Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Павловский, М. В. Улыбышев, Энергия Казимира в некомпактной электродинамике на решетке, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 2, 262–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 09:37:25

© 2010 г.

О. В. Павловский*, М. В. Улыбышев*

ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА В НЕКОМПАКТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НА РЕШЕТКЕ

Предложен новый решеточный метод расчета энергии Казимира для $U(1)$ -калибровочной теории. С его помощью проведен анализ стандартной задачи о казимировском взаимодействии двух плоских параллельных пластин с граничными условиями, которые индуцированы дополнительным действием Черна–Саймонса, локализованным на этих граничных поверхностях. С физической точки зрения такая граничная задача моделирует взаимодействие двух тонких металлических пластин. Предлагаемый метод может быть обобщен на случай более сложных форм поверхностей.

Ключевые слова: решеточная калибровочная теория, квантовая электродинамика, эффект Казимира.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет эффект Казимира и другие макроскопические квантовые эффекты привлекают большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов и специалистов в современных технологиях. Это, без сомнения, связано с тем существенным прогрессом в изучении физики микро- и нано-масштабов, который наблюдается в последнее время, и с осознанием важности и актуальности возникающих при этом задач. Хорошо известно, что на этих масштабах электростатические и вакуумные эффекты становятся крайне существенными и зачастую играют доминирующую роль. Все это сделало задачу теоретического и численного исследования таких эффектов весьма актуальной.

При разработке новых методов исследования сил казимировского взаимодействия важно иметь в виду, что их можно использовать для расчета температурных поправок, а также для исследования влияния других внешних факторов: конечной плотности, внешних потенциалов и т.п. Такие задачи часто встречаются в приложениях, и современные методы расчета сил Казимира должны быть пригодны для исследования и этого круга задач. К сожалению, существующие на сегодняшний день подходы к расчету сил Казимира, основанные на методе функций Грина, не

*Институт теоретических проблем микромира им. Н.Н. Боголюбова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: ovp@goa.bog.msu.ru, ulybyshev@goa.bog.msu.ru

обладают достаточной универсальностью [1]. С их помощью были решены задачи с простой геометрией граничных поверхностей (плоской, сферической, цилиндрической и т.п.), в то время как применение данных методов для сложных поверхностей оказалось крайне трудной аналитической задачей. Ситуация еще более усложняется в случае, когда казимировское взаимодействие происходит при конечных температурах, а также под воздействием внешних полей. Существующие приближенные методы, такие, например, как алгоритм PFA (Proximity Force Approximation) [1], [2], часто не позволяют получить достоверный результат в физически интересной области значений параметров. Точность этих методов также очень трудно оценить, что представляет собой дополнительную проблему при их применении.

Резюмируя сказанное, отметим, что основной проблемой существующих методов расчета сил Казимира является отсутствие универсальности. Необходимо найти достаточно общий подход к данной проблеме, который позволил бы создать вычислительные методы исследования задачи Казимира как для сложных форм граничных поверхностей, так и для разных полей под воздействием разнообразных внешних факторов. На сегодняшний день, пожалуй, только решеточное представление квантовой теории поля удовлетворяет требуемым критериям общности. Этот формализм одинаково хорошо работает для разных калибровочных групп, сложных геометрий, в нем легко ввести температуру и внешнее поле. Кроме того, за последние тридцать лет накоплен существенный опыт работы с решеточными калибровочными теориями, который было бы интересно применить для решения новой для этого формализма задачи расчета сил Казимира. Эти аргументы стали основной мотивацией для нашей работы.

Мы рассматриваем простейшую задачу о казимировском взаимодействии двух плоскопараллельных пластин. Она легко исследуется аналитически, что делает ее замечательной тестовой задачей для предлагаемого метода. Оценки точности, полученные из сравнения с аналитическим ответом, могут быть использованы для оценки систематической ошибки в более сложных случаях.

В настоящей работе мы сначала обсуждаем постановку задачи о казимировском взаимодействии в решеточном формализме. Это является ключевым моментом и по сути представляет собой ответ на вопрос о том, что такое граница в решеточном формализме теории поля. Затем мы рассматриваем решеточные алгоритмы расчета энергии Казимира и представляем численные результаты, сравнивая их с аналитическим ответом. В заключение мы обсуждаем полученные результаты и перспективы дальнейшего применения предлагаемого метода.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА И ЭФФЕКТ КАЗИМИРА

Эффект Казимира является реакцией вакуума на изменение граничных условий, от которых зависит спектр вакуумных колебаний. Изменение граничных условий приводит к изменению этого спектра и к появлению сил, действующих на границу. Поэтому очень важно определить, что такое граница в решеточном формализме,

или, точнее, какой решеточной наблюдаемой соответствует тот или иной интересный с точки зрения приложений тип границ. Аналогия с вильсоновской петлей подсказывает, что такую наблюдаемую логично строить как некий дополнительный член в действии, локализованный на граничной поверхности.

