Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Нелинейные режимы прозрачности для трехкомпонентных акустических импульсов в системе электронных и ядерных спинов, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 2, 222–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:52:50

© 2010 г.

С. В. Сазонов^{*†}, Н. В. Устинов[‡]

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННЫХ И ЯДЕРНЫХ СПИНОВ

Исследовано распространение акустических солитонов, состоящих из одной продольной и двух поперечных компонент, в кристалле, содержащем парамагнитные примеси электронных и ядерных спинов, в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю. Взаимодействие электронной спиновой подсистемы с продольным звуком позволило приблизить скорость последнего к скорости поперечных акустических волн, что обеспечило эффективное взаимодействие между всеми составляющими поля упругости посредством ядерной спиновой подсистемы. Выведена трехкомпонентная система материальных и редуцированных волновых уравнений, описывающая этот процесс, и построенные ее солитонные решения в виде стационарных и бризерных импульсов. На их основе изучены особенности нелинейной динамики составляющих поля упругости и выявлены отличия от двухкомпонентной модели. Важной отличительной особенностью рассмотренного случая является существование двух семейств бризеров.

Ключевые слова: солитон, нелинейные интегрируемые уравнения, самоиндуцированная прозрачность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие акустической самоиндуцированной прозрачности (АСИП) в парамагнитных кристаллах [1] дало толчок к выделению пикосекундной гиперзвуковой акустики в отдельную область исследований [2]. Важную роль в этом сыграло то обстоятельство, что акустические импульсы в твердых телах оказались во многом похожи на оптические импульсы. Более того, поиск акустических аналогов оптических явлений зачастую велся целенаправленно. Собственно сам эффект АСИП был обнаружен спустя всего три года после наблюдения оптической самоиндуцированной прозрачности (СИП) [3].

^{*}Российский научный центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия.
E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

[†]Московский авиационный институт (технический университет), Москва, Россия

[‡]Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения, Калининград, Россия. E-mail: n_ustinov@mail.ru

Мощным средством теоретического исследования нелинейных явлений стал в 70-х годах прошлого столетия метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [4], [5]. Его становление и развитие были тесно связаны с задачами нелинейной оптики. Так, нелинейное уравнение Шредингера (НШ), описывающее распространение оптических импульсов в среде с керровской нелинейностью, было первым уравнением, рассмотренным на основе схемы Захарова–Шабата [6]. Нелинейными уравнениями, интегрируемыми в рамках МОЗР, оказались уравнения СИП [7], уравнение синус-Гордон (СГ) [8] и редуцированные уравнения Максвелла–Блоха (РМБ) [9], применявшиеся при изучении явления СИП. Солитонные решения этих уравнений как раз представляют собой импульсы СИП. Отмеченное выше соответствие между оптическими и акустическими импульсами нашло отражение в том, что уравнения НШ, СИП, СГ, РМБ и ряд других интегрируемых уравнений нелинейной оптики возникли также в физической акустике [1], [10].

Большой интерес в настоящее время вызывают оптические задачи, связанные с эффектами нелинейной прозрачности в средах, содержащих квантовые частицы с отличными от нуля постоянными дипольными моментами переходов [11]–[16]. Поле оптического импульса в этом случае не только возбуждает квантовые частицы, но также динамическим образом, за счет эффекта Штарка, сдвигает частоты переходов. По сложившейся терминологии среды, в которых импульсы выполняют обе эти функции, называют штарковскими средами [12]. Оказалось, что некоторые уравнения, описывающие взаимодействие оптических импульсов со штарковскими средами, интегрируемы с помощью МОЗР [11], [16]. Также было обнаружено, что режимы резонансной прозрачности в штарковских средах имеют существенные особенности по сравнению с обычным режимом СИП [13].

Как и оптические импульсы в штарковских средах, акустические импульсы в парамагнитных кристаллах способны выполнять те же самые две функции. Если эффективный спин S парамагнитных примесей превосходит $1/2$, то такой характер взаимодействия находит свое физическое объяснение на основе квадрупольного эффекта Штарка (механизм ван Флека) [17], [18]. Акустическая волна, распространяясь в кристалле, вызывает в нем локальные деформации, которые, в свою очередь, создают градиенты внутрикристаллического электрического поля. Эти градиенты в присутствии внешнего магнитного поля, во-первых, вызывают квантовые переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных примесей, во-вторых, смещают частоты этих переходов вследствие квадрупольного штарк-эффекта. Так как при эффекте Штарка снимается вырождение по модулю проекции эффективно-го спина парамагнитного иона, то энергетические уровни с разными абсолютными значениями проекции S смещаются в поле акустического импульса неодинаково. В результате возникает динамический сдвиг частоты у соответствующих квантовых переходов внутри зеемановских мультиплетов. Если $S = 1/2$, то спин-упругое взаимодействие возникает вследствие модуляции полем деформации тензора Ланде [17], [19]. При этом наряду с переходами между спиновыми подуровнями тоже происходит сдвиг частот.

Таким образом, имеет место оптико-акустическая аналогия, позволяющая говорить об акустических штарковских средах. При этом в качестве парамагнитных примесей, взаимодействующих с акустическими импульсами, могут выступать как

электронные, так и ядерные спины [19], [20]. Исследование нелинейных режимов прозрачности в акустических штарковских средах проводилось в работах [21]–[26]. Как и следовало ожидать, нелинейные уравнения, описывающие динамику импульсов в таких средах, в ряде случаев [24]–[26] интегрируемы с помощью МОЗР.

Акустические импульсы в твердых телах, в отличие от оптических импульсов, могут обладать трехкомпонентной структурой (две поперечные и одна продольная компоненты). Как отмечено выше, эти составляющие поля упругости способны не только вызывать квантовые переходы между уровнями парамагнитных примесей, но и сдвигать их частоты. Таким образом, исследование эффектов акустической прозрачности в штарковских средах приводит к рассмотрению в общем случае трехкомпонентной модели.

Скорость продольного звука в твердых телах обычно существенно превышает скорость поперечного звука [27]. Вследствие этого взаимодействие между соответствующими компонентами акустического поля является слабым. Можно, однако, искусственным образом сблизить значения данных скоростей за счет того обстоятельства, что продольный гиперзвук взаимодействует с зеэмановскими переходами, как правило, сильнее, чем поперечный [17]. Это позволяет замедлить распространение продольной составляющей и приблизить ее скорость к скорости поперечных акустических волн, тем самым значительно усилив взаимодействие между ними [28].

Предположим, что кристалл содержит примеси, обладающие электронными и ядерными спинами. Так как ядерный магнетон μ_n на четыре порядка меньше электронного магнетона μ_e из-за различия в массах ядра и электрона, то на столько же порядков частоты ω_e электронных зеэмановских расщеплений превосходят соответствующие ядерные частоты ω_n . Пусть спектр акустического импульса, распространяющегося перпендикулярно внешнему магнитному полю, лежит ниже частоты электронных зеэмановских расщеплений, захватывая при этом частоты ядерных расщеплений. В таких условиях роль замедлителей скорости продольного гиперзвука можно отвести электронным спинам. При выравнивании продольной и поперечной скоростей все три компоненты поля деформации будут эффективно взаимодействовать между собой через ядерные спины. Данное взаимодействие будет сопровождаться как возбуждением ядерных спинов, так и динамическим смещением частоты переходов между их зеэмановскими подуровнями. Исследованию описанных выше процессов и посвящена настоящая работа.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 предложена физическая модель, описывающая распространение трехкомпонентного акустического импульса в кристалле, содержащем электронные и ядерные спины. На ее основе выведена система материальных и редуцированных волновых уравнений. Пара Лакса этой системы уравнений представлена в разделе 3. Здесь же обсуждены свойства решений пары Лакса и к ней применена техника преобразования Дарбу (ПД) [29]. С ее помощью в разделе 4 построены солитонные решения в виде акустических стационарных импульсов и бризеров, изучение которых позволило установить отличия нелинейной динамики в трехкомпонентной модели от двухкомпонентного штарковского случая, подробно исследованного в работе [26]. В разделе 5 подводятся основные итоги и намечаются перспективные исследования.

2. СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Известно, что наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы с эффективным электронным спином $S = 1$ [17], [18]. Поэтому использование последних представляется предпочтительным с точки зрения возможных экспериментов. Именно в этом случае наиболее эффективно проявляет себя обсужденный выше механизм ван Флека, и, следовательно, существует возможность уравнивать за его счет скорости продольного и поперечного звуков.

Во избежание сильного акустического затухания, вызванного рассеянием когерентных фононов упругого импульса на тепловых фононах, а также их рассеянием на различных дефектах кристаллической решетки, эксперименты по спин-фононному взаимодействию проводятся при температурах жидкого гелия [17], [18]. Ниже будем считать, что это условие выполнено, и не будем учитывать перечисленные механизмы акустического затухания.

Рассмотрим кубический кристалл, содержащий парамагнитные примеси электронных $S = 1$ и ядерных $J = 1/2$ эффективных спинов. Оси x , y и z декартовой системы координат направим вдоль осей симметрии четвертого порядка кристалла. Предположим, что акустический импульс, состоящий из одной продольной и двух поперечных компонент, распространяется вдоль оси x перпендикулярно к внешнему магнитному полю $\mathbf{B}$, параллельному оси z .

Для исследования спин-волновой динамики применим полуклассический подход. В соответствии с ним эволюция поля деформации кристалла подчиняется классическим гамильтоновым уравнениям, а поведение эффективных спинов описывается квантово-механическими уравнениями для электронной $\hat{\rho}^e$ и ядерной $\hat{\rho}^n$ матриц плотности.

Пусть акустический импульс является пространственно одномерным, т.е. динамические переменные зависят только от координаты x и времени t . Тогда гамильтониан H_a поля упругости имеет вид

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{\rho} + 4\rho a_{\perp}^2 (\mathcal{E}_{yx}^2 + \mathcal{E}_{zx}^2) + \rho a_{\parallel}^2 \mathcal{E}_{xx}^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $a_{\parallel}$ и $a_{\perp}$ – скорости продольного и поперечного звуков, ρ – средняя плотность кристалла, $\mathcal{E}_{xx}$, $\mathcal{E}_{yx}$ и $\mathcal{E}_{zx}$ – отличные от нуля компоненты тензора деформации:

$$\mathcal{E}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x},$$

u_x , u_y и u_z – декартовы компоненты вектора $\mathbf{u}$ смещения узлов кристаллической решетки, $\mathbf{p}$ – вектор плотности импульса, соответствующий $\mathbf{u}$. Интегрирование проводится по всему объему кристалла.

В рассматриваемой геометрии операторы Гамильтона для электронных и ядерных спинов определяются следующим образом [17], [21]:

$$\hat{H}_e = \hbar\omega_e \hat{S}_z + \frac{3}{2} G_{11} \hat{S}_x^2 \mathcal{E}_{xx} + G_{44} (\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x) \mathcal{E}_{yx} + G_{44} (\hat{S}_x \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_x) \mathcal{E}_{zx}, \quad (2)$$

$$\hat{H}_n = \hbar\omega_n \hat{J}_z + \hbar\omega_n F_{11} \hat{J}_x \mathcal{E}_{xx} + \hbar\omega_n F_{44} (\hat{J}_y \mathcal{E}_{yx} + \hat{J}_z \mathcal{E}_{zx}). \quad (3)$$

Здесь $\omega_e = g_e \mu_e B / \hbar$, $\omega_n = g_n \mu_n B / \hbar$, g_e и g_n – электронный и ядерный факторы Ланде, $\hbar$ – постоянная Планка, $\hat{S}_j$, $j = x, y, z$, – спиновые матрицы [17]

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\hat{J}_x = \sigma_1/2$, $\hat{J}_y = -\sigma_2/2$, $\hat{J}_z = -\sigma_3/2$, σ_1 , σ_2 , σ_3 – матрицы Паули, G_{11} , G_{44} , F_{11} и F_{44} – компоненты тензоров взаимодействия соответственно электронных и ядерных спинов с акустическим полем (индексы в данных компонентах отвечают обозначениям Фохта [17], [19]). Линейность гамильтониана (3) относительно ядерных спиновых операторов отражает то обстоятельство, что механизм взаимодействия ядерных спинов с акустическим полем обусловлен деформацией последним ядерного фактора Ланде.

Выпишем уравнения для электронной и ядерной матриц плотности:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{e,n}}{\partial t} = [\hat{H}_{e,n}, \hat{\rho}^{e,n}]. \quad (4)$$

В этих уравнениях мы не учитываем процессы релаксации, считая, что все релаксационные времена значительно превышают длительность акустического импульса.

Согласно гамильтонову формализму уравнения для компонент поля деформации имеют вид [21], [23]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{p}} \left(H_a + \int (n_e \langle \hat{H}_e \rangle + n_n \langle \hat{H}_n \rangle) d\mathbf{r} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} \left(H_a + \int (n_e \langle \hat{H}_e \rangle + n_n \langle \hat{H}_n \rangle) d\mathbf{r} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\langle \hat{H}_{e,n} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}^{e,n} \hat{H}_{e,n})$ – квантовые средние электронного и ядерного гамильтонианов, $n_{e,n}$ – концентрации электронных и ядерных спинов.

Пусть τ_s – характерный временной масштаб акустического импульса. Предположим, что он лежит в интервале 10^{-10} – 10^{-7} с. Частота же электронного зеемановского расщепления составляет обычно 10^{11} с $^{-1}$ [17], [18]. Тогда с хорошим запасом выполняется неравенство

$$(\omega_e \tau_s)^2 \gg 1. \quad (6)$$

В силу данного условия в уравнении для электронной матрицы плотности пренебрежем производной по времени, что соответствует приближению адиабатического следования электронных спинов за полем акустического импульса [10], [21], [30]. Тогда $[\hat{H}_e, \hat{\rho}^e] = 0$. Удержав только линейные по полю слагаемые, отсюда и из выражения (2) находим выражения для недиагональных элементов электронной матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \rho_{21}^e &= \frac{W_1 - W_2}{\sqrt{2} \hbar \omega_e} G_{44} \mathcal{E}_{zx}, & \rho_{32}^e &= \frac{W_3 - W_2}{\sqrt{2} \hbar \omega_e} G_{44} \mathcal{E}_{zx}, \\ \rho_{31}^e &= \frac{W_3 - W_1}{2 \hbar \omega_e} \left(\frac{3}{4} G_{11} \mathcal{E}_{xx} - i G_{44} \mathcal{E}_{yx} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где W_j , $j = 1, 2, 3$, – начальные (до прохождения импульса) населенности электронных спиновых уровней.

