Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, А. Г. Мешков, Интегрируемые векторные эволюционные уравнения, имеющие сохраняющиеся плотности нулевого порядка, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 2, 207–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:49:18

© 2010 г.

М. Ю. Балахнев*, А. Г. Мешков*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ПЛОТНОСТИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

В рамках симметричного подхода решена задача классификации интегрируемых векторных эволюционных уравнений третьего порядка, имеющих сохраняющиеся плотности нулевого порядка. Получен полный список из девяти уравнений указанного вида. Два уравнения из списка ранее не были известны. Для новых уравнений найдены автопреобразования Беклунда.

Ключевые слова: канонические плотности, интегрируемые эволюционные уравнения, преобразования Беклунда.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе получена классификация интегрируемых векторных эволюционных уравнений третьего порядка

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_1 \mathbf{u}_1 + f_0 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial x^i}, \quad (1)$$

допускающих сохраняющуюся плотность нулевого порядка. Здесь $\mathbf{u}(x, t)$ – неизвестный вектор, принадлежащий некоторому N -мерному векторному пространству V , а f_i – скалярные функции, зависящие от всевозможных скалярных произведений векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. В качестве метода классификации применяется бескомпонентная версия симметричного подхода [1], [2]. Суть этого метода состоит в том, что интегрируемое уравнение должно иметь бесконечное множество канонических сохраняющихся плотностей ρ_n :

$$D_t \rho_n = D_x \theta_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

которые выражаются в терминах коэффициентов уравнения (1). Здесь D_x – полная производная по x , D_t – эволюционная производная, т. е. производная в силу уравнения (1).

*Орловский государственный технический университет, Орел, Россия.
E-mail: maxibal@yandex.ru, a_meshkov@orel.ru

Уравнения вида (1) с одним скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ мы называем *изотропными*. Для описания уравнений с нарушенной симметрией относительно движений пространства V вводится второе скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Например, основная метрика может быть евклидовой, а вторая – неевклидовой или даже вырожденной. Для дальнейшего важны только симметричность, билинейность и дифференцируемость обоих скалярных произведений, которые считаются независимыми. В результате получаем множество динамических переменных двух сортов:

$$u_{[i,j]} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j), \quad \tilde{u}_{[i,j]} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle, \quad 0 \leq i \leq j. \quad (3)$$

Нас интересуют результаты, не зависящие от размерности пространства N . Таким образом, величина N рассматривается как параметр, поэтому переменные (3) можно считать независимыми.

Если коэффициенты уравнения (1) зависят от переменных обоих типов (3), то мы называем такое уравнение *анизотропным*. Назовем целое число j *порядком* переменных $u_{[i,j]}$ и $\tilde{u}_{[k,j]}$.

Порядком функции от переменных (3) называется наивысший из порядков переменных, от которых она зависит. Порядок функции F обозначается $\text{ord } F$.

Симметрии и сохраняющиеся плотности уравнения (1) считаем функциями от переменных (3). На уравнение (1) налагается априорное условие существования закона сохранения нулевого порядка

$$D_t \rho = D_x \varphi, \quad (4)$$

где $\rho = \rho(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]})$ – дифференцируемая непостоянная функция.

Классификация интегрируемых уравнений вида (1) проводится с точностью до точечных комплексных преобразований, которые указаны ниже.

1. Масштабные преобразования:

$$x' = \alpha x, \quad t' = \alpha^3 t, \quad \mathbf{u}' = \gamma \mathbf{u}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

2. Преобразование Галилея:

$$t' = t, \quad x' = x + ct, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

3. Преобразование метрик:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \beta (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \rightarrow \gamma \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \delta (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

4. Преобразование модуля вектор-функции:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} f(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]}). \quad (8)$$

Ввиду произвольности обеих метрик преобразование (7) не меняет типа уравнения (1) и не нарушает его интегрируемости.