К счастью, недавно был предложен очень удобный с точки зрения обобщения на решеточный формализм подход к расчету энергии казимировского взаимодействия [3], [4]. Этот элегантный метод постановки граничной задачи для калибровочных полей использует в качестве дополнительного граничного действия хорошо известное топологическое действие Черна–Саймонса.

Проиллюстрируем этот подход на простом примере калибровочного абелева поля. Рассмотрим электромагнитное поле в четырехмерном пространстве-времени с максвелловским действием и дополнительным действием Черна–Саймонса, локализованным на трехмерной поверхности Σ :

$$S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \frac{\lambda}{2} \oint \varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} n_\sigma A_\mu(x) F_{\nu\rho}(x) d^3s, \quad (1)$$

где $\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}$ – тензор Леви-Чивита, n_σ – нормаль к граничной поверхности Σ , λ – действительный параметр. Для простоты рассмотрим случай простейшей граничной поверхности Σ , состоящей из двух бесконечных плоскопараллельных поверхностей, расположенных на расстоянии R друг от друга. В этом случае действие Черна–Саймонса в (1) имеет следующий простой вид:

$$S_{CS} = \frac{\lambda}{2} \int (\delta(x_3) - \delta(x_3 - R)) \varepsilon^{3\mu\nu\rho} A_\mu(x) F_{\nu\rho}(x) d^4x, \quad (2)$$

где в нашей формулировке задачи Казимира нормали к поверхностям смотрят в разные стороны (такой выбор связан с вопросом замыкания этих поверхностей через время и будет разъяснен позже).

Если параметр λ мал, то электромагнитные поля не чувствуют никакой границы и являются свободными. Но что случится, если параметр λ велик (стремится к бесконечности), когда вся динамика полей на поверхности будет определяться действием Черна–Саймонса?

Рассмотрим в этом пределе уравнения движения для полей, полученные из действия (1):

$$\square A^\mu + \lambda(\delta(x_3) - \delta(x_3 - R)) \varepsilon^{3\sigma\nu\rho} A_\sigma \partial_\nu A_\rho = 0. \quad (3)$$

Легко показать, используя (3), что при $\lambda \rightarrow \infty$ граничные условия для полей имеют следующий вид:

$$E_{\parallel}|_{\Sigma} = 0, \quad H_n|_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

где $E_{\parallel}$ и H_n – тангенциальная и нормальная составляющие электрического и магнитного полей соответственно. При этом условии, очевидно, поток энергии электромагнитного поля через поверхность обращается в нуль, что и требовалось.

Задача расчета силы казимировского взаимодействия в такой формулировке с действием Черна–Саймонса исследовалась аналитически методом функций Грина [5], [6].

Рис. 1. Функция $f(\lambda)$.

Мы будем использовать результаты этих работ для сравнения с нашими решеточными вычислениями.

В заключение этой части статьи заметим, что явление такого “вымораживания” поля на поверхности Черна–Саймонса хорошо известно в теоретической физике и связано с красивым эффектом рождения топологических вихреков в трехмерной теории Черна–Саймонса [7], [8]. Как было показано в работе [9], теория Черна–Саймонса в трех измерениях является точно решаемой. Статистическая сумма, которая зависит только от топологии поверхности Σ и калибровочной группы, стремится к нулю, если $\lambda \rightarrow \infty$. Это означает, что в этом пределе в теории нет распространяющихся мод, и, если поверхность Σ замкнута, калибровочные поля внутри поверхности и вне ее оказываются разделенными непрозрачной границей из заплетенных топологических вихреков на граничной поверхности. Если величина λ конечна, то мы имеем нетривиальное взаимодействие между топологическими вихреками и внешним электромагнитным полем [8]. В этом случае граничная поверхность становится полупрозрачной для электромагнитных волн (в зависимости от частоты). Для практических целей достаточно знать, что параметр λ играет роль эффективного регулятора проницаемости границы для электромагнитных волн.

Аналитический ответ для энергии Казимира, отнесенной к единице поверхности пластин, дается следующим выражением [5], [6]:

$$E_{\text{Cas}} = -\frac{\pi^2}{720R^3} f(\lambda), \quad (5)$$

в котором функция $f(\lambda)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 1$, имеет вид

$$f(\lambda) = \frac{90}{\pi^4} \text{Li}_4\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}\right),$$

где $\text{Li}_4(x)$ – полилогарифм,

$$\text{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^4} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} k^2 \ln(1 - xe^{-k}) dk.$$

Функция $f(\lambda)$ представлена на рис. 1.