Из (1)–(3), (5) и (7) получим волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} = \frac{n_n \hbar \omega_n^2 F_{11}^2}{2\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x^2} = \frac{n_n \hbar \omega_n^2 F_{44}^2}{8\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial x^2} = \frac{n_n \hbar \omega_n^2 F_{44}^2}{8\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Здесь

$$\Omega_x = \omega_n F_{11} \mathcal{E}_{xx}, \quad \Omega_y = \omega_n F_{44} \mathcal{E}_{yx}, \quad \Omega_z = \omega_n F_{44} \mathcal{E}_{zx},$$

a_1 и a_2 – скорости продольного и поперечного звуков соответственно, перенормированные за счет взаимодействия электронных спинов с колебаниями кристаллической решетки:

$$a_1 = \sqrt{a_{\parallel}^2 - \frac{9n_e G_{11}^2}{16\rho \hbar \omega_e} (W_1 - W_3)}, \quad a_2 = \sqrt{a_{\perp}^2 - \frac{n_e G_{44}^2}{2\rho \hbar \omega_e} (W_1 - W_3)}, \quad (11)$$

динамические спиновые переменные U , V и W связаны с элементами ядерной матрицы плотности $\hat{\rho}^n$ соотношениями

$$U = \rho_{21}^n + \rho_{12}^n, \quad V = i(\rho_{21}^n - \rho_{12}^n), \quad W = \rho_{22}^n - \rho_{11}^n.$$

При этом равенства (3) и (4) дают систему материальных уравнений блоховского типа для спиновых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -(\omega_n + \Omega_z)V + \Omega_y W, \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (\omega_n + \Omega_z)U - \Omega_x W, \quad (13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \Omega_x V - \Omega_y U. \quad (14)$$

Из этих уравнений следует, что продольная компонента гиперзвука Ω_x и его поперечная составляющая Ω_y возбуждают квантовый переход между ядерными зеемановскими подуровнями, а другая поперечная составляющая Ω_z динамически изменяет частоту данного перехода. В этом здесь и проявляются свойства акустической штарковской среды.

Как было отмечено в предыдущем разделе, для эффективного нелинейного взаимодействия между компонентами упругого импульса необходима относительная близость скоростей продольного и поперечного звуков. Положив

$$a = a_1 = a_2, \quad (15)$$

из соотношений (11) получим условие

$$a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2 = \frac{n_e (W_1 - W_3)}{2\rho \hbar \omega_e} \left(\frac{9}{8} G_{11}^2 - G_{44}^2 \right). \quad (16)$$

Взяв $|G_{11}| \sim 10^{-13} \text{эрг} \gg |G_{44}|$ [31], $\rho \sim 1 \text{г/см}^3$, $\omega_e \sim 10^{11} \text{с}^{-1}$, $a_{\parallel} \approx 5 \cdot 10^5 \text{см/с}$, $a_{\perp} \approx 3 \cdot 10^5 \text{см/с}$, имеем $n_e \sim 10^{21} \text{см}^{-3}$, что составляет примерно один процент от концентрации атомов матрицы. При таких концентрациях и температурах жидкого гелия все еще с хорошей точностью можно пренебречь затуханием гиперзвука, вызванным спин-фононной релаксацией [28]. В дальнейшем будем считать, если особо не оговорено противное, что условие (16) выполняется.

Введем безразмерный параметр

$$\eta = \frac{n_n \hbar \omega_n F^2}{\rho a^2},$$

где $F = \max(|F_{11}|, |F_{44}|)$, $a \sim a_{\perp}$. Взяв $\omega_n \sim 10^7 \text{с}^{-1}$, $F \sim 10$, $n_n \sim n_e$ и приведенные выше оценки для скорости звука, найдем, что $\eta \sim 10^{-5}$. Малость параметра η позволяет применить к волновым уравнениям (8)–(10) приближение однонаправленного распространения [32]. Для этого введем “локальное” время $\tau = t - x/a$ и “медленную” координату $\zeta = \eta x$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau}, & \frac{\partial}{\partial x} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\eta}{a} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы пренебрегли слагаемым порядка η^2 . Так как правые части уравнений (8)–(10) пропорциональны η , то в них следует положить

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Проинтегрировав волновые уравнения, получившиеся при этом, по τ с учетом нулевых значений составляющих поля упругости и их производных на бесконечности и возвратившись к исходным независимым переменным, придем к уравнениям

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} = \beta_{\parallel} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} = \beta_{\perp} \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} = \beta_{\perp} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (19)$$

где

$$\beta_{\parallel} = \frac{n_n \hbar \omega_n^2 F_{11}^2}{4 \rho a^3}, \quad \beta_{\perp} = \frac{n_n \hbar \omega_n^2 F_{44}^2}{16 \rho a^3}.$$

Система уравнений (12)–(14), (17)–(19) описывает динамику трехкомпонентных акустических импульсов в парамагнитном кристалле, находящемся во внешнем магнитном поле, в условиях, когда скорости продольного и поперечного звуков уравнены. Это предполагает наличие дополнительной (электронной) спиновой подсистемы и геометрию Фохта. Если $\beta_{\perp} = 0$, то можно положить $\Omega_y = \Omega_z = 0$. В этом случае данная система переходит в уравнения РМБ [9]. Если $\beta_{\parallel} = 0$, то, положив

$\Omega_x = 0$, получим двухкомпонентные уравнения РМБ (ДРМБ), подробно изученные в работе [26]. В дальнейшем систему (12)–(14), (17)–(19) будем называть трехкомпонентными уравнениями РМБ (ТРМБ).

Единственное отличие физической модели, использованной в работе [26], от модели, предложенной здесь, состоит в отсутствии дополнительной электронной спиновой подсистемы. Это отличие является принципиальным, поскольку не позволяет сделать эффективным взаимодействие между продольной и поперечными составляющими поля упругости, из-за чего рассмотрение в работе [26] было ограничено поперечными (т.е. двухкомпонентными) акустическими импульсами. Сравнение с результатами, полученными там, покажет роль продольной компоненты в совместной динамике полей деформации.

Уравнения ТРМБ обладают интегралом движения

$$(\omega_n + \Omega_z)^2 + \Omega_y^2 + \frac{\beta_\perp}{\beta_\parallel} \Omega_x^2 = \omega_0^2(1 + f(\tau))^2, \quad (20)$$

где $f(\tau)$ – некоторая функция, вид которой определяется условиями на входе в кристалл акустического импульса. Следствием существования этого интеграла являются ограничения на амплитуды компонент поля деформации.

Замена переменных $\{t, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\} \rightarrow \{t', \Omega'_x, \Omega'_y, \Omega'_z\}$, где

$$t' = \int_0^\tau |1 + f(\tau')| d\tau' + \frac{x}{a}, \quad (21)$$

$$\Omega'_x = \frac{\Omega_x}{|1 + f(\tau)|}, \quad \Omega'_y = \frac{\Omega_y}{|1 + f(\tau)|}, \quad \Omega'_z = \frac{\omega_n + \Omega_z}{|1 + f(\tau)|} - \omega_n,$$

формально сохраняет вид системы ТРМБ. С помощью этой замены рассмотрение сводится без потери общности к случаю $f(\tau) = 0$, который назовем установившимся режимом распространения.

Заметим, что система, эквивалентная уравнениям ТРМБ (12)–(14), (17)–(19), возникала в работе [33] при рассмотрении задачи о распространении акустического импульса вдоль магнитного поля (геометрия Фарадея) в кристалле орторомбической симметрии с парамагнитными вкраплениями. При этом считалось, что линейные скорости всех компонент поля деформации равны друг другу, но постоянные спин-фононной связи для тех же компонент различны. Как мы подчеркивали выше, скорости продольного и поперечного звуков в кристаллах заметно различаются, и всегда $a_\parallel > a_\perp$. В геометрии Фарадея продольная компонента сдвигает частоту перехода, а обе поперечные возбуждают данный переход. Как следствие, невозможно уменьшить скорость продольной компоненты звука. Поэтому с физической точки зрения модель, предложенная в работе [33], представляется несколько идеалистической. В нашем случае рассмотрен кубический кристалл, в котором вдоль осей симметрии четвертого порядка скорости обеих поперечных компонент равны друг другу. Кроме того, импульс распространяется поперек магнитного поля (геометрия Фохта), взаимодействуя нерезонансно (см. неравенство (6)) с эффективными спинами $S = 1$ электронных оболочек примесных парамагнитных ионов. В таких условиях как продольная, так и обе поперечные компоненты возбуждают квантовые переходы между уровнями зеемановского триплета. Вследствие этого возникает

принципиальная возможность для уравнивания скоростей продольного и поперечного звуков (см. условие (16)), поскольку обычно $G_{11}^2 \gg G_{44}^2$. В этом и состоит роль электронной спиновой подсистемы. Ядерные же спины вступают во взаимодействие с тремя компонентами акустического импульса, обладающими практически одинаковыми скоростями.

