiv:cond-mat/0101385.
- [21] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *J. Phys. A*, **34**:26 (2001), 5335–5340, arXiv:cond-mat/0102247.
- [22] V. V. Bazhanov, V. V. Mangazeev, *J. Phys. A*, **38**:8 (2005), L145–L153, arXiv:hep-th/0411094.
- [23] V. V. Bazhanov, V. V. Mangazeev, *J. Phys. A*, **39**:39 (2006), 12235–12243, arXiv:hep-th/0602122.
- [24] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [25] Yu. G. Stroganov, *Phys. Lett. A*, **74**:1–2 (1979), 116–118.
- [26] R. J. Baxter, “Exactly solved models”, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, ed. E. G. D. Cohen, North Holland, Amsterdam, New York, 1980, 109–141.
- [27] R. J. Baxter, *J. Stat. Phys.*, **28**:1 (1982), 1–41.
- [28] D. P. Robbins, *Symmetry classes of alternating sign matrices*, arXiv:math.CO/0008045.
- [29] G. Kuperberg, *Ann. Math.*, **156**:3 (2002), 835–866, arXiv:math.CO/0008184.
- [30] А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **141**:3 (2004), 323–347, arXiv:math-ph/0312071.
- [31] W. H. Mills, D. P. Robbins, H. Rumsey Jr., *J. Combin. Theory Ser. A*, **34**:3 (1983), 340–359.

Поступила в редакцию 20.02.2010