Мы исследуем поведение энергии Казимира на единицу площади при малых λ . Асимптотика аналитического ответа в этом пределе дается следующим выражением:

$$E_{\text{Cas}} = -\frac{\lambda^2}{8\pi^2 R^3} + O(\lambda^4). \quad (6)$$

3. “ВИЛЬСОНОВСКИЙ МЕШОК” И РЕШЕТОЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА–ЧЕРНА–САЙМОНСА

Мы используем четырехмерную гиперкубическую решетку и простейшую форму решеточного действия для некомпактной $U(1)$ -калибровочной теории в евклидовом времени:

$$S = \frac{\beta}{2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \theta_{p,\mu\nu}^2(x),$$

где линковые и плакетные переменные определены следующим образом:

$$\theta_{l,\mu}(x) = eaA_\mu, \quad \theta_{p,\mu\nu}(x) = \Delta_\mu \theta_{l,\nu}(x) - \Delta_\nu \theta_{l,\mu}(x),$$

$\Delta_\mu \theta_{l,\nu}(x) = \theta_{l,\nu}(x + \hat{\mu}) - \theta_{l,\nu}(x)$, a – шаг решетки, а $\beta = 1/g^2$ – решеточный параметр; в приведенных формулах x – совокупность четырех целых чисел, задающих узел решетки, $\hat{\mu}$ – четырехмерный вектор, сдвигающий номер узла x в μ -м направлении на единицу. Физические величины в решеточной теории вычисляются в терминах средних по полевым конфигурациям (совокупностям всех линковых переменных), генерируемым со статистическим весом e^{-S} .

Выше мы показали, что дополнительное действие Черна–Саймонса при некоторых условиях описывает эффект Казимира. Для того чтобы найти решеточное представление казимировского притяжения между граничными поверхностями, рассмотрим вильсоновскую петлю, описывающую взаимодействие заряженных частиц. В КЭД вильсоновская петля имеет следующий вид:

$$W_C = \exp \left\{ ig \oint_C A_\mu dx_\mu \right\} = \exp \left\{ i \int J_\mu A_\mu dx^4 \right\}. \quad (7)$$

Показатель экспоненты представляет собой дополнительный член в действии, описывающий взаимодействие поля A_μ с током $J_\mu(x) = g \oint_C \delta(x - \xi) d\xi_\mu$ заряженной частицы. Среднее по конфигурациям $\langle W(R, T) \rangle$ вильсоновской петли (R и T – размеры петли) стремится в евклидовом времени в пределе $T \rightarrow \infty$ к $\text{const} \cdot e^{-V(R)T}$, где $V(R)$ – энергия взаимодействия заряженных частиц. Этот же метод может быть использован для вычисления энергии Казимира с использованием действия Черна–Саймонса.

Рис. 2. “Вильсоновский мешок” для двух параллельных пластин.

Аналогично описанию взаимодействия заряженных частиц с помощью одномерного интеграла по вильсоновской петле мы будем описывать казимировское взаимодействие соответствующим трехмерным интегралом. Но на пути к формулировке, пригодной для решеточных расчетов, есть два препятствия.

Во-первых, для стационарных объектов действие (2) – это интеграл от $t = -\infty$ до $t = \infty$, так что по аналогии с вильсоновской петлей в решеточной формулировке мы должны замкнуть поверхность интегрирования во временном направлении. Получающаяся при этом поверхность для задачи о двух плоскостях показана на рис. 2. Эта процедура замыкания, очевидно, может быть применена для любых криволинейных поверхностей. Результатом процедуры является “вильсоновский мешок” [10], [11]. Для произвольной замкнутой трехмерной поверхности Σ в четырехмерном пространстве-времени он может быть записан следующим образом: $\exp \{ i\lambda \oint_{\Sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A_{\nu} F_{\rho\sigma} ds_{\mu} \}$. Таким образом, “вильсоновский мешок” (по аналогии с вильсоновской петлей) является наблюдаемой величиной, которая, будучи усредненной по полевым конфигурациям, определяет величину энергии Казимира взаимодействия объектов, определенных поверхностью интегрирования. Для двух плоскостей мы будем вычислять следующую величину:

$$W_{\text{Bag}}(R, T) = e^{i\lambda S(R, T)}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} S(R, T) = & \int_0^T dt \iiint (\delta(z - R) - \delta(z)) \varepsilon_{3\nu\rho\sigma} A_{\nu} F_{\rho\sigma} dx dy dz + \\ & + \int_0^R dz \iiint (\delta(t - T) - \delta(t)) \varepsilon_{4\nu\rho\sigma} A_{\nu} F_{\rho\sigma} dx dy dt. \end{aligned}$$

Рис. 3. “Уголок” – базовый элемент для построения действия Черна–Саймонса.

