Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, Об уравнении
Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником
в классе периодических функций, *ТМФ*, 2010, том 164,
номер 2, 214–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:50:01

© 2010 г.

А. Б. Хасанов*, А. Б. Яхшимуратов*

ОБ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, спектральные данные, система уравнений Дубровина, уравнение Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником.

В работах [1]–[8] и др. исследовано уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) в классе периодических функций.

В настоящей работе изучается уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций, а именно рассматривается следующая задача:

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(t) \frac{\partial}{\partial x} (g_k^2(x, t)) + \\ + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) \frac{\partial}{\partial x} (\psi_+(x, t, \lambda) \cdot \psi_-(x, t, \lambda)) d\lambda, \quad t > 0, \quad x \in R^1, \quad (1)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad (2)$$

где $q = q(x, t)$ – π -периодическая по переменной x функция, $\beta(\lambda, t)$ – заданная вещественная функция такая, что интеграл, участвующий в (1), допускает почленное интегрирование, а функции $\psi_{\pm}(x, t, \lambda)$ – решения Флоке уравнения Штурма–Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R^1, \quad (3)$$

$\varepsilon_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – некоторая заданная последовательность вещественных функций, имеющая асимптотику $\varepsilon_k = O(1/k^3)$, $k \rightarrow \infty$, а функции $g_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – собственные функции либо периодической ($y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$), либо антипериодической ($y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$) задачи для уравнения Штурма–Лиувилля (3), соответствующие собственным значениям λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Предполагается,

*Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан.
E-mail: ahasanov2002@mail.ru, albaron@mail.ru

что собственные функции нормированы условиями

$$g_k(0, t) = 2\pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(t) - \lambda_k}{n^2}. \quad (4)$$

Здесь $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, – собственные значения задачи Дирихле ($y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$) для уравнения Штурма–Лиувилля (3).

В настоящей работе мы предлагаем процедуру построения решения $q = q(x, t)$, $\psi_{\pm}(x, t, \lambda)$, $g_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, задачи (1)–(4). Предполагается, что $\psi_{\pm}(0, t, \lambda) = 1$.

Отметим, что уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций было рассмотрено в работах [9]–[13] и др., а нелинейные уравнения с самосогласованным источником в классе периодических функций в различных постановках изучались в работах [14], [15].

Основной результат настоящей работы сформулирован в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Если $q = q(x, t)$, $\psi_{\pm}(x, t, \lambda)$, $g_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – решение задачи (1)–(4), то спектр оператора (3) не зависит от параметра t , а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют системе уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) = & 2 \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)] + 2\xi_n(t) \right\} \frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\partial s(\pi, \xi_n(t), t) / \partial \lambda} + \\ & + \frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\partial s(\pi, \xi_n(t), t) / \partial \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\varepsilon_k(t) s^2(\pi, \lambda_k, t)}{\xi_n(t) - \lambda_k} + \\ & + \frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\partial s(\pi, \xi_n(t), t) / \partial \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t)}{\xi_n(t) - \lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda, t) + s'(\pi, \lambda, t)$. Здесь $c(x, \lambda, t)$ и $s(x, \lambda, t)$ – решения уравнения (3), определяемые начальными условиями $c(0, \lambda, t) = 1$, $c'(0, \lambda, t) = 0$ и $s(0, \lambda, t) = 0$, $s'(0, \lambda, t) = 1$. Знаки $\sigma_n(t)$ меняются при каждом столкновении $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введя обозначения

$$\begin{aligned} G(x, t) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(t) \frac{\partial}{\partial x} (g_k^2(x, t)), \\ \tilde{G}(x, t) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t) \frac{\partial}{\partial x} (\psi_+(x, t, \lambda) \psi_-(x, t, \lambda)) d\lambda, \end{aligned} \quad (6)$$

уравнение (1) можно переписать в виде

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + G(x, t) + \tilde{G}(x, t). \quad (7)$$

Обозначим через $y_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots$, ортонормированные собственные функции задачи (3) с π -периодическим потенциалом, являющимся решением уравнения (7)