Легко видеть, что преобразование (8) обратимо тогда и только тогда, когда обратимо следующее преобразование $(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]}) \mapsto (v_{[0,0]}, \tilde{v}_{[0,0]})$:

$$v_{[0,0]} = u_{[0,0]} f^2, \quad \tilde{v}_{[0,0]} = \tilde{u}_{[0,0]} f^2. \quad (9)$$

Якобиан преобразования (9) имеет следующий вид:

$$J = \frac{D(v, \tilde{v})}{D(u, \tilde{u})} = f^3(f + 2uf_u + 2\tilde{u}\tilde{f}_{\tilde{u}}),$$

где для краткости обозначено $u = u_{[0,0]}$ и $\tilde{u} = \tilde{u}_{[0,0]}$, индексы u и $\tilde{u}$ означают частные производные. В частности, в случае изотропного преобразования $\mathbf{v} = \mathbf{u}f(u_{[0,0]})$ имеем $J = f(f + 2uf_u)$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ КЛАССИФИКАЦИИ

В ходе классификации некоторые из уравнений вида (1) удалось привести в “сферических координатах” $\mathbf{v} = \mathbf{u}|\mathbf{u}|^{-1}$, $R = |\mathbf{u}|$ к системам треугольного вида. Треугольной мы называем систему, состоящую из независимого интегрируемого уравнения на сфере для вектор-функции $\mathbf{v}$ и связанного с ним уравнения для R . Такие уравнения отбрасывались ввиду их тривиальности.

ТЕОРЕМА. *Всякое интегрируемое уравнение (1), имеющее хотя бы одну сохраняющуюся плотность нулевого порядка либо приводится к треугольной системе, либо эквивалентно относительно преобразований (5)–(8) одному из следующих изотропных уравнений:*

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + au_{[0,0]}\mathbf{u}_1, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + a(u_{[0,0]}\mathbf{u}_1 + u_{[0,1]}\mathbf{u}), \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right) \mathbf{u} \right]_x + au_{[0,0]}\mathbf{u}_1, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + 3 \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right) \mathbf{u}_1 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right)_x \mathbf{u}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - \frac{3}{2} \left(2 \frac{u_{[0,2]} + a}{1 + u_{[0,0]}} + u_{[1,1]} \frac{1 - u_{[0,0]}}{1 + u_{[0,0]}} + u_{[0,1]}^2 \frac{u_{[0,0]} - 2}{(1 + u_{[0,0]})^2} \right) \mathbf{u}_1 + \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right)_x \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \left(\frac{u_{[0,2]} - u_{[0,0]}u_{[1,1]}}{1 + u_{[0,0]}} + u_{[0,0]} \frac{u_{[0,1]}^2 + a}{(1 + u_{[0,0]})^2} \right) \mathbf{u}_1 + \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,1]}^2 + a}{1 + u_{[0,0]}} - u_{[1,1]} \right)_x \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 + 3 \left(\frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} - \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} + au_{[0,0]}^2 \right) \mathbf{u}_1 + 3au_{[0,0]}u_{[0,1]}\mathbf{u}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 - \frac{3}{2} \left(2 \frac{u_{[0,2]}}{u_{[0,0]}} + \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} - 5 \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} + u_{[0,0]}^2 \right) \mathbf{u}_1 + \\ + \frac{3}{2} \left(3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[0,0]}} + 3 \frac{u_{[0,1]}u_{[0,2]}}{u_{[0,0]}^2} - 4 \frac{u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3} \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(2 \frac{u_{[0,2]}}{u_{[0,0]}} + \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} - 5 \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} + au_{[0,0]}^2 \right) \mathbf{u}_1 + \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[1,2]}}{u_{[0,0]}} - 3 \frac{u_{[0,1]}u_{[0,2]}}{u_{[0,0]}^2} - 4 \frac{u_{[1,1]}u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}^2} + 8 \frac{u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3} \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (18)$$