3. ПАРА ЛАКСА И ПД

Система ТРМБ (12)–(14), (17)–(19) представима в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial \hat{L}(\lambda)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{A}(\lambda)}{\partial t} + [\hat{L}(\lambda), \hat{A}(\lambda)] = 0, \quad (22)$$

где λ – спектральный параметр, а матрицы $\hat{L}(\lambda)$ и $\hat{A}(\lambda)$ определены следующим образом:

$$\hat{L}(\lambda) = r \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_+ \Omega_x}{\sqrt{k}} & \lambda_-(\omega_n + \Omega_z + i\Omega_y) \\ \lambda_-(\omega_n + \Omega_z - i\Omega_y) & \frac{\lambda_+ \Omega_x}{\sqrt{k}} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(\lambda) = s \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+ U}{\sqrt{k}} & -\lambda_-(W + iV) \\ -\lambda_-(W - iV) & -\frac{\lambda_+ U}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} - \frac{\hat{L}(\lambda)}{a}.$$

Здесь использованы обозначения

$$r = \frac{\lambda_+}{8\sqrt{k}\lambda}, \quad s = \frac{i}{2} \frac{\beta_\perp \sqrt{k} \lambda_+}{\lambda^2 - 2i(k+1)\lambda - (k-1)^2},$$

$$\lambda_\pm = \lambda \pm i(k-1), \quad k = \frac{\beta_\parallel}{\beta_\perp} = \left(\frac{2F_{11}}{F_{44}} \right)^2 > 0.$$

Без потери общности мы всюду считаем квадратные корни арифметическими.

Уравнение (22) есть условие совместности переопределенной системы линейных уравнений (пары Лакса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \hat{L}(\lambda) \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \hat{A}(\lambda) \psi, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\psi = \psi(x, t, \lambda) = (\psi_1, \psi_2)^T$ – векторное решение.

Обсудим некоторые свойства решений пары Лакса (23). Можно показать, что выполняются равенства

$$C_1 \hat{L} \left(-\frac{(k-1)^2}{\lambda} \right) = \hat{L}(\lambda) C_1, \quad C_1 \hat{A} \left(-\frac{(k-1)^2}{\lambda} \right) = \hat{A}(\lambda) C_1, \quad (24)$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Их следствием является связь между решениями пары Лакса при различных значениях спектрального параметра: если $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ – решение при $\lambda = \mu$, то решение пары Лакса при $\lambda = -(k-1)^2/\mu$ можно выбрать в виде $\psi = C_1\varphi = (\varphi_1, -\varphi_2)^T$.

Кроме того, так как переменные $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ и U, V, W вещественные, то матрицы $\hat{L}(\lambda)$ и $\hat{A}(\lambda)$ удовлетворяют условиям

$$C_2\hat{L}^*(-\lambda^*) = \hat{L}(\lambda)C_2, \quad C_2\hat{A}^*(-\lambda^*) = \hat{A}(\lambda)C_2, \quad (25)$$

где

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствием условий (25) будет следующая связь между решениями: если $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ – решение системы (23) со спектральным параметром μ , то вектор-столбец $C_2\varphi^* = (\varphi_2^*, -\varphi_1^*)^T$ является решением этой же системы с $\lambda = -\mu^*$.

Предположим, что

$$\mu = (k-1)e^{i\theta}, \quad (26)$$

где θ – вещественная постоянная. Отмеченные выше связи между решениями пары Лакса позволяют взять ее решение φ при $\lambda = \mu$ в таком виде, чтобы компоненты данного решения подчинялись условию

$$\varphi_1 = \varphi_2^*. \quad (27)$$

Как известно, решения нелинейных уравнений, интегрируемых в рамках МОЗР, можно найти в явном виде, используя алгебраические методы теории солитонов. С этой целью применим к уравнениям ТРМБ технику ПД [29]. Особенность этой техники состоит в том, что она позволяет получить бесконечную последовательность решений интегрируемой системы уравнений вместе с соответствующими решениями пары Лакса.

Пусть вектор-столбец $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ является решением системы (23) при $\lambda = \mu$. Пара Лакса (23) ковариантна относительно ПД $\{\psi_1, \psi_2, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, U, V, W\} \rightarrow \{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\Omega}_x, \tilde{\Omega}_y, \tilde{\Omega}_z, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}\}$, в котором преобразованные величины определены следующим образом:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_- \psi_1 & \lambda_+ \psi_2 \\ \mu_- \varphi_1 & \mu_+ \varphi_2 \end{vmatrix}}{\mu_+ \varphi_2}, \quad \tilde{\psi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_- \psi_2 & \lambda_+ \psi_1 \\ \mu_- \varphi_2 & \mu_+ \varphi_1 \end{vmatrix}}{\mu_+ \varphi_1}, \quad (28)$$

$$\tilde{\Omega}_x = -\Omega_x + \frac{2ik}{k-1} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad (29)$$

$$\tilde{\Omega}_y = \Omega_y - \frac{\sqrt{k}}{k-1} \frac{\mu_-}{\mu_+} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right), \quad (30)$$

$$\tilde{\Omega}_z = \Omega_z - \frac{i\sqrt{k}}{k-1} \frac{\mu_-}{\mu_+} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right), \quad (31)$$

$$\tilde{U} = -U + \frac{2i}{\beta_\perp(k-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \ln \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad (32)$$

$$\tilde{V} = V - \frac{\sqrt{k}}{\beta_{\perp}(k-1)} \frac{\mu_{-}}{\mu_{+}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right), \quad (33)$$

$$\tilde{W} = W - \frac{i\sqrt{k}}{\beta_{\perp}(k-1)} \frac{\mu_{-}}{\mu_{+}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right), \quad (34)$$

где

$$\mu_{\pm} = \mu \pm i(k-1).$$

Равенства (29)–(34) дают новое (“одетое”) решение системы ТРМБ (12)–(14), (17)–(19). Для того чтобы оно было вещественным, на спектральный параметр μ векторного решения φ , с которым проведено ПД, и на его компоненты необходимо наложить условия (26) и (27). Из представленных формул видно, что случай $k = 1$ является особым. Он будет обсужден в конце этого раздела.

Проведение итераций ПД (28)–(34) даст бесконечную последовательность новых решений уравнений ТРМБ. Пусть $\varphi^{(m)} = (\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)})^T$, $m = 1, \dots, M$, – векторные решения системы (23) при $\lambda = \mu_m$. Используя эти решения при проведении последовательности из M ПД (28)–(34), получим следующие выражения:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{N^{(1)}}{N_{1,1}^{(1)}}, \quad \tilde{\psi}_2 = \frac{N^{(2)}}{N_{1,1}^{(2)}},$$

$$\tilde{\Omega}_x = (-1)^M \Omega_x + \frac{2ik}{k-1} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{N_{1,1}^{(2)}}{N_{1,1}^{(1)}}, \quad (35)$$

$$\tilde{\Omega}_y = \Omega_y - \frac{\sqrt{k}}{k-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_{1,2}^{(1)}}{N_{1,1}^{(1)}} - \frac{N_{1,2}^{(2)}}{N_{1,1}^{(2)}} \right), \quad (36)$$

$$\tilde{\Omega}_z = \Omega_z - \frac{i\sqrt{k}}{k-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_{1,2}^{(1)}}{N_{1,1}^{(1)}} + \frac{N_{1,2}^{(2)}}{N_{1,1}^{(2)}} \right), \quad (37)$$

$$\tilde{U} = (-1)^M U + \frac{2i}{\beta_{\perp}(k-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \ln \frac{N_{1,1}^{(2)}}{N_{1,1}^{(1)}}, \quad (38)$$

$$\tilde{V} = V - \frac{\sqrt{k}}{\beta_{\perp}(k-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{N_{1,2}^{(1)}}{N_{1,1}^{(1)}} - \frac{N_{1,2}^{(2)}}{N_{1,1}^{(2)}} \right), \quad (39)$$

$$\tilde{W} = W - \frac{i\sqrt{k}}{\beta_{\perp}(k-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{N_{1,2}^{(1)}}{N_{1,1}^{(1)}} + \frac{N_{1,2}^{(2)}}{N_{1,1}^{(2)}} \right), \quad (40)$$