В пределе $T \rightarrow \infty$

$$\langle W_{\text{Bag}}(R, T) \rangle \rightarrow C e^{-E_{\text{Cas}}(R)T}. \quad (9)$$

Во-вторых, необходимо переписать эту наблюдаемую (“вильсоновский мешок”) в терминах решеточных объектов, линков и плакетов. Произведение $A_\nu F_{\rho\sigma}$ может быть воспроизведено точно только в некомпактной КЭД, потому что только в этом случае линковая переменная $\theta_{l,\nu}$ является точным решеточным аналогом A_ν , а плакетная переменная $\theta_{p,\mu\nu}$ – решеточным аналогом $F_{\mu\nu}$. Решеточная реализация данной наблюдаемой должна отвечать следующим требованиям:

- 1) калибровочная инвариантность: полный интеграл по замкнутой поверхности для “вильсоновского мешка” должен быть калибровочным инвариантом;
- 2) “локальность”: в предлагаемом решеточном представлении величины $A_\nu F_{\rho\sigma}$, A_ν и $F_{\rho\sigma}$ должны быть заданы в одной и той же точке x ; это требование нетривиально потому, что $\theta_{p,\rho\sigma}$ задает величину напряженности поля $F_{\rho\sigma}$ в центре плакета, в то время как θ_ν задает величину поля A_ν в центре линка, а это разные точки!

3.1. Калибровочная инвариантность. Базовым элементом для построения решеточного действия Черна–Саймонса является “уголок” (см. рис. 3): произведение линковой переменной и одной из соседних плакетных переменных. Это произведение является решеточным аналогом $A_\nu F_{\rho\sigma}$.

Покажем, как сконструировать калибровочно-инвариантную величину из таких базовых элементов. Рассмотрим одну черн-саймонсовскую плоскость (V_3), замкнутую через период по решетке по всем направлениям. “Наивная” дискретизация в евклидовом пространстве-времени может быть записана как

$$S_{\text{CS}} = \sum_{x \in V_3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu \theta_{l,\nu}(x) \theta_{p,\rho\sigma}(x + \widehat{dx}_{\rho\sigma}), \quad (10)$$

где вектор $\widehat{dx}_{\rho\sigma}$ определяет, какой именно из соседних плакетов умножается на соответствующий линк:

$$\widehat{dx}_{\rho\sigma} = c_{\rho\sigma} \hat{\nu} - a_{\rho\sigma} \hat{\rho} - b_{\rho\sigma} \hat{\sigma}, \quad a_{\rho\sigma}, b_{\rho\sigma}, c_{\rho\sigma} = 0, 1.$$

Рис. 4. Два типа уголков.

Существуют восемь вариантов объединения в “уголки” линка и одного из соседних плакетов (два из них показаны на рис. 4).

Теперь рассмотрим калибровочное преобразование “наивного” представления решеточного действия Черна–Саймонса (10). Калибровочное преобразование для линковой переменной записывается как $\theta_{l,\nu} \rightarrow \theta_{l,\nu} + \alpha(x + \hat{\nu}) - \alpha(x)$, и действие (10) благодаря замыканию через период на решетке преобразуется в следующее выражение:

$$S_{CS} \rightarrow \sum_{x \in V_3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu \theta_{l,\nu}(x) \theta_{p,\rho\sigma}(x + \widehat{dx}_{\rho\sigma}) + \\ + \sum_{x \in V_3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu \alpha(x) (\theta_{p,\rho\sigma}(x + \widehat{dx}_{\rho\sigma} - \hat{\nu}) - \theta_{p,\rho\sigma}(x + \widehat{dx}_{\rho\sigma})). \quad (11)$$

Второй член в данном выражении появляется из-за калибровочного преобразования. Чтобы решеточное действие Черна–Саймонса было калибровочно-инвариантным, это слагаемое должно быть равно нулю. Можно показать, что оно равно нулю, если плакет, входящий в него, является стороной одного трехмерного куба для каждого узла x и вектора нормали n_μ . Поэтому надо так выбирать варианты объединения линков и плакетов в “уголки”, чтобы удовлетворить данному требованию. Один из вариантов такого объединения показан на рис. 5. Комбинация “уголков” организована следующим образом: для каждого трехмерного куба “уголки” разных ориентаций, лежащие внутри него (т.е. построенные из ребер этого куба), упираются свободными концами своих линков в одну вершину куба. Такая структура может быть получена, например, если положить $\widehat{dx}_{\rho\sigma} = -\hat{\rho} - \hat{\sigma}$. Это обеспечивает обращение в ноль выражения

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\theta_{p,\rho\sigma}(x + \widehat{dx}_{\rho\sigma} - \hat{\nu}) - \theta_{p,\rho\sigma}(x + \widehat{dx}_{\rho\sigma}))$$

для всех x и μ . В результате действие Черна–Саймонса, полученное из такой системы “уголков” будет калибровочным инвариантом.