где a – произвольная постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнения (10) и (16)–(18) допускают только одну сохраняющуюся плотность нулевого порядка $\rho = u_{[0,0]}$. Уравнения (11) и (13) допускают сохраняющуюся плотность $\rho = c_1 u_{[0,0]} + c_2 \tilde{u}_{[0,0]}$ с произвольными постоянными c_1 и c_2 . Это означает, что произведение $u^\alpha \tilde{u}^\beta$ любых двух компонент вектора $\mathbf{u}$ – сохраняющаяся плотность. Каждое из оставшихся уравнений (12), (14) и (15) допускает только одну сохраняющуюся плотность нулевого порядка, которая имеет более сложный вид: $\rho = (1 + u_{[0,0]})^{1/2}$, $\rho = (1 + u_{[0,0]})^{-1/2}$ и $\rho = (1 + u_{[0,0]})^{-1}$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Постоянные в векторных обобщениях модифицированного уравнения Кортвега–де Фриза (мКдФ) (10) и (11), вероятно впервые найденных в работе [3], можно изменить растяжением переменной $\mathbf{u}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (12)–(15) совпадают соответственно с уравнениями (6)–(9) из работы [4] с точностью до масштабного преобразования. Уравнение (16) является частным случаем уравнения (3.16) из работы [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В скалярном пределе после дополнительного преобразования $u = f(z)$ все уравнения (10)–(18) переходят в уравнение мКдФ или его обобщение. Именно, уравнения (12) и (13) подстановкой $u = \operatorname{sh} z$ приводятся к виду $z_t = z_3 - z_1^3/2 + az_1 \operatorname{sh}^2 z$ и $z_t = z_3 - 2z_1^3$ соответственно; уравнения (14) и (15) подстановкой $u = \operatorname{tg} z$ приводятся к виду $z_t = z_3 + z_1^3/2 - 3az_1 \cos^2 z$ и $z_t = z_3 + 2z_1^3 - 3az_1 \sin^2(2z)/2$ соответственно; уравнения (16) и (18) подстановкой $u = e^z$ приводятся к виду $z_t = z_3 - 2z_1^3 + 6az_1 e^{4z}$ и $z_t = z_3 - 2z_1^3 + 3az_1 e^{4z}/2$ соответственно. И, наконец, уравнение (17) приводится к виду $z_t = z_3 - 3z^2 z_1/2$ подстановкой $u = \sqrt{z}$.

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

ЛЕММА. С точностью до преобразований (8) существует только два типа сохраняющихся плотностей нулевого порядка:

$$(A) \quad \rho_1 = u_{[0,0]}; \quad (B) \quad \rho_2 = f(\tilde{u}_{[0,0]}/u_{[0,0]}). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, как видно из (9), функция $I = \tilde{u}_{[0,0]} u_{[0,0]}^{-1}$ является инвариантом преобразования (8). Если $\rho = \rho(\tilde{u}_{[0,0]}/u_{[0,0]})$, то такая функция не меняется при преобразовании (8), что приводит к случаю (B).

Если сохраняющаяся плотность не является инвариантом, то выбрав в (8) функцию f в виде $f = (\rho(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]}))^{1/2} / u_{[0,0]}$, получаем $\rho = u_{[0,0]} f^2 = v_{[0,0]}$ в силу (9). При этом якобиан преобразования $J = \rho u_{[0,0]}^{-2} (u \rho_u + \tilde{u} \rho_{\tilde{u}})$ не равен нулю, так как ρ не является функцией инварианта I . Следовательно, преобразование (8) указанного вида обратимо и дает $v_{[0,0]}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Возможны только два типа эволюционных уравнений вида (1), имеющих сохраняющиеся плотности нулевого порядка. Коэффициенты этих уравнений определяются законом сохранения (4):*

$$(A) \quad f_0 = \frac{1}{u_{[0,0]}} [D_x h - f_1 u_{[0,1]} - f_2 u_{[0,2]}],$$

$$(B) \quad f_1 = \frac{u_{[0,0]}^2}{2\rho' \xi} \left[D_x h + (u_{[1,1]} - 2u_{[0,2]}) D_x \frac{\tilde{u}_{[0,0]} \rho'}{u_{[0,0]}^2} + (2\tilde{u}_{[0,2]} - \tilde{u}_{[1,1]}) D_x \frac{\rho'}{u_{[0,0]}} \right] - \\ - f_2 D_x \ln \xi,$$

