Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Филатова, А. И. Шафаревич, Квазиклассические спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на прямой и на сфере, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 2, 279–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:30:45

© 2010 г.

Т. А. Филатова^{*†}, А. И. Шафаревич^{*†‡}

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ДЕЛЬТА-ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПРЯМОЙ И НА СФЕРЕ

В квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ описаны спектральные серии оператора Шредингера $H = -(\hbar^2/2)\Delta + V(x) + \alpha\delta(x - x_0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, с дельта-потенциалом на действительной прямой, трехмерной и двумерной стандартных сферах. В первом случае рассмотрен гладкий потенциал $V(x)$ такой, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. В двух последних случаях $V(x) = 0$. Для каждого случая описаны классические траектории, соответствующие в квазиклассическом пределе квантовой задаче с дельта-потенциалом.

Ключевые слова: квазиклассический спектр, оператор Шредингера, дельта-потенциал, лагранжево многообразие, канонический оператор Маслова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Операторы Шредингера с точечными потенциалами (потенциалами нулевого радиуса, дельта-потенциалами) используются во многих физических и математических задачах. Одной из первых физических работ, где для исследования зонного спектра периодических систем применялись потенциалы нулевого радиуса, является известная статья [1]. С помощью метода точечных потенциалов исследовались различные физические явления [2]–[4]. Операторы с дельта-потенциалами также изучались, например, в работах [5]–[8]. Строгое математическое обоснование метода потенциалов нулевого радиуса было дано в статье [9], где было предложено использовать формулу Крейна для описания резольвент операторов с точечными возмущениями. Обширная библиография работ, посвященных применению метода точечных потенциалов, содержится в монографиях [10], [11]. В работах [12]–[15] на основе теории расширений изучались спектральные свойства опе-

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия.

E-mail: tatyana.filatova@gmail.com

[‡]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: shafarev@yahoo.com

раторов с дельта-потенциалами и близких к ним операторов на сингулярных пространствах.

В настоящей работе обсуждаются квазиклассические свойства простейших операторов с дельта-потенциалами. Квазиклассическая теория для широкого класса уравнений с гладкими коэффициентами была развита в работах Маслова (см., например, монографии [16], [17]); в статье [18] эта теория применялась к спектральной задаче для оператора Лапласа–Бельтрами на k -мерной сфере. В работе [19] квазиклассическая теория использовалась для описания асимптотики функции с особенностью (функции Грина) для стационарного уравнения Шредингера.

Мы рассматриваем спектральную задачу

$$H\psi = E\psi \quad (1)$$

для оператора Шредингера с дельта-потенциалом,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V(x) + \alpha \delta(x - x_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ для трех случаев: $x \in \mathbb{R}$, $x \in S_a^2$ и $x \in S_a^3$, где S_a^n – стандартная n -мерная сфера радиуса a . В первом случае рассматривается потенциал $V(x)$ такой, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. В двух последних случаях $V(x) = 0$. Цель работы – получить квазиклассические спектральные серии оператора (2), а также описать классические траектории и инвариантные лагранжевы многообразия, соответствующие этим сериям.

Структура работы следующая. В разделе 2 приводятся необходимые сведения из теории самосопряженных расширений. В разделе 3 кратко изложены основные сведения о строении спектра оператора с дельта-потенциалом (см. также работы [12], [15], [20]). В разделе 4 с помощью конструкции канонического оператора Маслова [17], а также с помощью изложенных в разделе 3 сведений строятся почти собственные функции оператора H , т. е. приближенные с точностью $o(\hbar)$ решения уравнения (1). Почти собственные функции подбираются так, чтобы приближенные решения удовлетворяли заданным граничным условиям (так называемым *условиям сшивки*, параметризующим данное самосопряженное расширение), которые и будут давать уравнения на квазиклассический спектр задачи (1), (2). Квазиклассические асимптотики спектра оператора (2) описаны в теоремах 1–3 из раздела 4. Все величины, входящие в полученные асимптотические формулы, выражаются через характеристики некоторого семейства фазовых траекторий; иными словами, в пределе $\hbar \rightarrow 0$ квантовым состояниям отвечают определенные классические движения. Мы описываем классические движения, порожденные дельта-потенциалом; они представляют собой совокупность траекторий гамильтоновой системы со специальными начальными условиями. Семейство этих траекторий образует лагранжево многообразие Λ . Именно на этих лагранжевых многообразиях строится канонический оператор, а полученные уравнения на квазиклассический спектр являются нестандартными условиями квантования на построенных многообразиях Λ (см. раздел 4).

2. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА H

В теории точечных потенциалов (дельта-потенциалов) нетривиальным является вопрос о придании операторного смысла в пространстве $L_2(M)$ (где в нашем случае M есть $\mathbb{R}$, S_a^3 или S_a^2) формальному выражению

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x) + \alpha\delta(x - x_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, а $V(x)$ – гладкая функция. Мы пользуемся следующей конструкцией [9]. Рассмотрим самосопряженный оператор

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x), \quad (4)$$

область определения которого есть $D(H_0) = W_2^2(M)$ (здесь $W_2^2(M)$ – второе пространство Соболева, при $\dim M \leq 3$ справедливо вложение $W_2^2(M) \subset C(M)$, где $C(M)$ – пространство непрерывных функций на M). На оператор H налагаются следующие естественные условия:

- 1) оператор H самосопряжен;
- 2) действие оператора H на функциях $\psi(x)$ таких, что $\psi(x_0) = 0$, совпадает с действием оператора H_0 .

Таким образом, H – самосопряженное расширение симметрического оператора $H_0|_{\psi(x_0)=0}$, получающегося путем ограничения оператора H_0 на пространство функций, обращающихся в нуль в точке x_0 . Все такие расширения H параметризуются одним параметром α (коэффициентом при дельта-потенциале в (3)) и описываются следующим образом. Область определения оператора H составляют функции $f \in D((H_0|_{\psi(x_0)=0})^*)$, обладающие следующими свойствами.