где

$$N^{(1)} = \begin{vmatrix} \lambda_{-}^M \psi_1 & \lambda_{-}^{M-1} \lambda_{+} \psi_2 & \lambda_{-}^{M-2} \lambda_{+}^2 \psi_1 & \dots & \lambda_{+}^M \psi_K \\ \mu_{1,-}^M \varphi_1^{(1)} & \mu_{1,-}^{M-1} \mu_{1,+} \varphi_2^{(1)} & \mu_{1,-}^{M-2} \mu_{1,+}^2 \varphi_1^{(1)} & \dots & \mu_{1,+}^M \varphi_K^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{M,-}^M \varphi_1^{(M)} & \mu_{M,-}^{M-1} \mu_{M,+} \varphi_2^{(M)} & \mu_{M,-}^{M-2} \mu_{M,+}^2 \varphi_1^{(M)} & \dots & \mu_{M,+}^M \varphi_K^{(M)} \end{vmatrix},$$

$\mu_{m,\pm} = \mu_m \pm i(k-1)$, $m = 1, \dots, M$, $K = (3 + (-1)^{M-1})/2$, $N^{(1)}$ переходит в $N^{(2)}$ при замене нижних индексов $1 \leftrightarrow 2$ у компонент векторных решений, $N_{1,1}^{(j)}$ – минор элемента в первой строке и первом столбце определителя $N^{(j)}$, $N_{1,2}^{(j)}$ – минор элемента в первой строке и втором столбце определителя $N^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Переменные $\tilde{\Omega}_x, \tilde{\Omega}_y, \tilde{\Omega}_z$ и $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$ вещественны, если на спектральные параметры и решения наложены условия

$$\mu_{2m-1} = -\mu_{2m}^*, \quad \varphi^{(2m-1)} = (\varphi_2^{(2m)*}, -\varphi_1^{(2m)*})^T, \quad (41)$$

где $m \leq L$, L – неотрицательное целое число, меньшее или равное $M/2$, и

$$\mu_m = (k-1)e^{i\theta_m}, \quad \theta_m \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1^{(m)} = \varphi_2^{(m)*}, \quad (42)$$

если $2L+1 \leq m \leq M$. Эти условия являются следствием выполнения равенств (24) и (25).

Формулы ПД (28)–(34) не пригодны в случае $k = 1$. Однако вещественные решения уравнений ТРМБ при $k = 1$ можно получить с помощью итерационных формул (35)–(40), если число итераций M четное и выполняются условия (41).

4. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Построим с помощью техники ПД солитонные решения системы ТРМБ (12)–(14), (17)–(19). Для этого в качестве ее исходного решения возьмем нулевой фон: $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$, $U = V = 0$, $W = W_0$, где W_0 – вещественная постоянная. Выражения для компонент решения φ пары Лакса (23) при $\lambda = \mu$ в этом случае имеют вид

$$\varphi_1 = c_1 e^{\gamma/2} + c_2 e^{-\gamma/2}, \quad \varphi_2 = c_1 e^{\gamma/2} - c_2 e^{-\gamma/2}. \quad (43)$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные,

$$\gamma = \frac{\omega_n \mu_+ \mu_-}{4\sqrt{k}\mu} \left(t - \frac{x}{a} \right) - \frac{i\beta_\perp \sqrt{k} \mu_+ \mu_- W_0 x}{\mu^2 - 2i(k+1)\mu - (k-1)^2}.$$

Пусть спектральный параметр μ и компоненты решения φ удовлетворяют условиям (26), (27). Определим для удобства вещественный параметр t_p следующим образом:

$$t_p = \frac{2\sqrt{k}}{\omega_n(k-1)\cos\theta}, \quad (44)$$

и, используя сдвиг по переменной t (или x), положим $c_2 = ic_1$ без потери общности. Тогда подстановка (43) в формулы (29)–(34) даст такие выражения для вещественного односолитонного решения системы ТРМБ:

$$\Omega_x = \frac{2k}{t_p(k-1)\operatorname{ch}\gamma}, \quad \Omega_y = \frac{\omega_n(1+q)\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{ch}^2\gamma}, \quad \Omega_z = -\frac{\omega_n(1+q)}{\operatorname{ch}^2\gamma}, \quad (45)$$

$$U = \frac{4kW_0}{\omega_n t_p(k-1)(1+k+q(k-1))\operatorname{ch}\gamma}, \quad (46)$$

$$V = \frac{2k(1+q)W_0\operatorname{sh}\gamma}{(1+k+q(k-1))\operatorname{ch}^2\gamma}, \quad W = W_0 - \frac{2k(1+q)W_0}{(1+k+q(k-1))\operatorname{ch}^2\gamma}, \quad (47)$$

где

$$\gamma = \frac{t - x/v}{t_p}, \quad v = a \left(1 - \frac{2a\beta_{\parallel} W_0}{\omega_n(1 + k + q(k-1))} \right)^{-1},$$

$$q = \pm \sqrt{1 - \frac{4k}{\omega_n^2 t_p^2 (k-1)^2}}.$$

Полученное решение представляет собой стационарный импульс и имеет один свободный параметр t_p (без учета сдвигов по независимым переменным). Как видно из выражений (47), значение постоянной W_0 , $|W_0| \leq 1$, равно инверсии населенностей ядерных спиновых подуровней до и после прохождения импульса.

Параметр t_p определяет длительность импульса, причем с заданной длительностью существуют два импульса, соответствующие противоположным знакам в коэффициенте q . Как следует из формулы (44), свободный параметр удовлетворяет условию

$$|t_p| \geq t_c = \frac{2\sqrt{k}}{\omega_n|1-k|},$$

т.е. длительность стационарных солитонов, формирующихся в рассматриваемой штарковской среде, не может быть сколь угодно малой. Эти особенности существенно отличаются трехкомпонентный случай от двухкомпонентного, изученного в работе [26].

Важной особенностью построенного решения является то, что у компоненты Ω_z есть асимметрия по полярности в отличие от других компонент поля деформации. Действительно, так как $|q| \leq 1$, то $\Omega_z < 0$. Как видно из уравнений (12), (13), знак компоненты Ω_z таков, что частота перехода динамически понижается при прохождении импульса. Такого рода асимметрия для компонент, сдвигающих квантовые уровни, является общей для оптических и акустических штарковских сред и имеет место как для однокомпонентных импульсов [12], [15], [24], так и для двухкомпонентных импульсов [13], [16], [25], [26], причем даже в тех случаях, когда соответствующие уравнения не обладают интегралом, подобным (20).

Скорость солитона (45)–(47) зависит от величины параметра t_p и знака q и лежит в интервале, ограниченном значениями $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$, где

$$v_{\parallel, \perp} = a \left(1 - \frac{a\beta_{\parallel, \perp} W_0}{\omega_n} \right)^{-1}.$$

В нормально заселенной среде, т.е. при $W_0 < 0$, в случае $k > 1$ ($k < 1$) выполняются неравенства $v_{\parallel} < v_{\perp} < a$ (соответственно $a > v_{\parallel} > v_{\perp}$). Полная инверсия спиновых подуровней ($W(\gamma = 0) = -W_0$) имеет место в нефизическом пределе $|t_p| \rightarrow \infty$ при $q > 0$. При этом $\Omega_z(\gamma = 0) = -2\omega_n$, т.е. спиновые подуровни в центре импульса меняются местами за счет штарковского сдвига частоты перехода. В двухкомпонентном же случае скорость импульса в нормально заселенной среде ограничена сверху линейной скоростью, а спиновые подуровни меняются местами в центре импульса при любой его длительности [26].

