Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Васильев, А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рыбалко, Д. Н. Удин, Модель пространственно неоднородной одномерной активной среды, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 506–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:42:22

МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

Аналитически исследуется динамика одномерных дискретных моделей однокомпонентной активной среды, представляющих собой пространственно неоднородные системы диффузионно сцепленных одномерных кусочно линейных отображений. При этом неоднородности (дефекты) интерпретируются как различие в параметрах отображений, составляющих модель. Рассмотрены два класса дефектов: пространственно-периодические и локализованные. В пространстве параметров дается аналитическая оценка области регулярной динамики. Для модели с периодической неоднородностью найдено точное аналитическое разбиение на области с хаотическим и регулярным типами поведения. Получены численные результаты для модели с одним дефектом. Исследована возможность появления того или иного типа динамики всей системы в целом в зависимости от степени неоднородности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представление распределенных сред посредством их приближения дискретными аналогами является достаточно эффективным методом исследования. При этом дискретизация может быть как пространственная, так и пространственно-временная. При пространственной дискретизации исходная система аппроксимируется конечным или счетным набором элементов, между которыми введен определенный вид связи. Каждый такой элемент представляет собой некоторую динамическую систему с малым числом переменных. Если в дополнение к этому динамическая система задается отображением, т.е. определенным преобразованием с дискретным временем, то говорят о пространственно-временной дискретизации исходной системы. Пространственно-временные дискретные модели называют *решеточными* или *сеточными*. К исследованию дискретных моделей сводятся многие задачи теории нелинейных распределенных сред. Например, некоторые проблемы статистической физики могут быть эффективно изучены посредством представления сред через пространственно-временной аналог [1–4], распределенные возбудимые системы часто описывают дискретными аналогами [4, 5] и т.п. (см. [6–13] и приведенные там ссылки). Более того, к исследованию пространственно-временных систем сводится любой численный анализ непрерывных систем, поскольку

*Московский государственный университет, Москва, Россия

ку численная процедура всегда включает в себя использование тех или иных разностных схем.

Конструкция пространственно-временных решеток может быть различной. Наиболее часто исследуются решетки, в которых каждый элемент тем или иным образом взаимодействует только со своими ближайшими соседями (см., например, [8–13] и приведенные там ссылки). Другой вид связи предполагает глобальное сцепление, при котором каждый элемент сети связан с каждым [14–16]. При локальном взаимодействии, как правило, изучается диффузионный вид связи элементов [1, 2, 4, 8–13] (см. также цитированную там литературу), в основном этот вид связи используется для моделирования таких явлений, как пространственно-временной хаос, структурообразование и самоорганизация.

Если по всей решетке значение управляющего параметра семейства отображений, которые ее составляют, является неизменным, то такая решетка называется *однородной*. Меняя этот параметр и величину диффузии (или силу связи), можно исследовать фазовую диаграмму, возможные фазовые переходы и возникающие при этом пространственно-временные картины. Если же параметры отображений различны, то такая сеть уже не будет однородной и ее исследование является намного более сложной задачей. Практически во всех работах, посвященных изучению диффузионно взаимодействующих отображений, исследуются (как правило, численно) однородные сети. Однако очевидно, что с физической точки зрения однородность пространства (в данном случае идентичность всех элементов) – это идеализация, принятая для упрощения анализа, поэтому представляет большой интерес определить, как будет качественно меняться динамика системы при появлении неоднородностей. При этом неоднородности могут быть самые разные: от отдельных дефектов до периодической неоднородности по всему пространству.

Данная работа посвящена исследованию пространственно неоднородных одномерных систем (т.е. цепочек) диффузионно связанных кусочно линейных одномерных отображений. Под отображениями понимается преобразование интервала I в себя: $T_a: I \rightarrow I$, где $I = [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^1$, $x \mapsto G(x, a)$, $x \in I$, $G(x, a)$ – определенная функция, a – параметр (или в общем случае совокупность параметров). В терминах итераций k это можно записать как $x(k+1) = G(x(k), a)$, $x \in I$. При этом неоднородности задаются как отображения с различными параметрами. Сами отображения (т.е. функции G) выбраны таким образом, что системы представляют собой модели однокомпонентной активной среды [17]. На основе точного расчета показателей Ляпунова исследованы различные режимы поведения периодически неоднородной системы и системы с одним дефектом, а также описана структура их фазового пространства.

2. МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ АКТИВНЫХ СРЕД

Основным результатом данного раздела является описание динамики двух видов неоднородных активных сред: модели, представляющей собой (одномерную) кольцевую решетку сцепленных отображений с периодической неоднородностью, и цепочки с единственным дефектом.