Рис. 5. Пример комбинации “углов” различной ориентации, ведущей к калибровочно-инвариантному действию Черна–Саймонса.

Рис. 6. Замыкание “углов” для одной из возможных ориентаций.

Аналогичное рассуждение может быть проведено для любой замкнутой трехмерной поверхности. Единственным отличием будет то, что замыкание при этом будет осуществляться не через период решетки, а по поверхности. Пример такого замыкания для “уголка” одной ориентации приведен на рис. 6. Каждый “уголок” должен быть частью такой цепочки, и все цепочки должны быть замкнуты.

3.2. Локальность. Обратимся теперь к требованию локальности. Как уже отмечалось, плакетная переменная $\theta_{p,\rho\sigma}$ задает величину напряженности поля $F_{\rho\sigma}$ в центре плакета, в то время как линковая переменная θ_ν задает величину поля A_ν в центре линка. С другой стороны, средние

$$\frac{\theta_{l,\nu}(x) + \theta_{l,\nu}(x + \hat{\rho}) + \theta_{l,\nu}(x + \hat{\sigma}) + \theta_{l,\nu}(x + \hat{\rho} + \hat{\sigma})}{4}, \quad \frac{\theta_{p,\rho\sigma}(x) + \theta_{p,\rho\sigma}(x + \hat{\nu})}{2}$$

определяют величину поля A_ν и напряженности поля $F_{\rho\sigma}$ в центре трехмерного куба, задающегося тремя векторами $\hat{\rho}$, $\hat{\nu}$ и $\hat{\sigma}$, исходящими из одного и того же узла решетки x . Очевидно, что произведение этих двух средних представляет собой сумму всех восьми вариантов “уголков”. Другими словами, мы должны просуммировать все “уголки”, у которых линки и плакетки образуют один трехмерный куб. Эти восемь вариантов показаны на рис. 7 для одной из трех возможных ориентаций “уголка”. Для любой из двух других возможных ориентаций легко построить такие же восемь вариантов “уголков”.

Рассмотрим теперь все три ориентации “уголков”. Для каждой ориентации существуют восемь вариантов объединения линка и плакета в “уголок”. С другой стороны, можно сказать, что имеются восемь наборов “уголков” (по три “уголка” в каждом наборе). Каждый такой набор “уголков” аналогичен тому, который показан на рис. 5 (свободные концы линков всех трех “уголков” соединяются в одном из углов куба). Этот набор формирует калибровочно-инвариантную величину после суммирования по всему замкнутому трехмерному объему.

В итоге предлагаемое нами решеточное представление действия Черна–Саймонса является суммой по всем возможным вариантам “уголков” трех различных ориентаций, лежащих в замкнутом трехмерном объеме:

$$S_{CS} = \frac{1}{8} \beta \sum_{x \in V_3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu(x) (\theta_{l,\nu}(x) + \theta_{l,\nu}(x + \hat{\rho}) + \theta_{l,\nu}(x + \hat{\sigma}) + \theta_{l,\nu}(x + \hat{\rho} + \hat{\sigma})) (\theta_{p,\rho\sigma}(x) + \theta_{p,\rho\sigma}(x + \hat{\nu})). \quad (12)$$

Множитель $1/8$ в данном выражении возникает в результате усреднения по восьми возможным вариантам объединения линка и плакета в “уголок”. Произведение $\theta_{l,\nu}\theta_{p,\rho\sigma}$ дает $a^3 e^2 A_\nu F_{\rho\sigma}$ в непрерывном пределе, а с помощью умножения на $\beta = 1/e^2$ мы убираем лишнее e^2 из действия.

3.3. Анизотропная решетка. Для увеличения точности вычислений мы использовали деформированную в одном направлении решетку. Способ введения такой решетки совершенно подобен тому, который использовался в работе [12], только вместо временного направления мы деформировали одно из пространственных

Рис. 7. Структура наблюдаемой “вильсоновский мешок”. Для обеспечения калибровочной инвариантности мы берем сумму произведений всех плакетов, входящих в трехмерный объем “мешка”, на окружающие их линки. Показаны все варианты таких объединений линков и плакетов (одной из трех возможных ориентаций), лежащих в одном трехмерном кубе.