Обсудим некоторые отличия импульсов одинаковой длительности, но с разными знаками у коэффициента q . Если $k < 1$, то более сильное замедление в скорости

распространения и более сильное возбуждение квантовых частиц имеют место при $q > 0$. Если $k > 1$, то более сильное замедление происходит при $q < 0$, а более сильное возбуждение – при $q > 0$. Что касается амплитуд компонент поля деформации, то у продольной компоненты они одинаковы, а у поперечных компонент амплитуды больше в случае, когда происходит более сильное возбуждение частиц.

Так как уравнения РМБ и ДРМБ являются частными случаями системы ТРМБ, то их решения могут быть получены из равенств (45)–(47). Так, в пределе $k \rightarrow \infty$ (т.е. $\beta_{\perp} \rightarrow 0$) при $q < 0$ возникает односолитонное решение уравнений РМБ [9]. Если $k \rightarrow 0$ ($\beta_{\parallel} \rightarrow 0$) при $q > 0$, то равенства (45)–(47) переходят в решение уравнений ДРМБ [26]. Знаки q в этих пределах соответствуют более сильному замедлению в скорости распространения, что найдет отражение в дальнейшем при рассмотрении бризерного импульса. Предел $k \rightarrow \infty$ при $q > 0$ физического смысла не имеет, поскольку в этом случае компоненты $\mathcal{E}_{yx}$ и $\mathcal{E}_{zx}$ поля деформации становятся неограниченными.

Выражения (45) описывают акустический импульс, распространяющийся в установившемся режиме (т.е. $f(\tau) = 0$ в интеграле (20)). Используя замену переменных, обратную к (21), из них можно получить выражения, соответствующие неустановившемуся режиму распространения. Если $f(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то они описывают выделение из некоторого начального профиля импульса вида (45) и импульса компоненты Ω_z , который движется со скоростью a и имеет форму, полностью определенную функцией $f(\tau)$. Именно из-за такого поведения случай $f(\tau) = 0$ был ранее назван установившимся режимом.

Поскольку решение (45)–(47) является стационарным, то из него можно получить решение нередуцированной системы (8)–(10), (12)–(14). Для этого при выполнении условия (15) скорость импульса следует определить как

$$v = \pm a \sqrt{1 + \frac{4a\beta_{\parallel}W_0}{\omega_n(1+k+q(k-1))}}.$$

Если же скорости продольного и поперечного звуков не равны, $a_1 \neq a_2$, то в формулах (45)–(47) следует положить

$$v = \pm a_1 \sqrt{1 + \frac{4\beta_{\parallel}a_2^3W_0}{a_1^2\omega_n(1+k+q(k-1))}}, \quad q = -\frac{k+1}{k-1} + \frac{4(k\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})a_2^3W_0}{(k-1)(a_1^2 - a_2^2)\omega_n}, \quad (48)$$

$$k = \frac{r_2 \pm (a_1^2 - a_2^2)\sqrt{r_3}}{r_1}, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= 4t_p^2 a_2^3 \beta_{\perp} W_0 (2a_2^3 \beta_{\perp} W_0 - (a_1^2 - a_2^2)\omega_n), \\ r_2 &= 2t_p^2 a_2^3 W_0 (4a_2^3 \beta_{\parallel} \beta_{\perp} W_0 - (a_1^2 - a_2^2)(\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})\omega_n) - (a_1^2 - a_2^2)^2 (1 + \omega_n^2 t_p^2), \\ r_3 &= 4t_p^2 a_2^3 W_0 ((a_1^2 - a_2^2)(\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})\omega_n (1 + \omega_n^2 t_p^2) + a_2^3 W_0 ((\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})^2 \omega_n^2 t_p^2 - 4\beta_{\parallel} \beta_{\perp})) + \\ &\quad + (a_1^2 - a_2^2)^2 (1 + \omega_n^2 t_p^2)^2, \end{aligned}$$

согласование между знаками в определениях v и k не предполагается.

Если формально рассмотреть предел $|a_1^2 - a_2^2| \rightarrow \infty$ в выражении (49), то получим $k \rightarrow 0$ в случае знака “+” и $k \rightarrow \infty$ в случае знака “-”. При этом соответственно имеем $q \rightarrow 1$ и $q \rightarrow -1$. Как ранее было установлено, формулы (45)–(47) переходят в результате таких предельных процедур в решения уравнений ДРМБ и РМБ. Это показывает, что, если линейные скорости отличаются существенно, то продольная и поперечные составляющие поля упругости практически не взаимодействуют между собой, и импульс (45)–(49) является либо сугубо поперечным, либо сугубо продольным. В этой связи заметим, что пределы $\beta_\perp \rightarrow 0$ и $\beta_\parallel \rightarrow 0$ в формуле (49) тоже приводят к решениям уравнений РМБ и ДРМБ соответственно.

В случае $k = 1$ уравнения ТРМБ не имеют стационарного решения, убывающего на бесконечности. Это нетрудно показать непосредственным интегрированием.

Для построения двухсолитонного решения, описывающего столкновение двух солитонов вида (45)–(47), необходимо провести два ПД, стартовав с нулевого фона. При этом решения, с которыми проводились ПД, и их спектральные параметры должны подчиняться условиям вида (42). Единственным результатом столкновения солитонов будут их сдвиги.

Перейдем теперь к рассмотрению бризерного решения уравнений ТРМБ. Для его получения воспользуемся формулами (35)–(40) при $M = 2$. Взяв в качестве исходного решения нулевой фон и наложив условия (41), после сдвигов по переменным t и x получим следующие выражения:

$$\Omega_x = \frac{2ik}{k-1} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\delta_1^*}{\delta_1}, \quad \Omega_y = \sqrt{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \frac{\delta_2^*}{\delta_1^*} \right), \quad \Omega_z = i\sqrt{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{\delta_2^*}{\delta_1^*} \right), \quad (50)$$

$$U = \frac{2i}{\beta_\perp(k-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \ln \frac{\delta_1^*}{\delta_1}, \quad V = \frac{\sqrt{k}}{\beta_\perp} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \frac{\delta_2^*}{\delta_1^*} \right), \quad (51)$$

$$W = W_0 + \frac{i\sqrt{k}}{\beta_\perp} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{\delta_2^*}{\delta_1^*} \right), \quad (52)$$

где

$$\delta_1 = (|\mu_1|^2 + 2\mu_I(k-1) + (k-1)^2)((|\mu_1|^2 - (k-1)^2) \operatorname{ch} \gamma_R + 2i\mu_R(k-1) \cos \gamma_I),$$

$$\delta_2 = 4i\mu_R(|\mu_1|^2 - (k-1)^2)(\operatorname{sh} \gamma_R - i \sin \gamma_I),$$

$$\mu_1 = \mu_R + i\mu_I,$$

$$\gamma_R = \frac{t - x/v_g}{t_b}, \quad \gamma_I = \omega_b \left(t - \frac{x}{v_{ph}} \right),$$

$$t_b^{-1} = \frac{\omega_n \mu_R (|\mu_1|^2 + (k-1)^2)}{4\sqrt{k} |\mu_1|^2}, \quad \omega_b = \frac{\omega_n \mu_I (|\mu_1|^2 - (k-1)^2)}{4\sqrt{k} |\mu_1|^2}, \quad (53)$$

$$v_g = a \left(1 - at_b \beta_\perp \sqrt{k} W_0 \frac{s_1}{s_3} \right)^{-1}, \quad v_{ph} = a \left(1 + \frac{a\beta_\perp \sqrt{k} W_0}{\omega_b} \frac{s_2}{s_3} \right)^{-1},$$

$$s_1 = 2\mu_R(|\mu_1|^2(k+1) + (k+1 - 2\mu_I)(k-1)^2),$$

$$s_2 = (|\mu_1|^2 - (k-1)^2)(|\mu_1|^2 - 2\mu_I(k+1) + (k-1)^2),$$

$$s_3 = (\mu_R^2 - \mu_I^2 + 2\mu_I(k+1) - (k-1)^2)^2 + 4\mu_R^2(\mu_I - k - 1)^2.$$

Это решение имеет два вещественных свободных параметра μ_R и μ_I , которые определяют длительность t_b бризера и основную частоту ω_b его спектра. Так как

$s_1/\mu_R > 0$, то групповая скорость v_g бризера меньше линейной скорости a в нормально заселенной среде. Видно, что полученные формулы дают решение системы ТРМБ и в случае $k = 1$.