при граничных условиях Дирихле $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ с собственными значениями $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$. Дифференцируя по t тождество $(Ly_n, y_n) = \xi_n$ и используя симметричность оператора L , имеем

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= (L\dot{y}_n + q_t y_n, y_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) = (\dot{y}_n, Ly_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) + (q_t y_n, y_n) = \\ &= \xi_n((y_n, y_n)) + (q_t y_n, y_n) = \int_0^\pi q_t(x, t) y_n^2(x, t) dx.\end{aligned}\quad (8)$$

Используя уравнение (7), перепишем равенство (8) в виде

$$\dot{\xi}_n = \int_0^\pi q_{xxx} y_n^2 dx - 6 \int_0^\pi q_x y_n (q y_n) dx + \int_0^\pi (G + \tilde{G}) y_n^2 dx. \quad (9)$$

Обозначив $F_n = \int_0^\pi (G + \tilde{G}) y_n^2 dx$ для удобства и применив формулы интегрирования по частям в равенстве (9), получим

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= \int_0^\pi y_n^2 dq_{xx} - 6 \int_0^\pi (\xi_n y_n^2 + y_n'' y_n) dq + F_n = \\ &= y_n^2 q_{xx}|_0^\pi - \int_0^\pi 2y_n y_n' dq_x - 6(\xi_n y_n^2 + y_n'' y_n) q|_0^\pi + \\ &\quad + 6 \int_0^\pi (2\xi_n y_n y_n' + y_n''' y_n + y_n'' y_n') q dx + F_n = \\ &= -2y_n y_n' q_x|_0^\pi + 2 \int_0^\pi ((y_n')^2 + y_n'' y_n) dq + \\ &\quad + 6 \int_0^\pi \{2\xi_n y_n' (q y_n) + y_n''' (q y_n)\} dx + 6 \int_0^\pi y_n'' y_n' q dx + F_n = \\ &= 2((y_n')^2 + y_n y_n'') q|_0^\pi - 2 \int_0^\pi \{3y_n' y_n'' + y_n y_n'''\} q dx + \\ &\quad + 12\xi_n \int_0^\pi \{\xi_n y_n y_n' + y_n' y_n''\} dx + \\ &\quad + 6 \int_0^\pi \{\xi_n y_n''' y_n + y_n'' y_n'''\} dx + 6 \int_0^\pi y_n'' y_n' q dx + F_n = \\ &= 2(y_n')^2 q|_0^\pi + 4 \int_0^\pi \{\xi_n y_n''' y_n + y_n'' y_n'''\} dx + 6\xi_n^2 y_n^2|_0^\pi + 6\xi_n (y_n')^2|_0^\pi + F_n = \\ &= 2(y_n')^2 (q + 3\xi_n)|_0^\pi + F_n + 2(y_n'')^2|_0^\pi + 4\xi_n \int_0^\pi y_n dy_n'' = \\ &= 2(y_n')^2 (q + 3\xi_n)|_0^\pi + F_n + 4\xi_n y_n y_n''|_0^\pi - 4\xi_n \int_0^\pi y_n' y_n'' dx = \\ &= 2(y_n')^2 (q + 3\xi_n)|_0^\pi + F_n - 2\xi_n (y_n')^2|_0^\pi.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{\xi}_n = 2[(y_n'(\pi, t))^2 - (y_n'(0, t))^2] [q(0, t) + 2\xi_n(t)] + F_n. \quad (10)$$

Полагая $\lambda = \xi_n(t)$ в тождестве

$$\int_0^\pi s^2(x, \lambda, t) dx = s'(\pi, \lambda, t) \frac{\partial s(\pi, \lambda, t)}{\partial \lambda} - s(\pi, \lambda, t) \frac{\partial^2 s(\pi, \lambda, t)}{\partial \lambda \partial x}$$

и пользуясь равенством $s(\pi, \xi_n(t), t) = 0$, получим

$$c_n^2(t) \equiv \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), t) dx = s'(\pi, \xi_n(t), t) \frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda}.$$

Подставляя выражение

$$y_n(x, t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x, \xi_n(t), t) \quad (11)$$