направлений (скажем для определенности, z -направление). Кратко данный формализм может быть описан следующим образом. Все линковые переменные связаны с полем A_μ стандартным образом, $\theta_{l,\mu} = eaA_\mu$ для $\mu = 1, 2, 4$, кроме линков в z -направлении, для которых $\theta_{l,3} = \alpha eaA_3$. Здесь a – шаг решетки во всех направлениях, кроме z -направления, αa – шаг в z -направлении. Действие записывается как

$$S = \frac{\beta}{2} \left\{ \alpha \sum_x \sum_{\substack{\mu < \nu, \\ \mu, \nu \neq 3}} \theta_{p,\mu\nu}^2(x) + \frac{1}{\alpha} \sum_x \sum_\nu \theta_{p,3\nu}^2(x) \right\}.$$

Дополнительное действие Черна–Саймонса не меняется при переходе к деформированной решетке. Если n_μ (нормальный к трехмерной поверхности четырехмерный вектор) ориентирован вдоль z -направления, то деформированные линки не участвуют в “уголках”, и ничего не меняется. Если же n_μ ориентирован по x -, y - или t -направлениям, то один деформированный линк обязательно участвует в линковой или плакетной переменной в “углке”. Например,

$$\theta_{l,3}\theta_{p,12} = e^2 \alpha a^3 A_3 F_{12}, \quad \theta_{l,2}\theta_{p,13} = e^2 \alpha a^3 A_2 F_{13}.$$

Присутствие коэффициента α в формулах автоматически учитывает изменение элементарного решеточного трехмерного объема в этой части “вильсоновского мешка”. Действительно, до деформации этот объем представлял собой трехмерный куб со стороной a и объемом a^3 , а после деформации – прямоугольный параллелепипед со сторонами a , a , αa и объемом αa^3 .

3.4. Непрерывный предел. Анализ непрерывного предела для новой наблюдаемой несколько отличается от традиционных методов, используемых, например, в решеточной квантовой хромодинамике. Хорошо известно, что в непрерывной теории энергия Казимира (без учета радиационных поправок) не зависит от заряда электрона. Это свойство точно воспроизводится и в некомпактной решеточной электродинамике по следующим причинам: во-первых, фазовый переход в такой теории отсутствует, так что β играет роль лишь параметра, определяющего численное значение линковых переменных; во-вторых, зависимость от этого масштаба исчезает из решеточного действия Черна–Саймонса благодаря домножению на β в конечном выражении (12). То, что энергия Казимира не зависит от β , также было проверено нами численно. Таким образом, величина β при вычислениях энергии Казимира в некомпактной электродинамике без фермионов может выбираться любой в достаточно широком диапазоне значений, определяемом лишь требованиями удобства расчетов.

Дополнительным проявлением этой независимости результатов от β является тот факт, что для казимировских вычислений нам в действительности не нужно знать физического объема решетки и шага a : шаг решетки a исчезает из рассмотрения благодаря тому, что окончательным результатом вычислений является безразмерный коэффициент при R^{-3} в выражении для энергии Казимира на единицу площади.

Также нам не нужно устремлять физический объем решетки к нулю для восстановления вращательной симметрии. В некомпактной электродинамике вращательная симметрия восстанавливается автоматически на достаточно больших решеточных расстояниях, как это показано, например, в статье [13]. В качестве иллюстрации восстановления вращательной симметрии мы построили эквипотенциальные поверхности для двух зарядов (рис. 8). Начиная с расстояний в 2,3 шага решетки, эти эквипотенциальные поверхности восстанавливают сферическую форму, несмотря на то что они были вычислены в гиперкубической решетке.

Таким образом, единственной составляющей перехода к непрерывному пределу является переход к пределу “большой решетки” $N \rightarrow \infty$. Другими словами, мы должны наблюдать восстановление правильной зависимости энергии Казимира от расстояния между пластинами при больших решеточных расстояниях.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Вычисления производились для “вильсоновского мешка” вида (8) с решеточным представлением действия Черна–Саймонса, задаваемым формулой (12). В x - и y -направлениях поверхность “вильсоновского мешка” была замкнута по периоду решетки. Значение E_{Cas} рассчитывалось на основании формулы (9).

Рис. 8. Вычисленные на решетке эквипотенциальные линии для двух точечных зарядов.