1. В окрестности точки x_0 для них справедливо разложение [12]

$$f(x) = a(f)F_0(x, x_0) + b(f) + R(x, x_0), \quad (5)$$

где $a(f), b(f) \in \mathbb{C}$;

$$F_0(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} r(x, x_0), & \dim M = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln r(x, x_0), & \dim M = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(x, x_0)}, & \dim M = 3; \end{cases} \quad (6)$$

функция $R(x, x_0)$ при $x \rightarrow x_0$ имеет асимптотику

$$R(x, x_0) = \begin{cases} o(r(x, x_0)), & \dim M = 1, \\ o(1), & \dim M = 2, \quad \dim M = 3. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь и далее $r(x, x_0)$ – расстояние между точками x и x_0 на M .

2. Для таких функций $f(x)$ (для данного оператора H) должно выполняется *граничное условие*

$$a(f) = \frac{2\alpha}{h^2} b(f). \quad (8)$$

ПРИМЕР. Найдем область определения самосопряженного расширения H оператора H_0 в случае $x \in \mathbb{R}$. Согласно (5)–(7) функция $f \in D(H)$ имеет вид

$$f(x) = a(f) \left(-\frac{|x - x_0|}{2} \right) + b(f) + o(|x - x_0|). \quad (9)$$

В одномерном случае коэффициенты $a(f), b(f)$ легко вычисляются:

$$a(f) = f'(x_0 - 0) - f'(x_0 + 0), \quad b(f) = f(0).$$

Поэтому в силу (8) получаем граничное условие [12]

$$f'(x_0 - 0) - f'(x_0 + 0) = \frac{2\alpha}{h^2} f(0), \quad (10)$$

причем в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0). \quad (11)$$

Следовательно, область определения самосопряженного расширения H оператора $H_0|_{\psi(0)=0}$ состоит из функций $f \in D((H_0|_{\psi(x_0)=0})^*)$, для которых выполняются условия (10), (11), причем при $x < x_0$ и при $x > x_0$ производная $f'(x)$ абсолютно непрерывна.

3. СПЕКТР ТОЧЕЧНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Пусть $M = S_a^2$ или $M = S_a^3$, $V(x) = 0$. Спектр точечного возмущения лапласиана выражается в терминах Q-функции Крейна [12], [15]. Пусть $G^0(x, y; z)$ – функция Грина введенного в разделе 2 оператора $-\Delta$ на M , т. е. интегральное ядро оператора $(-\Delta - z)^{-1}$ (здесь $z \in \rho(-\Delta)$, где $\rho(-\Delta)$ – резольвентное множество оператора $-\Delta$):

$$(-\Delta - z)^{-1} f(x) = \int_M G^0(x, y; z) f(y) d\omega,$$

где $d\omega$ – форма объема на M . Пусть $G_{\text{reg}}^0(x, y; z) = G^0(x, y; z) + F_0(x, y)$ – регуляризованная функция Грина, функция $F_0(x, y)$ определена в формуле (6). По определению Q-функция Крейна есть $Q(z; x_0) = G_{\text{reg}}^0(x_0, x_0; z)$.

Далее мы опишем спектр оператора H при фиксированном x_0 , опираясь на результаты работы [15]. В рассматриваемых задачах спектр $\text{спес}(H_0)$ оператора $H(0)$, приведенного в (4), дискретный: состоит из неограниченной последовательности $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ собственных значений с конечными кратностями $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$. Каждое собственное значение λ_n оператора H_0 кратности k_n является собственным значением оператора H кратности $k_n - 1$, k_n или $k_n + 1$ (если $k_n = 1$, то кратность, равная $k_n - 1$, означает, что λ_n не лежит в $\text{спес}(H)$). Значение $\lambda \notin \text{спес}(H_0)$

является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда $z = 2\lambda/h^2$ есть решение уравнения

$$Q(z; x_0) - \frac{h^2}{2\alpha} = 0. \quad (12)$$

Данная формула является универсальной для описания вклада в спектр, вносимого дельта-потенциалом. Таким образом (см. теорему 2.5 в работе [15]), спектр оператора H будет состоять из *кратных* ($k_n > 1$) собственных значений оператора H_0 , а также из значений $\lambda = \varepsilon_n$, отвечающих *решениям* $z = 2\lambda/h^2$ уравнения (12). В указанной работе [15] также сформулирован результат для собственных функций оператора H . Собственная функция ψ оператора H_0 является собственной функцией оператора H , если $\psi(x_0) = 0$ (в частности, такие функции всегда существуют, если собственное значение оператора H_0 кратное). Помимо собственных функций оператора H_0 , у оператора H есть еще следующие собственные функции. Обозначим $G^0(z, x_0; \varepsilon_n)$ через $g_{x_0}(z)$, тогда эти дополнительные (нормированные) собственные функции вычисляются по формуле

$$\Phi_n = \left[\frac{\partial Q}{\partial z}(\varepsilon_n; x_0) \right]^{-1} g_{x_0}(\varepsilon_n). \quad (13)$$

4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ ОПЕРАТОРА H

В этом разделе мы найдем спектр задачи

$$\left(-\frac{h^2}{2} \Delta + V(x) + \alpha \delta(x - x_0) \right) \psi = E\psi, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

в квазиклассическом пределе $h \rightarrow 0$ на действительной прямой, трехмерной и двумерной сферах и опишем соответствующие инвариантные лагранжевы многообразия.

4.1. Одномерный случай. Определим, какие классические движения соответствуют задаче

$$\left(-\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \alpha \delta(x - x_0) \right) \psi = E\psi \quad (14)$$

при $h \rightarrow 0$, где $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим классические движения, соответствующие квантовой задаче с $\alpha = 0$ (см. рис. 1):

$$\left(-\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi = E\psi. \quad (15)$$

Рис. 1. Классические движения в случае квантовой задачи (14), где $V(x_1) = V(x_2) = E$, $x_1 < x_0 < x_2$.