в равенство (10), имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = 2[q(0, t) + 2\xi_n(t)] \frac{[s'(\pi, \xi_n(t), t) - 1/s'(\pi, \xi_n(t), t)]}{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)/\partial \lambda} + F_n. \quad (12)$$

Полагая $x = \pi$, $\lambda = \xi_n(t)$ в тождестве $c(x, \lambda)s'(x, \lambda) - s(x, \lambda)c'(x, \lambda) = 1$, находим $c(\pi, \xi_n(t), t)s'(\pi, \xi_n(t), t) = 1$. Следовательно,

$$\Delta(\xi_n(t)) = \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} + s'(\pi, \xi_n(t), t).$$

Отсюда

$$s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}, \quad (13)$$

где

$$\sigma_n(t) = \text{sign} \left\{ s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} \right\}.$$

Из формул (12), (13) следует, что

$$\dot{\xi}_n(t) = 2[q(0, t) + 2\xi_n(t)] \frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)/\partial \lambda} + F_n. \quad (14)$$

В силу формулы следов

$$q(0, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)]$$

с учетом выражения (11) и обозначения $F_n = \int_0^\pi (G + \tilde{G}) y_n^2 dx$ уравнение (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) = & 2 \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)] + 2\xi_n(t) \right\} \frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)/\partial \lambda} + \\ & + \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t) \partial s(\pi, \xi_n(t), t)/\partial \lambda} \int_0^\pi G(x, t) s^2(x, \xi_n(t), t) dx + \\ & + \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t) \partial s(\pi, \xi_n(t), t)/\partial \lambda} \int_0^\pi \tilde{G}(x, t) s^2(x, \xi_n(t), t) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь займемся вычислением следующего интеграла:

$$J_n = \int_0^\pi G(x, t) s^2(x, \xi_n(t), t) dx.$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), t) \frac{\partial}{\partial x} (g_k^2(x, t)) dx &= \frac{1}{\xi_n(t) - \lambda_k} (W\{s(x, \xi_n(t), t), g_k(x, t)\})^2 \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\xi_n(t) - \lambda_k} g_k^2(0, t) (s'^2(\pi, \xi_n(t), t) - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

В равенстве (16) мы использовали π -периодичность функции $g_k^2(x, t)$ по x . Так как функции $g_k^2(x, t)$ нормированы условиями (4), в силу равенства

$$s(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(t) - \lambda}{n^2} \quad (17)$$

справедливо тождество $g_k^2(0, t) = 4s^2(\pi, \lambda_k, t)$. Следовательно,

$$2 \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), t) \frac{\partial}{\partial x} (g_k^2(x, t)) dx = \frac{4}{\xi_n(t) - \lambda_k} s^2(\pi, \lambda_k, t) (s'^2(\pi, \xi_n(t), t) - 1).$$

Значит,

$$J_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\varepsilon_k(t) s^2(\pi, \lambda_k, t)}{\xi_n(t) - \lambda_k} (s'^2(\pi, \xi_n(t), t) - 1). \quad (18)$$

Аналогично вычислим следующий интеграл:

$$\tilde{J}_n = \int_0^\pi \tilde{G}(x, t) s^2(x, \xi_n(t), t) dx.$$

Используя π -периодичность функции $\psi_+(x, t, \lambda)\psi_-(x, t, \lambda)$ по переменной x и нормировку $\psi_\pm(0, t, \lambda) = 1$, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), t) \frac{\partial}{\partial x} (\psi_+(x, t, \lambda)\psi_-(x, t, \lambda)) dx &= \\ &= \frac{1}{\xi_n(t) - \lambda} (W\{s(x, \xi_n(t), t), \psi_+(x, t, \lambda)\} W\{s(x, \xi_n(t), t), \psi_-(x, t, \lambda)\}) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \\ &= \frac{1}{\xi_n(t) - \lambda} (s'^2(\pi, \xi_n(t), t) - 1). \end{aligned}$$

Значит,

$$\tilde{J}_n = (s'^2(\pi, \xi_n(t), t) - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t)}{\xi_n(t) - \lambda} d\lambda. \quad (19)$$

Учитывая формулы (13), (18) и (19), из равенства (15) выводим систему (5).