где $\text{ord } h \leq 1$, $\rho = \rho(\tilde{u}_{[0,0]}/u_{[0,0]})$, $\xi = u_{[0,0]} \tilde{u}_{[0,1]} - \tilde{u}_{[0,0]} u_{[0,1]}$.

Докажем соотношение (A). Вычислив левую часть равенства $D_t u_{[0,0]} = D_x \varphi$, находим

$$u_{[0,3]} + f_2 u_{[0,2]} + f_1 u_{[0,1]} + f_0 u_{[0,0]} = \frac{1}{2} D_x \varphi.$$

Положив здесь $\varphi = 2h + 2u_{[0,2]} - u_{[1,1]}$, получаем выражение для f_0 . Условие $\text{ord } h \leq 1$ следует из $\text{ord } f_i \leq 2$, $i = 0, 1, 2$.

Соотношение (B) доказывается аналогично.

Следующим шагом является исследование условий интегрируемости (2) уравнения (1). Эти вычисления достаточно просты и подробно освещались во многих работах (см., например, [1], [2], [6]–[11]), поэтому здесь мы не касаемся этого вопроса.

В результате исследования уравнений типа (B) выяснилось, что все эти уравнения, удовлетворяющие шести условиям интегрируемости, сводятся к треугольным системам в “сферических координатах”. Все интегрируемые уравнения на сфере найдены в работах [1] и [12].

При исследовании уравнений типа (A) было найдено более трех десятков уравнений, удовлетворяющих шести условиям интегрируемости. При этом многие из этих уравнений оказались очень громоздкими. Применяя преобразования (5)–(8), удалось свести все полученные уравнения к девяти уравнениям (10)–(18).

Отметим два часто применявшихся преобразования:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \sqrt{\frac{b_1 v_{[0,0]} + b_2}{v_{[0,0]}}}, \quad b_1 \neq 0; \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} \sqrt{\frac{c_1 \tilde{v}_{[0,0]} + c_2}{v_{[0,0]}}}, \quad c_1 \neq 0.$$

Первое из этих преобразований, переводящее плотность $u_{[0,0]}$ в плотность $v_{[0,0]}$, применялось к изотропным уравнениям. Второе преобразование, переводящее плотность $u_{[0,0]}$ в плотность $\tilde{v}_{[0,0]}$, применялось к анизотропным уравнениям. При этом

анизотропные уравнения всякий раз превращались в изотропные. Встречались и более сложные преобразования, которые изменили функциональный вид сохраняющихся плотностей для уравнений (12)–(15).

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Автопреобразования Беклунда для уравнений вида (1) были введены в работе [1] как векторные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$\mathbf{u}_x = g_0 \mathbf{v}_x + g_1 \mathbf{u} + g_2 \mathbf{v}, \quad (20)$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – решения уравнения (1), а функции g_i зависят от всевозможных скалярных произведений векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_x$. Так как все уравнения (10)–(18) изотропные, то анизотропные переменные можно не включать в уравнение (20). Следовательно, $g_i = g_i(u_{[0,0]}, v_{[0,0]}, v_{[0,1]}, v_{[1,1]}, w, w_1)$, где $w = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $w_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_x)$ и $v_{[i,j]} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$.