В качестве свободных параметров бризера можно взять длительность t_b и частоту ω_b . Тогда из фоормул (53) находим

$$\mu_R = \frac{2\sqrt{k} + R_1}{\omega_n t_b}, \quad \mu_I = \frac{2\sqrt{k}(2\sqrt{k} + R_1)}{\omega_n R_1} \omega_b,$$

где

$$R_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R_2 - 4k(\omega_b^2 t_b^2 - 1) - (k-1)^2 \omega_n^2 t_b^2},$$

$$R_2 = \sqrt{(4k(\omega_b^2 t_b^2 - 1) + (k-1)^2 \omega_n^2 t_b^2)^2 + 64k^2 \omega_b^2 t_b^2}.$$

Групповая v_g и фазовая v_{ph} скорости бризера в терминах новых свободных параметров запишутся как

$$v_g = a \left(1 - at_b \beta_{\perp} W_0 \frac{S_1}{S_3} \right)^{-1}, \quad v_{ph} = a \left(1 + \frac{a \beta_{\perp} W_0}{\omega_b} \frac{S_2}{S_3} \right)^{-1},$$

где

$$S_1 = \omega_b t_b ((\omega_n^2 - \omega_b^2) t_b^2 - 1) R_1^2 + ((\omega_n^2 + \omega_b^2) t_b^2 + 1) ((k+1) \omega_n t_b R_1 + 4k \omega_b t_b),$$

$$S_2 = ((\omega_n^2 + \omega_b^2) t_b^2 + 1) R_1^2 - \omega_b t_b ((\omega_n^2 - \omega_b^2) t_b^2 - 1) ((k+1) \omega_n t_b R_1 + 4k \omega_b t_b),$$

$$S_3 = 2((\omega_n - \omega_b)^2 t_b^2 + 1) ((\omega_n + \omega_b)^2 t_b^2 + 1) R_1.$$

Важной отличительной особенностью трехкомпонентного случая является существование двух семейств бризеров. Выражения для бризеров, принадлежащих разным семействам, но имеющих одинаковые длительность t_b и частоту ω_b , отличаются знаком в определении коэффициента R_1 . Графики компонент поля деформации и инверсии населенности для бризеров с $R_1 > 0$ и $R_1 < 0$ представлены на рис. 1 и 2. Значения параметров μ_R и μ_I соответствуют $t_b = 20/\omega_n$ и $\omega_b = 0.99\omega_n$.

Если $|\omega_b| \sim \omega_n$, то при $R_1 > 0$ может иметь место сильное возбуждение квантовых уровней, тогда как в случае $R_1 < 0$ возбуждение является слабым (ср. рис. 1г и 2г). Так как амплитуды компонент Ω_x и Ω_y , вызывающих переходы между спиновыми подуровнями, на рис. 1 даже меньше, чем на рис. 2, то можно предположить, что это отличие между семействами бризеров связано с фазами этих компонент и фазами блоховских переменных U и V . Как видно из рис. 1а, б и 2а, б, фаза компоненты Ω_x примерно на $\pi/2$ больше фазы компоненты Ω_y при $R_1 > 0$ и примерно на столько же меньше при $R_1 < 0$. Разность фаз U и V одинакова, и в первом случае она соответствует свободному движению вектора Блоха в отсутствие внешних полей (см. уравнения (12)–(14)). Если $R_1 < 0$, то фазы переменных Ω_x и U (а также Ω_y и V) противоположны. Если $R_1 > 0$, то фазы Ω_x и V совпадают на переднем фронте бризера и противоположны на заднем фронте. У переменных Ω_y и U ситуация обратная: их фазы противоположны на переднем фронте и совпадают на заднем. Это определяет знаки слагаемых в правой части уравнения (14) и, следовательно, степень возбуждения квантовых частиц.

Рис. 1. Профили компонент поля деформации (а)–(в) и инверсии населенности (г) в случае $R_1 > 0$ при $k = 2$, $W_0 = -1$, $\mu_R \approx 0.275$ и $\mu_I \approx 5.773$. Координата x произвольна.

Заметим, что сильное возбуждение среды, которое вызывает бризер, изображенный на рис. 1, сопровождается замедлением в его скорости распространения. У бризеров с $R_1 < 0$ групповая скорость v_g слабо отличается от линейной скорости a . Как следует из графиков, отношение амплитуд компонент Ω_x и Ω_y в случае $R_1 > 0$ примерно равно k , тогда как при $R_1 < 0$ эти амплитуды примерно равны.

Графики модулей фурье-спектров

$$F(f, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu t} f dt$$

одной из компонент поля деформации, вызывающей квантовые переходы, и компоненты, сдвигающей частоту перехода, бризерного решения (50)–(52) представлены на рис. 3. Из них, а также из временных зависимостей, которые изображены на

Рис. 2. Профили компонент поля деформации (а)–(в) и инверсии населенности (г) в случае $R_1 < 0$ при $k = 2$, $W_0 = -1$, $\mu_R \approx 0.008$ и $\mu_I \approx -0.173$. Координата x произвольна.

рис. 1 и 2, следует, что спектральный состав переменных Ω_x , Ω_y и U , V содержит основную гармонику, соответствующую несущей частоте ω_b , и ее нечетные гармоники. Переменные Ω_z и W содержат в фурье-спектре нулевую гармонику и другие четные гармоники, причем у Ω_z вторая гармоника ярко выражена (см. рис. 3б).

Как и для стационарных импульсов, у бризеров тоже есть асимметрия по полярности компоненты Ω_z : ее нулевая гармоника (или временная площадь) имеет знак, при котором частота перехода динамически понижается (см. рис. 1в и 2в). Именно поэтому наиболее сильное возбуждение среды может происходить только при $\omega_b < \omega_n$, когда бризер может оказаться эффективно (т.е. в среднем за время взаимодействия) в резонансе с квантовыми частицами. Можно сказать, что в этом случае компонента Ω_z втягивает бризер в резонанс. Подчеркнем, что если $|\omega_b| \approx \omega_n$, то сильное возбуждение квантовых частиц может иметь место только для бризеров с $R_1 > 0$.

Также отметим, что амплитуда нулевой гармоники компоненты, сдвигающей квантовые уровни, бризерного импульса в двухкомпонентном случае в два раза пре-

Рис. 3. Абсолютные величины преобразования Фурье компонент Ω_x (а) и Ω_z (б) бризера, представленного на рис. 1.

восходит амплитуду второй гармоники [26]. В трехкомпонентном же случае отношение амплитуд гармоник больше 2 (ср. амплитуды пиков на рис. 3б), но стремится к 2 при $k \rightarrow 0$.

Бризеры уравнений РМБ [9] и ДРМБ [26] могут быть получены из выражений (50)–(52) в результате предельных процедур $k \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 0$ соответственно в случае $R_1 > 0$. Если $R_1 < 0$, то предел $k \rightarrow \infty$ не имеет физического смысла, а предел $k \rightarrow 0$ дает нулевой фон. Подобная ситуация уже имела место для рассмотренного ранее стационарного импульса. Причина этого кроется в том, что при подходящем сдвиге по переменным t или x переход к пределу $\omega_b \rightarrow 0$ в формулах (50)–(52) при условии $|t_b| \geq t_c$ (что соответствует $R_1 \rightarrow 0$) приводит к решению (45)–(47). Выражение для групповой скорости v_g бризера переходит при этом в выражение для скорости v стационарного импульса. В формулах, полученных в результате такой предельной процедуры в случае $R_1 > 0$, знак коэффициента q противоположен знаку $k - 1$, т.е. соответствует более сильному замедлению, а не более сильному возбуждению. Если же $|t_b| < t_c$, то предел $\omega_b \rightarrow 0$ не дает стационарного решения, поскольку $v_{ph} \rightarrow 0$.