На рис. 9 представлена зависимость E_{Cas} от R (расстояния между пластинами). Вычисления производились на решетке размером 12 (в единицах a – шага сетки) в x - и y -направлениях, размера 24 в z -направлении, чтобы уменьшить влияние корреляций через период решетки в z -направлении, и размера 72 в t -направлении, чтобы убрать эффекты конечной температуры. В данном случае шаг решетки во всех направлениях одинаков, и решетка изотропна. Мы взяли $\lambda = 0.02$. Параметр $\beta = 4$, хотя от его значения результаты не зависят по изложенным выше причинам.

Из непрерывной теории [1] хорошо известно, что энергия Казимира зависит от R , как C/R^3 , поэтому попытаемся фитировать последовательность точек, полученную из решеточных вычислений, функцией

$$E_{\text{Cas}} = P_1 + \frac{P_2}{R^3}. \quad (13)$$

Нашей целью является, очевидно, подбор коэффициента P_2 . Коэффициент P_1 есть аналог собственной энергии заряженных частиц. Такая же по смыслу величина возникает, например, в решеточных вычислениях для вильсоновской петли. Вставка на рис. 9 показывает зависимость $E_{\text{Cas}}(R)$ на всем интервале значений расстояния от $R = 1$ до $R = 6$. Основной график – это увеличенный фрагмент графика на вставке для расстояний от $R = 2$ до $R = 6$. Сплошная линия – результат фитирования рассчитанных на решетке значений энергии при $2 \leq R \leq 6$, построенный по методу наименьших квадратов, для модельной функции (13). Видно, что начиная с $R = 2$ точки близки к фитирующей кривой, в то время как первая точка с $R = 1$ отклоняется от нее из-за решеточных артефактов на малых расстояниях. Этот факт является, по сути, проявлением непрерывного предела для данной наблюдаемой:

Рис. 9. Зависимость $E_{\text{Cas}}(R)$ при $\beta = 4.0$ и $\lambda = 0.02$. Точки – результат численных расчетов на решетке, сплошная линия – результат фитирования по методу наименьших квадратов модельной функцией $E_{\text{Cas}}(R) = P_1 + P_2/R^3$.

правильная зависимость энергии Казимира от R восстанавливается только начиная с некоторого конечного решеточного расстояния.

Значения коэффициентов P_1 и P_2 также приведены на рис. 9. Рассмотрим физический смысл коэффициента P_2 . Мы получили полную энергию казимировского взаимодействия двух плоскостей. Эта энергия выражена в единицах a^{-1} . Принимая во внимание, что площадь пластин равна $(aN)^2$, где $N = 12$ – размер решетки в x - и y -направлениях, мы можем написать физическое (размерное) выражение энергии Казимира на единицу площади:

$$E_{\text{Cas.phys}} = \frac{1}{a} \frac{P_2}{R^3} \frac{1}{(aN)^2} = \frac{P_2 N^{-2}}{(Ra)^3}.$$

Сравнивая эту формулу с (5), можно заключить, что $P_2 N^{-2}$ должен быть равен коэффициенту перед R^{-3} в (5) или в (6) (значение λ мало в наших вычислениях по причинам, указанным ниже). И эти величины оказались достаточно близкими: $P_2 N^{-2} = -4.44 \cdot 10^{-6} \pm 7 \cdot 10^{-8}$, а теоретическое значение этой величины при $\lambda = 0.02$ равно $-5.066 \cdot 10^{-6}$.

Чтобы увеличить точность вычислений и получить больше точек для фитирования, была рассмотрена решетка, деформированная в z -направлении. Так как расстояние между пластинами также измеряется в z -направлении, в этом случае мы сможем проследить зависимость $E_{\text{Cas}}(R)$ гораздо более подробно. На рис. 10

Рис. 10. Зависимость E_{Cas} (в единицах a^{-1}) от R (в единицах αa) при $\beta = 4.0$ и $\lambda = 0.02$ на анизотропной решетке: шаг в z -направлении равен αa , $\alpha = 0.2$, в остальных направлениях шаг равен a .

приведена эта зависимость, полученная на анизотропной решетке со следующими параметрами: 12 стандартных шагов (длиной a) в x - и y -направлениях, 72 стандартных шага в t -направлении, 120 уменьшенных шагов (длиной αa , $\alpha = 0.2$) в z -направлении. Таким образом, полный объем и размеры этой решетки были такими же, как в первом вычислении, и единственным отличием являлся меньший шаг в z -направлении.