Для данной задачи мы имеем замкнутую классическую траекторию $p^2 + V(x) = E$. Для задачи (14) при $\alpha \neq 0$ отличие состоит в том, что классическая траектория, соответствующая задаче (15), делится вертикальной прямой, проходящей через точку x_0 , на две кривые γ_1 и γ_2 (рис. 1); через интегралы вдоль этих кривых и через площади σ_1 и σ_2 областей, ограниченных этими кривыми, выражаются в данном случае уравнения на спектр задачи (14). Именно совокупность кривых γ_1 и γ_2 является в данном случае инвариантным лагранжевым многообразием Λ , описывающим классические движения.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует число $E = O(1)$, удовлетворяющее с точностью $O(h)$ следующим уравнениям, где $p(x) = \sqrt{2(E - V(x))}$: при $\alpha = O(1)$ — одному из уравнений

$$\int_{x_0}^{x_2} p(x) dx = \pi h \left(n + \frac{1}{4} \right), \quad \int_{x_1}^{x_0} p(x) dx = \pi h \left(k + \frac{3}{4} \right); \quad (16)$$

при $\alpha = \alpha_0 h = O(h)$ – уравнению

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2h} \oint_{\Gamma: p^2/2+V(x)=E} p(x) dx + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = -\frac{\alpha_0}{p(x_0)} \cos\left(\frac{1}{2h} \oint_{\Gamma: p^2/2+V(x)=E} p(x) dx + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2h}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $x_1 < x_0 < x_2$,

$$\sigma_1 = 2 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2(E - V(x))} dx, \quad \sigma_2 = 2 \int_{x_0}^{x_2} \sqrt{2(E - V(x))} dx; \quad (18)$$

при $\alpha = O(h^{1+\delta})$, $\delta > 0$, – уравнению

$$\oint_{\Gamma: p^2/2+V(x)=E} p(x) dx = 2\pi h \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (19)$$

где $n, k \in \mathbb{Z}_+$ ($n, k \sim 1/h$, $h \rightarrow 0$).

Тогда существует собственное значение E_0 оператора H такое, что $|E - E_0| = O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$.

Смысл приведенных формул легко понять. Действительно, если дельта-возмущение велико, т. е. $\alpha = O(1)$ при $h \rightarrow 0$, то уравнение, определяющее спектр, разбивается на два независимых условия квантования, соответствующих движению в правой и левой частях потенциальной ямы. В случае слабого дельта-возмущения, а именно при $\alpha = o(h)$, наличие такого возмущения не вносит ощутимого вклада в спектр; при этом получается стандартное условие квантования Бора–Зоммерфельда (см., например, книгу [21]), которое справедливо, если дельта-возмущение отсутствует. Случай $\alpha = O(h)$ промежуточный: движения слева и справа от дельта-потенциала взаимодействуют; условие квантования отличается от стандартного правила Бора–Зоммерфельда.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соответствующие формулы для симметричной ямы (при $\sigma_1 = \sigma_2$) известны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим функцию, которая, во-первых, при $x > x_0$ и при $x < x_0$ удовлетворяет уравнению (15) с точностью $O(h^2)$ и, во-вторых, лежит в области определения оператора H задачи (14). Чтобы найти такую функцию, убывающую при $|x| \rightarrow \infty$, воспользуемся конструкцией канонического оператора Маслова [17]. Разобьем область изменения переменной x на два промежутка $L_1 = (-\infty, x_0)$ и $L_2 = (x_0, +\infty)$. Построим с точностью $O(h^2)$ решения $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ задачи (15) в областях L_1 и L_2 , убывающие при $|x| \rightarrow \infty$. Искомую функцию запишем в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in L_1, \\ \psi_2(x), & x \in L_2. \end{cases} \quad (20)$$

Пусть кривая Λ (одномерное лагранжево многообразие) определяется уравнением $H_0(p, x) = E$, где $H_0 = p^2/2 + V(x)$. Введем на Λ параметр $t \in \mathbb{R}$ и форму объема dt .

Рассмотрим область L_1 . Этой области соответствует часть замкнутой лагранжевой кривой Λ , обозначенная через γ_1 (см. рис. 1). Построим в этой области решение $\psi_1(x)$ с помощью конструкции канонического оператора Маслова [17]: $\psi_1(x) = K_{1\Lambda}[1]$, где $K_{1\Lambda}[1]$ – канонический оператор Маслова на кривой γ_1 , примененный к 1. Для этого покроем кривую γ_1 картами V_1, V_2, V_3 и введем разбиение единицы по данным картам: $e_j(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$, $\sum_{j=1}^3 e_j(t) = 1$. Это решение в неособых картах V_1, V_3 определяется следующей формулой:

$$\psi_1(x) = K_{1\Lambda}[1] = J(x) \left\{ \exp\left(\frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq\right) e_1 + \right. \\ \left. + i \exp\left(\frac{2i}{h} \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{2(E - V(q))} dq\right) \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq\right) e_3 \right\}, \quad (21)$$

где $J(x) = dp/dx = (2(E - V(x)))^{-1/4}$. Для канонического оператора Маслова справедливо коммутационное соотношение [17]

$$H_0 K_\Lambda[\phi] = K_\Lambda(H_0|_\Lambda \phi - i\hbar \dot{\phi}) + O(\hbar^2),$$

где $\phi \in C_0^\infty(\Lambda)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая компактная функция на лагранжевом многообразии Λ , $\dot{\phi}$ – производная этой функции вдоль траектории. Для $\phi = 1$ это соотношение принимает следующий вид:

$$H_0 K_\Lambda[1] = K_\Lambda(H_0|_\Lambda) + O(\hbar^2). \quad (22)$$

Рассмотрим теперь область L_2 , которой соответствует часть замкнутой кривой Λ , обозначенная через γ_2 (см. рис. 1). Аналогичным образом построим решение $\psi_2(x) = K_{2\Lambda}[1]$, где $K_{2\Lambda}[1]$ – канонический оператор Маслова на кривой γ_2 , примененный к $\varphi = 1$. Для этого покроем кривую γ_2 картами V_4, V_5, V_6 и введем разбиение единицы по данным картам: $e_j(t) \in C^\infty$, $j = 4, 5, 6$, $\sum_{j=4}^6 e_j(t) = 1$. Тогда искомое решение в неособых картах V_4, V_6 определяется формулой

$$\psi_2(x) = K_{2\Lambda}[1] = J(x) \left\{ \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq\right) e_4 + \right. \\ \left. + i \exp\left(\frac{2i}{h} \int_{x_0}^{x_2} \sqrt{2(E - V(q))} dq\right) \exp\left(\frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq\right) e_6 \right\} \quad (23)$$

и также удовлетворяет условию коммутации (22).