Для построения многосолитонных решений уравнений ТРМБ необходимо использовать формулы (35)–(40), взяв за исходное решение нулевой фон. Эти решения описывают упругие столкновения рассмотренных в данном разделе стационарных импульсов и бризеров.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано распространение трехкомпонентных акустических импульсов в кубическом кристалле, находящемся во внешнем магнитном поле. Для того чтобы взаимодействие между всеми составляющими поля упругости было эффективным, рассмотрен случай, когда кристалл содержит парамагнитные примеси электронных и ядерных спинов, а акустический импульс распространяется перпендикулярно внешнему магнитному полю. В этих условиях взаимодействие электронной спиновой подсистемы с продольным звуком позволило уравнивать его скорость и скорости поперечных акустических волн. Парамагнитный кристалл при

этом является акустической штарковской средой, в которой одна из поперечных компонент поля деформации динамически изменяет частоту перехода между зеемановскими подуровнями ядерной спиновой подсистемы, а другая поперечная и продольная компоненты возбуждают этот переход.

С использованием приближения адиабатического следования для электронных спинов и приближение однонаправленного распространения для составляющих поля упругости выведены уравнения ТРМБ (12)–(14), (17)–(19), описывающие распространение трехкомпонентных акустических импульсов в парамагнитном кристалле. Данная система обладает интегралом движения, который налагает ограничения на амплитуды компонент акустического поля. С помощью техники ПД построены солитонные решения уравнений ТРМБ в виде стационарных и брызговых импульсов. На основе этих решений изучены особенности нелинейной динамики полей деформации и эффективных спинов в установившемся режиме и выявлены отличия от двухкомпонентного штарковского случая, изученного в работе [26]. Обнаружено, что в трехкомпонентном случае тоже существует асимметрия по полярности составляющей поля упругости, смещающей частоту перехода между спиновыми подуровнями: знак ее временной площади таков, что частота динамически уменьшается при прохождении импульса. При этом благодаря наличию третьей компоненты существуют два семейства брызгов, которые отличаются характером взаимодействия с ядерными спинами.

Полученные выражения для брызга уравнений ТРМБ сложны, и их исчерпывающий анализ затруднителен. По этой причине представляет интерес изучение особенностей нелинейной динамики трехкомпонентных импульсов, имеющих высокочастотное заполнение, в штарковской среде на основе приближения медленно меняющихся огибающих. Дополнительная степень свободы, которую предоставляет третья компонента, должна существенно увеличить число режимов прозрачности по сравнению с тем, как это было для одно- и двухкомпонентных импульсов [13].

Помимо приближения медленно меняющихся огибающих, к уравнениям ТРМБ может быть применено приближение спектрального перекрытия [34]. Возникающие при этом уравнения будут трехкомпонентными обобщениями уравнений СИП и СГ на случай штарковской среды. Они могут тоже оказаться интегрируемыми в рамках МОЗР, как это уже имело место в случаях однокомпонентных и двухкомпонентных импульсов в штарковских средах [16], [25].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00503).

Список литературы

- [1] N. S. Shiren, *Phys. Rev. B*, **2:7** (1970), 2471–2487; Г. А. Денисенко, *ЖЭТФ*, **60:6** (1971), 2269–2273; В. В. Самарцев, Б. Н. Смоляков, Р. З. Шарипов, *Письма в ЖЭТФ*, **20:10** (1974), 644–647.
- [2] С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М., 1988; В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, М., 1991; С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, *УФН*, **162:3** (1992), 3–87.
- [3] S. L. McCall, E. L. Hahn, *Phys. Rev. Lett.*, **18:21** (1967), 908–911.
- [4] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980; Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, М., 1983.

- [5] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [7] J. D. Gibbon, J. C. Eilbeck, *J. Phys. A*, **5**:11 (1972), L122–L124; P. J. Caudrey, J. D. Gibbon, J. C. Eilbeck, R. K. Bullough, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:6 (1973), 237–238; *J. Phys. A*, **6**:5 (1973), L53–L56; G. L. Lamb Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **31**:4 (1973), 196–199.
- [8] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:25 (1973), 1262–1264.
- [9] J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough, *J. Phys. A*, **6**:9 (1973), 1337–1347; J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough, J. C. Eilbeck, *Lett. Nuovo Cimento*, **8**:13 (1973), 775–779.
- [10] S. V. Sazonov, *J. Phys.: Condens. Matter*, **4**:30 (1992), 6485–6490; **6**:31 (1994), 6295–6303.
- [11] M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, J. V. Moloney, *Physica D*, **138**:1–2 (2000), 134–162; N. V. Ustinov, *Proc. SPIE*, **6725** (2007), 67250F-1, arXiv:0705.2833.
- [12] А. И. Маймистов, Дж.-Г. Капуто, *Оптика и спектроскопия*, **94**:2 (2003), 275–280.
- [13] С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **124**:4(10) (2003), 803–819; С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ*, **127**:2 (2005), 289–307; *Оптика и спектроскопия*, **106**:3 (2009), 473–480.
- [14] С. О. Елютин, *ЖЭТФ*, **128**:1(7) (2005), 17–29.
- [15] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Квантовая электроника*, **35**:8 (2005), 701–704.
- [16] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ*, **83**:11 (2006), 573–578; *ЖЭТФ*, **103**:4(10) (2006), 646–660.
- [17] Дж. Такер, В. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, М., 1975.
- [18] В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, М., 1977.
- [19] С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, М., 1972.
- [20] Д. Болеф, *Физическая акустика*, гл. 3, т. 4, ред. У. Мэзон, Мир, М., 1969; А. Р. Кессель, *Ядерный акустический резонанс*, Наука, М., 1969.
- [21] С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **118**:1 (2000), 20–35.
- [22] С. В. Воронков, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **120**:2(8) (2001), 269–279; *ФТТ*, **43**:11 (2001), 1969–1975; S. V. Sazonov, N. V. Ustinov, *Phys. Rev. E*, **73**:5 (2006), 056614, 10 pp., arXiv:nl.in.PS/0603040.
- [23] A. V. Gulakov, S. V. Sazonov, *J. Phys.: Condens. Matter*, **16**:10 (2004), 1733–1749.
- [24] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ*, **129**:5 (2006), 849–862; *ФТТ*, **51**:2 (2009), 335–340.
- [25] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ТМФ*, **151**:2 (2007), 228–247; S. V. Sazonov, N. V. Ustinov, *J. Phys. A*, **40**:26 (2007), F551–558, arXiv:0706.0281.
- [26] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ФТТ*, **50**:6 (2008), 1076–1084.
- [27] Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, М., 1963.
- [28] А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **134**:2(8) (2008), 390–405.
- [29] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [30] M. D. Crisp, *Phys. Rev. A*, **8**:4 (1973), 2128–2135.
- [31] U. K. H. Kopvillem, V. R. Nagibarov, V. V. Samartsev, N. K. Solovarov, *Adv. Mol. Relax. Process.*, **8**:6 (1976), 241–286.
- [32] J. C. Eilbeck, *J. Phys. A*, **5**:9 (1972), 1355–1363.
- [33] А. А. Заболотский, *ЖЭТФ*, **132**:2(8) (2007), 493–509.
- [34] Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ*, **51**:5 (1990), 252–255; Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, *ЖЭТФ*, **100**:3 (1991), 762–775.