Теперь докажем независимость от t собственных значений λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, периодической и антипериодической задач для уравнения Штурма–Лиувилля (3). Аналогично формуле (10) можно показать, что

$$\dot{\lambda}_n(t) = \int_0^\pi G(x, t) v_n^2(x, t) dx + \int_0^\pi \tilde{G}(x, t) v_n^2(x, t) dx, \quad (20)$$

где $v_n(x, t)$ – нормированная собственная функция периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма–Лиувилля (3).

Пусть

$$\psi_{\pm}(x, \lambda, t) = c(x, \lambda, t) + \frac{s'(\pi, \lambda, t) - c(\pi, \lambda, t) \pm \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda, t)} s(x, \lambda, t)$$

– решения Флоке для уравнения (3). Тогда при $k \neq n$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} \psi^2(x, \lambda_n, t) \frac{\partial}{\partial x} (\psi^2(x, \lambda_k, t)) dx &= \\ &= 2 \int_0^{\pi} [\psi^2(x, \lambda_n, t) \psi(x, \lambda_k, t) \psi'(x, \lambda_k, t) - \psi(x, \lambda_n, t) \psi'(x, \lambda_n, t) \psi^2(x, \lambda_k, t)] dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \psi(x, \lambda_n, t) \psi(x, \lambda_k, t) W\{\psi(x, \lambda_n, t), \psi(x, \lambda_k, t)\} dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} (W\{\psi(x, \lambda_n, t), \psi(x, \lambda_k, t)\})^2 \Big|_0^{\pi} = 0; \end{aligned}$$

при $k = n$

$$2 \int_0^{\pi} \psi^2(x, \lambda_n, t) \frac{\partial}{\partial x} (\psi^2(x, \lambda_k, t)) dx = \psi^4(x, \lambda_n, t) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Следовательно, учитывая вид функции $G(x, t)$ и равенства

$$v_n(x, t) = \frac{1}{\alpha_n} \psi(x, \lambda_n, t), \quad g_n(x, t) = 2s(\pi, \lambda_n, t) \psi(x, \lambda_n, t),$$

получаем

$$\int_0^{\pi} G(x, t) v_n^2(x, t) dx = 0.$$

Аналогично имеем

$$\int_0^{\pi} \tilde{G}(x, t) v_n^2(x, t) dx = 0.$$

Значит, $\dot{\lambda}_n(t) = 0$ в силу выражения (20). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)–(4). Действительно, обозначим через λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n = 1, 2, \dots$, спектральные данные задачи

$$-y'' + q(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Найдем спектральные данные λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$, для уравнения

$$-y'' + q_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Решаем задачу Коши $\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$, для системы уравнений Дубровина (5). По формуле следов

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)]$$

находим решение задачи (1)–(4). После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi_{\pm}(x, t, \lambda)$ и функции $g_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя равенство (17) и

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2(\lambda - \lambda_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_{2k-1})(\lambda - \lambda_{2k})}{k^4},$$

систему уравнений Дубровина (5) можно написать в замкнутой форме. В частности, если $q(x, t)$ – конечнозонный потенциал, т.е. $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = \xi_k$, $k > N$, то система (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) = & 2\sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq n}}^N \frac{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \lambda_{2k})}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times \\ & \times \left\{ 2\lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^N [\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)] + 4\xi_n(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\varepsilon_k(t)s^2(\pi, \lambda_k, t)}{\xi_n(t) - \lambda_k} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t)}{\xi_n(t) - \lambda} d\lambda \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (21)$$

После замены

$$\xi_n(t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(t), \quad x_n(0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

система (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) = & \sigma_n(0) \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq n}}^N \frac{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \lambda_{2k})}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times \\ & \times \left\{ 2\lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^N [\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)] + 4\xi_n(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\varepsilon_k(t)s^2(\pi, \lambda_k, t)}{\xi_n(t) - \lambda_k} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t)}{\xi_n(t) - \lambda} d\lambda \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (22)$$