Приведем выражения (21), (23) к следующему виду:

$$\psi_1(x) = C_1 \cdot J(x) \exp\left(\frac{i}{h} \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{2(E - V(q))} dq + \frac{i\pi}{4}\right) \times \\ \times \cos\left\{\frac{1}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq - \left(\frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{2(E - V(q))} dq + \frac{\pi}{4}\right)\right\}, \\ \psi_2(x) = C_2 \cdot J(x) \exp\left(\frac{i}{h} \int_{x_0}^{x_2} \sqrt{2(E - V(q))} dq + \frac{i\pi}{4}\right) \times \\ \times \cos\left\{\frac{1}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq + \left(\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_2} \sqrt{2(E - V(q))} dq + \frac{\pi}{4}\right)\right\}, \quad (24)$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$. Итак, в соответствии с (20) построена функция $\psi(x)$, при $x > x_0$ и $x < x_0$ удовлетворяющая уравнению $H_0\psi = E\psi + O(h^2)$ в силу (22).

Далее, для того чтобы $\psi(x)$ принадлежала области определения $D(H)$, необходимо так подобрать коэффициенты C_1, C_2 в (24), чтобы функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ удовлетворяли условиям сшивки в точке x_0 (и тем самым функция $\psi(x)$ принадлежала области определения оператора H):

$$\psi_1(x_0 - 0) = \psi_2(x_0 + 0), \quad \psi'_2(x_0 + 0) - \psi'_1(x_0 - 0) = \frac{2\alpha}{h^2} \psi_2(x_0). \quad (25)$$

Положим $C_1 = C$, $C_2 = 1$ и введем следующие обозначения:

$$\xi_1 = \frac{\sigma_1}{2h} + \frac{\pi}{4}, \quad \xi_2 = \frac{\sigma_2}{2h} + \frac{\pi}{4},$$

где σ_1 и σ_2 заданы в формуле (18), и

$$I(x) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{2(E - V(q))} dq.$$

Подставим полученные в (24) решения $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ в систему (25). Выразив из первого уравнения системы константу C и подставив ее во второе уравнение, получим

$$\begin{aligned} & 2J'(x_0)e^{i\xi_2} \cos(I(x_0) + \xi_2) - 2J(x_0)I'(x_0)e^{i\xi_2} \sin(I(x_0) + \xi_2) - \\ & - 2CJ'(x_0)e^{i\xi_1} \cos(I(x_0) - \xi_1) + 2J(x_0)I'(x_0)e^{i\xi_1} \sin(I(x_0) - \xi_1) = \\ & = \frac{2\alpha}{h^2} J(x_0)e^{i\xi_2} \cos(I(x_0) + \xi_2). \end{aligned}$$

Рассматривая отдельно случаи $\alpha = O(1)$, $\alpha = O(h)$ и $\alpha = O(h^{1+\delta})$, $\delta > 0$, получаем уравнения на спектр, описанные в теореме.

Итак, мы построили удовлетворяющие условиям сшивки (25) функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, содержащие константы C_1, C_2 , и тем самым функция (20) обладает следующими свойствами: $\psi(x) \in D(H)$ и $H\psi = E_0\psi + O(h^2)$, в силу выполнения коммутационного соотношения (22) для функций ψ_1, ψ_2 , где $E_0 = H_0|_\Lambda$. Для завершения доказательства воспользуемся хорошо известным утверждением (см., например, книгу [17]).

ЛЕММА. Пусть

$$(H - E_0)\psi = f, \quad (H - E)\psi = 0, \quad \psi \in D(H). \quad (26)$$

Тогда $|E - E_0| \leq \|f\|$.

Итак, из равенства $(H - E_0)\psi = O(h^2)$ следует, что $(E - E_0)\psi = O(h^2)$.

4.2. Трехмерный случай. Рассмотрим при $h \rightarrow 0$ спектральную задачу на трехмерной сфере S_a^3 радиуса a :

$$\left(-\frac{h^2}{2}\Delta + \alpha\delta(x - x_0)\right)\psi = E\psi, \quad x \in S_a^3. \quad (27)$$

Определим объект, в терминах которого выражаются квазиклассические спектральные серии – лагранжево многообразие Λ , описывающее искомые классические движения, соответствующие квантовой задаче (27).

Пусть $(x, p) \in T^*S_a^3$, где $T^*S_a^3$ – кокасательное расслоение к сфере. Рассмотрим траектории (см. рис. 2)

$$x = X(\omega, t), \quad p = P(\omega, t), \quad \omega \in S_{\sqrt{2E}}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

где $S_{\sqrt{2E}}^2$ – двумерная сфера радиуса $\sqrt{2E}$, гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H = \frac{p^2}{2}, \quad (29)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \omega, \quad |\omega| = \sqrt{2E}. \quad (30)$$

Другими словами, из точки x_0 (в которой находится дельта-потенциал) по поверхности сферы S_a^3 с импульсом $p \in \Lambda_0$, где $\Lambda_0 = \{x = x_0, |p| = \sqrt{2E}\}$, выпускаются траектории гамильтоновой системы; в результате получается многообразие $\Lambda = \bigcup_t g_t \Lambda_0$, диффеоморфное $S^2 \times S^1$. Это многообразие и описывает нужные классические движения. Проекции траекторий на сферу S_a^3 суть геодезические (большие круги). Многообразие Λ имеет единственный цикл Γ ; в качестве этого цикла можно взять замкнутую траекторию гамильтоновой системы (29) с начальными условиями (30) (см. рис. 2).

Проекция многообразия Λ на x -пространство устроена следующим образом. В каждую точку сферы S_a^3 за исключением точки x_0 и точки x' , диаметрально противоположной x_0 , проецируются две точки многообразия Λ , а именно (x, p) и $(x, -p)$ (это соответствует тому, что из фиксированной точки x_0 в любую другую точку $x \in S_a^3$, $x \neq x'$, можно попасть, двигаясь по сфере, двумя путями: по малой и по большой дугам большого круга). При этом в точки x_0 и x' сферы S_a^3 проецируется вся двумерная сфера $S_{\sqrt{2E}}^2$. Условие квантования на многообразии Λ вдоль цикла Γ и есть искомое уравнение, определяющее спектр задачи (27).