Фитирующая процедура вновь была реализована для значений расстояний от $R = 2a = 10(\alpha a)$ (два стандартных шага равны десяти деформированным). Как и в предыдущем случае, результаты решеточных вычислений оказались близкими к фитирующей функции. Что касается значения коэффициента P_2 , то есть одна особенность, о которой необходимо упомянуть. Энергия выражается в единицах a^{-1} , так как мы не меняли шаг в t -направлении, но теперь R выражено в единицах αa . Таким образом, если зависимость $E_{\text{Cas}}(R)$ действительно близка к функции C/R^3 , то коэффициент P_2 в фитирующей функции (13) на анизотропной решетке надо делить на α^3 , чтобы получить значение P_2 на обычной решетке. Рассчитанные численные значения коэффициентов действительно удовлетворяют этому условию.

Следующим шагом является анализ зависимостей параметра P_2 от λ и от размера решетки. Первая зависимость показана на рис. 11а. В соответствии с формулой (6) вычисленное значение коэффициента при R^{-3} пропорционально λ^2 для малых λ . К сожалению, ошибки вычислений быстро возрастают с ростом λ , и в данных расчетах нам пришлось ограничиться малыми значениями λ . Зависимость P_2 от размера

Рис. 11. Зависимость $P_2(\lambda)$: сплошная линия – результат фитирования функций $-B\lambda^2$ (а) и зависимость $P_2(N)$, где N – размер решетки в x - и y -направлениях: сплошная линия – результат фитирования функцией $-AN^2$ (б). Точки – численный расчет на решетке. Решетка та же, что использовалась для вычислений на рис. 9 (без деформации), $\beta = 4.0$, $\lambda = 0.02$.

решетки показана на рис. 11б. Коэффициент P_2 пропорционален N^2 , где N – размер решетки в x - и y -направлениях. Как и должно быть, энергия Казимира двух пластин пропорциональна их площади.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод вычисления энергии Казимира, базирующийся на решеточных вычислениях в КЭД. Мы объединили две идеи: задание граничных условий путем введения дополнительного действия Черна–Саймонса и концепцию решеточного “вильсоновского мешка” (решеточное представление замкнутой трехмерной поверхности в четырехмерном пространстве). Эта комбинация позволила определить квантовую наблюдаемую для энергии Казимира. Метод был протестирован на примере расчета взаимодействия двух плоскопараллельных пластин. Получено хорошее согласие с аналитическим ответом. Большим преимуществом данного метода является его универсальность. Он может быть применен для следующих вычислений: исследование казимировского взаимодействия между поверхностями сложной формы, интересными с экспериментальной точки зрения; вычисление температурных поправок к силе Казимира (к сожалению, эта очень важная задача в физически интересных случаях довольно сложна для аналитических расчетов); исследование радиационных поправок при включении в решеточную модель фермионов.

Благодарности. Мы выражаем благодарность В.В. Нестеренко, И.Г. Пирожено и М.А. Трусову за содержательное обсуждение нашей работы, а также Андрею Заякину за интересные замечания по поводу динамики вихреков в теории Черна–Саймонса. Для вычислений использовались ресурсы суперкомпьютерного

центра МГУ им. М. В. Ломоносова. Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации № 195-2008-2.

Список литературы

- [1] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Phys. Rep.*, **353**:1–3 (2001), 1–205, arXiv: [quant-ph/0106045](#).
- [2] B. V. Derjagin, I. I. Abrikosova, E. M. Lifshitz, *Quart. Rev. Chem. Soc.*, **10** (1956), 295–329; Б. В. Дерягин, И. И. Абрикосова, Е. М. Лифшиц, *УФН*, **64** (1958), 493–528.
- [3] M. Bordag, D. V. Vassilevich, *Phys. Lett. A*, **268**:1–2 (2000), 75–80, arXiv: [hep-th/9911179](#).
- [4] E. Elizalde, D. V. Vassilevich, *Class. Quant. Grav.*, **16**:3 (1999), 813–822, arXiv: [hep-th/9809211](#).
- [5] V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 6525–6532, arXiv: [hep-th/0606058](#).
- [6] V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *Casimir effect for thin films from imperfect materials*, arXiv: [hep-th/0505218](#).
- [7] M. Mariño, *Rev. Modern Phys.*, **77**:2 (2005), 675–720, arXiv: [hep-th/0406005](#).
- [8] P. A. Horvathy, *Lectures on (abelian) Chern–Simons vortices*, arXiv: [0704.3220](#).
- [9] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [10] N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **148**:6 (1984), 456–460.
- [11] M. Lüscher, *Phys. Lett. B*, **78**:4 (1978), 465–467.
- [12] G. Burgers, F. Karsch, A. Nakamura, I. O. Stamatescu, *Nucl. Phys. B*, **304** (1988), 587–600.
- [13] T. A. DeGrand, D. Toussaint, *Phys. Rev. D*, **24**:2 (1981), 466–470.

Поступила в редакцию 2.06.2009,
после доработки 16.11.2009