ПРИМЕР. Пусть $q_0(x)$ – однозонный потенциал. Тогда $q(x + \tau, t)$ также является однозонным потенциалом со спектральными параметрами $\xi_1(\tau, t)$, $\sigma_1(\tau, t)$. Пусть, кроме этого, $\beta(\lambda, t) \equiv 0$, $\varepsilon_k(t) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) = & -\frac{1}{4} \left\{ -C\sigma_1(0) \sqrt{\tilde{\xi}_1 - \lambda_0 + 2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)(\tilde{\xi}_1 - \lambda_0)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \pi(\tilde{\xi}_1 - \lambda_0) \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_{2k} - \lambda_0}{k^2} \right\}^{-2}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\xi}_1 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2(Ct + C_1)$. Здесь C – ненулевая действительная постоянная и $C_1 = x_1^0(\tau)$ определяется из равенства

$$\xi_1^0(\tau) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1^0(\tau), \quad x_1^0(0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда уравнение (22) принимает следующий вид:

$$\dot{x}_1(t) = \sigma_1(0) \sqrt{\xi_1 - \lambda_0} \left\{ 2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \frac{4\varepsilon_0(t)s^2(\pi, \lambda_0, t)}{\xi_1 - \lambda_0} \right\},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = \sigma_1(0) \sqrt{\xi_1 - \lambda_0} \times \\ \times \left\{ 2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) - \frac{(\xi_1 - \lambda_0)}{(\tilde{\xi}_1 - \lambda_0)} [2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) - C\sigma_1(0)(\tilde{\xi}_1 - \lambda_0)^{-1/2}] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что $\xi_1 = \tilde{\xi}_1 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2(Ct + x_1^0(\tau))$ удовлетворяет уравнению (23) и начальному условию $\xi_1|_{t=0} = \xi_1^0(\tau)$. Используя формулу следов, имеем

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\xi_1(\tau, t).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В уравнении (1) можно рассмотреть источник более общего вида

$$\widehat{G}(x, t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda, t) \frac{\partial}{\partial x} (\psi_+(x, t, \lambda) \psi_-(x, t, \lambda)) d\lambda(\beta(\lambda, t)),$$

который включает в себя оба приведенных выше источника.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если изучать уравнение КдФ вида $q_t = q_{xxx} - 6qq_x + f(t)$ приведенным выше способом, то спектр оператора Штурма–Лиувилля (3) зависит от параметра t , точнее, спектр движется на оси, сохраняя прежнюю структуру.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974), 54–66.
- [2] Б. А. Дубровин, *Функц. анализ и его прил.*, **9:3** (1975), 41–51.
- [3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *ЖЭТФ*, **67:12** (1974), 2131–2143.
- [4] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *ТМФ*, **23:1** (1975), 51–68.
- [5] P. D. Lax, “Periodic solutions of the KdV equations”, *Nonlinear Wave Motion, Lecture Appl. Math.*, **15**, ред. А. С. Newell, AMS, Providence, RI, 1974, 85–96.
- [6] P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28** (1975), 141–188.
- [7] Н. Р. McKean, Е. Trubowitz, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29:2** (1976), 143–226.
- [8] В. А. Марченко, *Матем. сб.*, **95(137):3(11)** (1974), 331–356.
- [9] В. К. Мельников, *Метод интегрирования уравнения Кортевега–де Вриза с самосоогласованным источником*, Препринт, ОИЯИ, Дубна, 1988.
- [10] V. K. Mel’nikov, *Inverse Problems*, **8:1** (1992), 133–147.
- [11] J. Leon, A. Latifi, *J. Phys. A*, **23:8** (1990), 1385–1403.
- [12] Г. У. Уразбоев, А. Б. Хасанов, *ТМФ*, **129:1** (2001), 38–54.
- [13] А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев, *Узб. матем. журн.*, 2003, № 2, 53–59.
- [14] P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, “Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, ред. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 125–138.
- [15] A. Yu. Orlov, E. I. Schulman, *Lett. Math. Phys.*, **12:3** (1986), 171–179.

Поступила в редакцию 13.02.2009,
после доработки 6.01.2010