Если из многообразия Λ выкинуть сферу $S_{\sqrt{2E}}^2$ над точкой x_0 , то получится некомпактное многообразие $\Lambda' = \Lambda \setminus S^2$. Многообразие Λ' определяет собственную функцию.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть число $E = O(1)$ удовлетворяет с точностью $O(h)$ следующим уравнениям: при $h^3/\alpha \rightarrow 0$ – уравнению

$$\oint_{\Gamma} (p, dx) = 2\pi h \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad \left(k \sim \frac{1}{h}, \quad h \rightarrow 0 \right); \quad (31)$$

Рис. 2. Классические траектории на сфере S^2_a (геодезические), соответствующие квантовой задаче (27) (схематично).

при $h^3/\alpha = O(1)$ (т.е. при $\alpha = \alpha_0 h^3$) – уравнению

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2h} \oint_{\Gamma} (p, dx) \right) = -\frac{2\pi}{\alpha_0 \sqrt{2E}}; \quad (32)$$

при $h^3/\alpha \rightarrow \infty$ – уравнению

$$\oint_{\Gamma} (p, dx) = 2\pi h k. \quad (33)$$

Тогда существуют собственное значение E_0 оператора H такое, что $|E - E_0| = O(h^2)$, и функция ψ такая, что $H\psi = E\psi + O(h^2)$. При этом функция ψ выражается через канонический оператор Маслова на многообразии Λ' : $\psi = K_{\Lambda'}[1]$. Вне точки x_0 и диаметрально противоположной ей точки x' собственная функция определяется выражением

$$\psi = \frac{C}{a \sin \frac{r(x, x_0)}{a}} \sin \left\{ \frac{1}{2h} \left(\int_{x_0}^x (p, dx) - 2\pi a \sqrt{2E} \right) \right\} + O(h),$$

где $C = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интегралы в теореме 2 можно вычислить: имеем, соответственно, для уравнений (31)–(33)

$$\begin{aligned} E &= \frac{h^2}{2a^2} \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 && \text{при} \quad \frac{h^3}{\alpha} \rightarrow 0; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi a}{h} \sqrt{2E}\right) &= -\frac{2\pi}{\alpha_0 \sqrt{2E}} && \text{при} \quad \frac{h^3}{\alpha} = O(1) \quad (\alpha = \alpha_0 h^3); \\ E &= \frac{h^2}{2a^2} k^2 && \text{при} \quad \frac{h^3}{\alpha} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Собственная функция ψ имеет особенность в точке x_0 , что является следствием некомпактности многообразия Λ' .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Описанное в теореме уравнение (31) совпадает со стандартным условием Бора–Зоммерфельда–Маслова на многообразии Λ , которое имеет вид (см., например, книгу [17])

$$\frac{1}{2\pi h} \oint_{\gamma} (p, dx) = m + \frac{\operatorname{Ind} \gamma}{4},$$

где γ – цикл на Λ , $\operatorname{Ind} \gamma$ – индекс Маслова на Λ , $m \in \mathbb{Z}_+$ ($m \sim 1/h$ при $h \rightarrow 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точное уравнение на спектр в случае трехмерной сферы имеет вид (12), где

$$Q(E; x_0) = -\frac{\sqrt{2a^2 E/h^2 + 1}}{4\pi a} \operatorname{ctg}\left(\pi \sqrt{\frac{2a^2 E}{h^2} + 1}\right)$$

– Q-функция Крейна в случае трехмерной сферы [12].

Рассмотрим асимптотику уравнения (12) при $h \rightarrow 0$. Учитывая, что

$$\left(\sqrt{\frac{2a^2 E}{h^2} + 1}\right)\Big|_{h \rightarrow 0} = \left(\frac{a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{1 + \frac{h^2}{2a^2 E}}\right)\Big|_{h \rightarrow 0} = \frac{a\sqrt{2E}}{h} + O(h),$$

получаем с точностью $O(h)$ условие квантования на лагранжевом многообразии Λ для случая трехмерной сферы:

$$-\frac{\sqrt{2E}}{4\pi h} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi a \sqrt{2E}}{h}\right) - \frac{h^2}{2\alpha} = 0$$

или, в привычном виде,

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi a \sqrt{2E}}{h}\right) = -\frac{2\pi h^3}{\alpha \sqrt{2E}}. \quad (34)$$

Условия квантования, изложенные в теореме 2, получены из данного уравнения при различных соотношениях между α и h^3 .

На трехмерной сфере точное выражение для собственной функции, соответствующей решениям $z = E$ уравнения (12), согласно формуле (13) имеет вид [12]

$$\begin{aligned} \psi(x; x_0, h, E) &= \frac{1}{4\pi a \sin \frac{r(x, x_0)}{a}} \left\{ \cos\left(\frac{r(x, x_0)}{a} I(h, E)\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{r(x, x_0)}{a} I(h, E)\right) \operatorname{ctg}(\pi I(h, E)) \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$I(h, E) = \frac{a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{1 + \frac{h^2}{2a^2E}}.$$

Теперь получим асимптотику с точностью $O(h)$ собственной функции (35) при $h \rightarrow 0$. Принимая во внимание разложение $I(h, E) = a\sqrt{2E}/h + O(h)$, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \psi(x; x_0, h, E) = \frac{1}{4\pi a \sin \frac{r(x, x_0)}{a}} & \left\{ \cos\left(\frac{r(x, x_0)\sqrt{2E}}{h}\right) - \right. \\ & \left. - \sin\left(\frac{r(x, x_0)\sqrt{2E}}{h}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi a\sqrt{2E}}{h}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Данное выражение для собственной функции при подстановке в него условия (34) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \psi(x; x_0, h, E) = \frac{1}{4\pi a \sin \frac{r(x, x_0)}{a}} \times \\ \times \cos\left\{\frac{r(x, x_0)\sqrt{2E}}{h} - \arctg\left(\frac{2\pi h^3}{\alpha\sqrt{2E}}\right)\right\} + O(h). \end{aligned} \quad (37)$$

При выполнении условия квантования (34) функция (36) выражается через канонический оператор Маслова: $\psi = K_{\Lambda'}[1]$ на многообразии Λ' . Покажем это.