Дифференцирование равенства (20) по t в силу уравнений для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ приводит к векторному уравнению, содержащему векторные $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_j$ и скалярные $u_{[i,j]}$, $v_{[i,j]}$ и $w_{[i,j]} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)$, переменные до четвертого порядка включительно. При этом переменные $\mathbf{u}_i$, $i > 0$, $u_{[i,j]}$, $j > 0$, и $w_{[k,l]}$, $k > 0$, исключаются из уравнения при помощи самого преобразования (20). Расщепление уравнения по оставшимся векторным и скалярным переменным приводит к переопределенной системе дифференциальных уравнений для функций g_0 , g_1 и g_2 .

Ниже приведены автопреобразования Беклунда для новых уравнений (17) и (18); существование этих преобразований доказывает интегрируемость этих уравнений. Для упрощения формул преобразования Беклунда приведены к симметричной форме, поэтому в правых частях появилась переменная $u_{[0,1]} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$. Кроме того, обозначено $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$, $\mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$. В обоих случаях параметр Беклунда обозначен как μ .

Автопреобразование Беклунда для уравнения (17) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|\mathbf{u}_x + |\mathbf{u}|\mathbf{v}_x = & \left[\frac{|\mathbf{v}|}{\mathbf{u}^2} \mathbf{u} + 2 \frac{|\mathbf{u}|\mathbf{v} + |\mathbf{v}|\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2} \right] (\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) + \\ & + \left[\frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v} + 2 \frac{|\mathbf{u}|\mathbf{v} + |\mathbf{v}|\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2} \right] (\mathbf{v}, \mathbf{v}_x) + \frac{|\mathbf{v}|^3 \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^3 \mathbf{v}}{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2} f, \end{aligned}$$

где

$$f^2 = (\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2)^2 + \mu \left(1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \right).$$

В скалярном пределе после замены $\mathbf{u}^2 \rightarrow u$ приведенное автопреобразование переходит в известное автопреобразование Беклунда для уравнения мКдФ: $u_x + v_x = \frac{1}{2}(u - v)\sqrt{(u + v)^2 + \mu}$.

Автопреобразование Беклунда для уравнения (18) имеет вид

$$|\mathbf{v}|\mathbf{u}_x + |\mathbf{u}|\mathbf{v}_x = -\frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{v}^2} (\mathbf{v}, \mathbf{v}_x) \mathbf{v} - \frac{|\mathbf{v}|}{\mathbf{u}^2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) \mathbf{u} + (|\mathbf{u}|\mathbf{u} - |\mathbf{v}|\mathbf{v})g,$$

где

$$g^2 = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \left(\frac{\mu}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| + (\mathbf{u}, \mathbf{v})} - a |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \right).$$

В скалярном пределе после замены $u \rightarrow e^u$ это преобразование переходит в правильное автопреобразование Беклунда

$$u_x + v_x = \operatorname{sh}(u - v) \sqrt{\mu - a e^{2u+2v}}$$

для уравнения

$$u_t = u_3 - 2u_1^3 + \frac{3}{2} a u_1 e^{4u}.$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.5.07).

Список литературы

- [1] A. G. Meshkov, V. V. Sokolov, *Comm. Math. Phys.*, **232**:1 (2002), 1–18.
- [2] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 192–208.
- [3] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **100**:2 (1994), 214–218.
- [4] М. Ю. Балахнев, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 13–20.
- [5] M. Ju. Balakhnev, A. G. Meshkov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 212–226.
- [6] Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 79–80.
- [7] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 86–87.
- [8] H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu, *Phys. Scripta*, **20**:3–4 (1979), 490–492.
- [9] A. G. Meshkov, *Inverse Problems*, **10**:3 (1994), 635–653.
- [10] V. V. Sokolov, A. B. Shabat, *Sov. Sci. Rev. C*, **4** (1984), 221–280.
- [11] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов, “Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений”, *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, ред. В. Г. Бахтарьяр, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко, Наукова думка, Киев, 1990, 213–279.
- [12] A. G. Meshkov, M. Ju. Balakhnev, *SIGMA*, **1** (2005), 027, 11 pp.

Поступила в редакцию 27.10.2009