Методом канонического оператора Маслова [17] построим решение уравнения

$$-\frac{h^2}{2} \Delta \psi = E\psi + O(h^2) \quad (38)$$

в неособых картах, а именно вне окрестностей точки x_0 и диаметрально противоположной ей точки x' . Неособых карт на многообразии Λ' всего две. Они выбираются так, чтобы точки многообразия Λ' из первой и второй карт имели противоположные импульсы. Это соответствует тому, что из точки $x_0 \in S_a^3$ в любую точку x можно попасть по двум траекториям на сфере S_a^3 , по малой и по большой дугам большого круга, выпуская из точки x_0 векторы импульсов противоположных направлений p и $-p$. В итоге получаем следующее выражение для канонического оператора:

$$\begin{aligned} K_{\Lambda'}[1] = \frac{1}{\sqrt{J}} & \left\{ \exp\left(i \frac{r(x, x_0)\sqrt{2E}}{h}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-i \frac{r(x, x_0)\sqrt{2E}}{h}\right) \exp\left(\frac{2i}{h} \left(\pi a\sqrt{2E} + \frac{\pi h}{2}\right)\right) \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$r(x, x_0)\sqrt{2E} = \int_{x_0}^x (p, dx)$$

есть результат вычисления интеграла вдоль траектории Γ , а $J = a^2 \sin^2 \frac{r(x, x_0)}{a}$ – якобиан. После несложных преобразований выражения (39) приходим к формуле

$$K_{\Lambda'}[1] = \frac{2}{\left| a \sin \frac{r(x, x_0)}{a} \right|} \exp\left(i \frac{\pi a \sqrt{2E}}{h}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{r(x, x_0) \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi a \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi}{2}\right). \quad (40)$$

Как видно, данное решение, построенное методом канонического оператора Маслова, при $x \rightarrow x_0$ имеет тот же вид и ту же особенность в якобиане, что и функция (36), следовательно, функция (40) принадлежит области определения оператора H .

Приравнявая аргументы косинуса в выражениях (37) и (40), приходим в точности к условию квантования (34). Следовательно, вне точки x_0 и диаметрально противоположной ей точки x' при выполнении приведенных в теореме условий квантования с точностью $O(h)$ выполняется равенство $\psi = K_{\Lambda'}[1]$.

Для функции $\psi(x)$ такой, что $\psi(x) = K_{\Lambda'}[1]$, выполняется коммутационное соотношение (21), откуда следует справедливость уравнения $H\psi = E\psi + O(h^2)$. Отсюда с использованием леммы аналогично одномерному случаю получаем утверждение теоремы.

4.3. Двумерный случай. Рассмотрим при $h \rightarrow 0$ спектральную задачу на двумерной сфере S_a^2 радиуса a :

$$\left(-\frac{h^2}{2}\Delta + \alpha\delta(x - x_0)\right)\psi = E\psi, \quad x \in S_a^2. \quad (41)$$

Как и в трехмерном случае, квазиклассические спектральные серии выражаются в терминах классического объекта – лагранжева многообразия Λ , которое описывает классические движения, соответствующие квантовой задаче (41). Это многообразие определяется аналогично трехмерному случаю. Пусть $(x, p) \in T^*S_a^2$, где $T^*S_a^2$ – кокасательное расслоение к сфере. Рассмотрим траектории (см. рис. 3)

$$x = X(\omega, t), \quad p = P(\omega, t), \quad \omega \in S_{\sqrt{2E}}^1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H = \frac{p^2}{2}, \quad (43)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \omega, \quad |\omega| = \sqrt{2E}; \quad (44)$$

здесь $S_{\sqrt{2E}}^1$ – окружность радиуса $\sqrt{2E}$. Другими словами, из точки x_0 (в которой находится дельта-потенциал) по поверхности сферы S_a^2 с импульсом $p \in \Lambda_0$, где $\Lambda_0 = \{x = x_0, |p| = \sqrt{2E}\}$, выпускаются траектории. Получается многообразие

Рис. 3. Классические траектории на сфере S^2_a , соответствующие квантовой задаче (41).

$\Lambda = \bigcup_t g_t \Lambda_0$, диффеоморфное $S^1 \times S^1$ (рис. 4). Это многообразие описывает нужные классические движения. Проекции траекторий на сферу S^2_a суть геодезические.

Многообразие Λ имеет два цикла γ и γ_0 , где γ_0 – цикл на начальном многообразии Λ_0 , условие квантования на котором выполнено автоматически, так как $dx|_{\Lambda_0} = 0$ ($x = x_0 = \text{const}$ на Λ_0). Поэтому вклад в спектр дают лишь интегралы по циклу γ . В качестве этого цикла можно выбрать замкнутую траекторию гамильтоновой системы (43) с начальными условиями (44) (рис. 3).

Проекция многообразия Λ на x -пространство устроена аналогично случаю трехмерной сферы. В каждую точку сферы S^2_a за исключением точки x_0 и диаметрально противоположной ей точки x' проецируются две точки многообразия Λ , а именно точки (x, p) и $(x, -p)$. В точки x_0 и x' проецируется вся окружность $S^1_{\sqrt{2E}}$. Условие квантования на многообразии Λ по циклу γ и есть искомое условие на спектр задачи (41).

Если из многообразия Λ выкинуть окружность $S^1_{\sqrt{2E}}$ над точкой x_0 , то мы получим некомпактное многообразие $\Lambda' = \Lambda \setminus S^1$, которое определяет собственную функцию.

ТЕОРЕМА 3. Пусть число $E = O(1)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\text{tg} \left(\frac{1}{2h} \oint_{\gamma} (p, dx) + O(h) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{h} \sqrt{\frac{E}{2}} + O(h) \right) + c + \frac{\pi h^2}{\alpha} \right),$$

Рис. 4. Лагранжево многообразие Λ , диффеоморфное $S^1 \times S^1$, соответствующее квантовой задаче (41).

которое может быть записано в следующем виде: при $\frac{h^2}{\alpha} + \frac{\ln h^{-1}}{\pi} \rightarrow \infty$

$$\oint_{\gamma} (p, dx) = 2\pi h \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad (45)$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \sim 1/h$ при $h \rightarrow 0$; при $\alpha = \frac{\pi h^2}{\ln h + B}$, $B = \text{const}$,

$$\text{tg} \left(\frac{1}{2h} \oint_{\gamma} (p, dx) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \sqrt{\frac{E}{2}} + c + B \right), \quad (46)$$

где c – постоянная Эйлера.

Тогда существуют собственное значение E_0 оператора H такое, что $|E - E_0| = o(h)$, и функция ψ такая, что $H\psi = E\psi + o(h)$. Функция ψ при $r(x, x_0) \geq \varepsilon$ и $r(x, x') \geq \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ не зависит от h) выражается через канонический оператор Маслова на многообразии Λ' : $\psi = K_{\Lambda'}[1]$. Вне ε -окрестностей точек x_0 и x' собственная функция определяется выражением

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{C_1}{\sqrt{a \sin \frac{r(x, x_0)}{a}}} \exp \left(\frac{i\pi a \sqrt{2E}}{h} + \frac{i\pi}{4} \right) \times \\ & \times \cos \left(\frac{1}{2h} \int_{x_0}^x (p, dx) - \frac{\pi a \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi}{4} \right) + O(h); \end{aligned}$$

при $x \rightarrow x_0$ функция имеет логарифмическую особенность: $\psi \sim C_2 \ln \frac{r(x, x_0)}{a}$; здесь $C_1, C_2 = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Интегралы в теореме 3 можно вычислить: имеем, соответственно, для уравнений (45), (46)

$$\begin{aligned} E = \frac{h^2}{2a^2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 & \quad \text{при} \quad \frac{h^2}{2\alpha} - \frac{1}{\pi} \ln h \rightarrow \infty; \\ \text{tg} \left(\frac{\pi a}{h} \sqrt{2E} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \sqrt{\frac{E}{2}} + c + B \right) & \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{\pi h^2}{\ln h + B}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Наличие особенности у функции ψ является следствием некомпактности многообразия Λ' .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Как видно из теоремы 3, результат для двумерного случая не является полным аналогом результата для трехмерного случая. При почти всех значениях α условия квантования совпадают со стандартными условиями Бора–Зоммерфельда. Нестандартные условия появляются при специальной нормировке дельта-потенциала: коэффициент должен равняться $\pi h^2/(\ln h + B)$. Отметим, что специальная нормировка похожего вида в двумерном случае возникает и при аппроксимации дельта-потенциалов гладкими функциями [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точное уравнение на спектр в случае двумерной сферы имеет вид (12), где

$$Q(E; x_0) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{1 + \frac{h^2}{8a^2E}} \right) + c - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} + \frac{a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{1 + \frac{h^2}{8a^2E}} \right) - \ln 2a \right\} \quad (47)$$

– Q -функция Крейна для двумерной сферы S_a^2 [12].

Теперь получим асимптотику выражения (47) при $h \rightarrow 0$. Учитывая, что

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{1 + \frac{h^2}{8a^2E}} \right) \Big|_{h \rightarrow 0} = \frac{a\sqrt{2E}}{h} + O(h),$$

а также используя разложение при $h \rightarrow 0$ [22]

$$\omega \left(\frac{a\sqrt{2E}}{h} + O(h) \right) = \ln \left(\frac{a\sqrt{2E}}{h} + O(h) \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{a\sqrt{2E}/h + O(h)} = \\ = \ln \left(\frac{a\sqrt{2E}}{h} + O(h) \right) + O(h),$$

приходим к следующей асимптотике условия квантования (12) с точностью $o(1)$ при $h \rightarrow 0$:

$$-\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1}{h} \sqrt{\frac{E}{2}} + O(h) \right) + c - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi a \sqrt{2E}}{h} + O(h) \right) \right\} - \frac{h^2}{2\alpha} = 0$$

или, в более привычной форме,

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi a \sqrt{2E}}{h} + O(h) \right) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1}{h} \sqrt{\frac{E}{2}} + O(h) \right) + c + \frac{\pi h^2}{\alpha} \right\}. \quad (48)$$

Рассматривая данное условие квантования при различных значениях правой части, получаем условия на спектр, описанные в теореме.

Вне конечной окрестности точки x_0 согласно формуле (13) точное выражение для собственной функции, соответствующей решениям $z = E$ уравнения (12), на двумерной сфере выражается через функцию Лежандра первого рода [12]:

$$\psi(x; x_0, h, E) = \frac{1}{4 \cos(\pi I_1(h, E))} P_{-1/2+I_1(h, E)} \left(-\cos \frac{r(x, x_0)}{a} \right), \quad (49)$$

где

$$I_1(h, E) = \frac{a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{1 + \frac{h^2}{8a^2E}}, \quad I_1(h, E)|_{h \rightarrow 0} = \frac{a\sqrt{2E}}{h} + O(h).$$

Используя выражение $P_\nu(-z) = e^{\mp i\nu\pi} P_\nu(z) - (2/\pi) \sin(\pi\nu) Q_\nu(z)$, где $Q_\nu(z)$ – функция Лежандра второго рода (знак плюс в $e^{\mp i\nu\pi}$ выбирается при $\text{Im } z > 0$, знак минус – при $\text{Im } z < 0$, см., например, справочник [23]), а также разложения функций Лежандра $P_\nu(\cos \theta)$, $Q_\nu(\cos \theta)$ при $\nu \rightarrow \infty$, получаем при $r(x, x_0) \geq \varepsilon > 0$ следующую асимптотику для собственной функции (49) при $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x; x_0, h, E) &= \frac{C_3}{\cos \frac{\pi a\sqrt{2E}}{h} \sqrt{\sin \frac{r(x, x_0)}{a}}} \times \\ &\times \cos \left(\frac{r(x, x_0) \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi a \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi}{4} \right) + O(h), \end{aligned} \quad (50)$$

где $C_3 = \text{const}$. Известно [23], что функция Лежандра первого рода $P_\nu(x)$ в окрестности точки $x = -1$ (при $x \rightarrow x_0$ аргумент функции Лежандра в выражении (49) как раз стремится к -1) имеет логарифмическую особенность. Таким образом, при $x \rightarrow x_0$ собственная функция $\psi(x; x_0, h, E)$, соответствующая собственному значению, являющемуся решением уравнения (48), при $h \rightarrow 0$ имеет асимптотику $\psi \sim C_2 \ln \frac{r(x, x_0)}{a}$, следовательно, в окрестности точки x_0 для нее справедливо разложение (5)–(7), откуда мы заключаем, что $\psi(x; x_0, h, E) \in D(H)$.

При выполнении условий на спектр, сформулированных в теореме, функция $\psi(x; x_0, h, E)$ вне конечной окрестности точки x_0 будет выражаться через канонический оператор Маслова: $\psi = K_{\Lambda'}[1]$ на многообразии Λ' . Проверим это. Методом канонического оператора Маслова [17] построим решение уравнения

$$-\frac{h^2}{2} \Delta \psi = E \psi + O(h^2) \quad (51)$$

в неособых картах, а именно вне конечных окрестностей точек x_0 и x' (см. рис. 5). Аналогично трехмерному случаю неособые карты на многообразии Λ выбирают так, чтобы точки многообразия из первой и второй карт имели противоположные импульсы. Это также соответствует тому, что из точки $x_0 \in S_a^2$ в любую точку $x \in S_a^2$ можно попасть, двигаясь по сфере, по двум траекториям. В итоге

Рис. 5. Карты на лагранжевом многообразии Λ' , диффеоморфном $\mathbb{R} \times S^1$. Серый цвет соответствует особой карте – окрестности точки x' (x' – точка, диаметрально противоположная точке x_0).

аналогично трехмерному случаю получаем выражение для канонического оператора $K_{\Lambda'}[1]$:

$$K_{\Lambda'}[1] = \frac{2}{\sqrt{J}} \exp\left(\frac{i\pi a \sqrt{2E}}{h} + \frac{i\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{r(x, x_0) \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi a \sqrt{2E}}{h} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (52)$$

где

$$r(x, x_0) \sqrt{2E} = \int_{x_0}^x (p, dx) \quad (53)$$

– интеграл вдоль траектории γ ,

$$\pi a \sqrt{2E} = \int_{x_0}^{x'} (p, dx), \quad (54)$$

$J = a \sin \frac{r(x, x_0)}{a}$ – якобиан. При $x \rightarrow x_0$ функция $\psi = K_{\Lambda'}[1]$ имеет особенность вида $r^{-1/2}(x, x_0)$, следовательно, мы не можем выбирать ее в качестве собственной функции оператора H в окрестности точки x_0 , поскольку согласно разложению (5)–(7) в окрестности точки x_0 собственная функция из области определения оператора H должна иметь логарифмическую особенность.

Конструкция канонического оператора (52) с точностью до константы совпадает с (50), таким образом, мы имеем равенство $\psi = K_{\Lambda'}[1]$ с точностью $O(h)$. Для функции ψ , удовлетворяющей этому уравнению, выполняется коммутационное соотношение (22), откуда автоматически следует справедливость равенства $H\psi = E_0\psi + O(h^2)$. Таким образом, с использованием леммы аналогично предыдущим случаям получаем утверждение теоремы.

Благодарности. Авторы благодарят А. А. Толченникова за полезные обсуждения. Работа поддержана РФФИ (грант № 08-01-00726) и Министерством образования и науки РФ (гранты № 2.1.1/3704, 2.1.1/4540).

Список литературы

- [1] R. de L. Kronig, W. G. Penney, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **130**:814 (1931), 499–513.
- [2] H. Bethe, R. Peierls, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **148** (1935), 146–156.
- [3] M. L. Goldberger, F. Seitz, *Phys. Rev.*, **71**:5 (1947), 294–310.
- [4] Я. Б. Зельдович, *ФТТ*, **1** (1959), 1638–1645.
- [5] S. Fassari, G. Inglese, *Helv. Phys. Acta*, **67**:6 (1994), 650–659; **69**:2 (1996), 130–140; **70**:6 (1997), 858–865.

- [6] V. D. Krevchik, A. B. Grunin, A. K. Aringazin, M. B. Semenov, *Hadronic J. Suppl.*, **18** (2003), 261–294.
- [7] Q.-Z. Peng, X.-D. Wang, J.-Y. Zeng, *Sci. China Ser. A*, **34**:10 (1991), 1215–1221.
- [8] В. Д. Кревчик, Р. В. Зайцев, *ФТТ*, **43**:3 (2001), 504–507.
- [9] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *ДАН СССР*, **137** (1961), 1011–1014.
- [10] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Nøegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, AMS, Providence, RI, 2005.
- [11] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbations of Differential Operators*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **271**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [12] J. Brüning, V. Geyler, *J. Math. Phys.*, **44**:2 (2003), 371–405, arXiv:math-ph/0205030.
- [13] J. Brüning, V. Geyler, K. Pankrashkin, *Rev. Math. Phys.*, **20**:1 (2008), 1–70, arXiv:math-ph/0611088.
- [14] Ё. Брюнинг, В. А. Гейлер, *ТМФ*, **119**:3 (1999), 368–380.
- [15] И. С. Лобанов, *Спектральные свойства гамильтонианов явнорешаемых моделей мезоскопических структур: декорированные графы и квантовые точки*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Мордовский гос. ун-т им. Н. П. Огарева, Саранск, 2005.
- [16] В. П. Маслов, *Асимптотические методы и теория возмущений*, Наука, М., 1988.
- [17] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [18] В. Р. Коган, *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **12**:11 (1969), 1675–1680.
- [19] В. В. Кучеренко, *ТМФ*, **1**:3 (1969), 384–406.
- [20] В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, И. И. Чучаев, *Сиб. матем. журн.*, **36**:4 (1995), 828–841.
- [21] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, Квантовая механика. Нерелятивистская теория, Наука, М., 2001.
- [22] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, М., 1964.
- [23] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. I, Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию 13.02.2010