2.1. Однородная среда. Рассмотрим систему N диффузионно сцепленных отображений вида

$$x_n(k+1) = G(x_n(k), \alpha, \gamma) + \varepsilon(x_{n+1}(k) - 2x_n(k) + x_{n-1}(k)) \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями $x_{n+N}(k) \equiv x_n(k)$, где $n = 1, 2, \dots, N$ – дискретная пространственная координата, $k = 0, 1, 2, \dots$ – дискретная временная координата, $\varepsilon > 0$ – коэффициент диффузии, который считается постоянным, и $\alpha > 0$, γ – параметры. В качестве функции G будем рассматривать функцию

$$G(x, \alpha, \gamma) = x + \alpha F(x) - \gamma = \begin{cases} (1 - 2\alpha)x - \gamma, & x < 1/2, \\ (1 - 2\alpha)x - \gamma + 2\alpha, & x > 1/2. \end{cases} \quad (2)$$

Функция $G(x, \alpha, \gamma)$ выбрана в таком виде не случайно. Система отображений (1) с элементами вида (2) является дискретным вариантом базовой модели однокомпонентной одномерной активной среды, описываемой уравнением типа уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \Phi(U).$$

Как известно, это уравнение часто встречается в задачах биофизики, теории горения, химической кинетики (например, в реакции Белоусова–Жаботинского), твердотельной электроники и т.д. (см., например, [18–21]).

Легко видеть, что $G(x, \alpha, \gamma)$ есть кусочно линейная функция, график которой имеет постоянный наклон, равный $(1 - 2\alpha)$. В зависимости от значений параметра α отображение, порождаемое функцией G , $x \mapsto G(x, \alpha, \gamma)$, может обладать качественно различными типами поведения. При $0 < \alpha < 1$ (рис. 1а) его поведение является регулярным и отображение в зависимости от величины γ обладает одной или двумя устойчивыми точками (точки A и B), которые притягивают почти все точки фазового пространства. При $\alpha > 1$ наклон графика отображения превышает по модулю единицу (см. рис. 1б), что соответствует экспоненциальному разбеганию близких траекторий. При этом, если движение фазовой точки является финитным, динамика будет хаотической.

Однородная модель (1), составленная из сцепленных функций вида (2), была подробно описана в монографии [17]. Приведем основные результаты этого исследования. Систему (1), (2) можно рассматривать как N -мерное кусочно линейное отображение $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Поскольку $G(x, \alpha, \gamma)$ – кусочно линейная функция с постоянной производной, то дифференциал D_f отображения f – матрица с постоянными коэффициентами. Поэтому легко определить показатели Ляпунова λ_i такого отображения. Если ρ_s – собственные числа D_f , то $\lambda_s = \ln |\rho_s|$. Если среди всех ρ_s имеется собственное число, лежащее на комплексной плоскости вне единичного круга, то любая траектория отображения f неустойчива. В противном случае динамика модели будет регулярной. Таким образом, вопрос о том, каким является поведение системы, сводится к изучению расположения корней ρ_s . Для вычисления ρ_s характеристический многочлен для дифференциала N -мерного отображения выражается через определители трех диагональных матриц разной размерности, для которых можно получить рекуррентные соотношения.

Рис. 1. Отображение $x \mapsto G(x, \alpha, \gamma)$: а – при $\alpha = 0.25$, $\gamma = -0.2$; б – при $\alpha = 125$, $\gamma = -1$.

Рассматривая эти соотношения как разностные уравнения с заданными начальными условиями, можно найти их решения, которые будут пропорциональны полиномам Чебышева от линейной функции собственных чисел D_f . Используя свойства полиномов Чебышева, можно показать, что характеристический многочлен сводится к квадратному трехчлену от известной функции ρ_s . Вычисление значений ρ_s и анализ их расположения на комплексной плоскости приводят к разбиению пространства параметров системы отображений (1), (2) на две области (рис. 2):

1. Область D_1 , задаваемая такими параметрами α и ε , что все собственные числа дифференциала отображения f по модулю меньше единицы, так что модель обладает регулярной динамикой.
2. Область D_2 , определяемая условием, что среди собственных значений ρ_s есть, по крайней мере, один корень, удовлетворяющий неравенству $|\rho_s| > 1$. При этом в общем случае динамика может быть инфинитной. Однако при финитности движения говорят о *хаотическом* поведении системы (1), (2) [9–11].

Система (1), (2) является пространственно однородной в том смысле, что все составляющие ее элементы (т.е. отображения $x \mapsto G(x, \alpha, \gamma)$) одинаковы. Однако наша цель – рассмотреть пространственно неоднородную диффузионную модель. Неоднородность может быть связана либо с тем, что в разных точках пространства действуют различные типы отображения, либо с тем, что отображения одинаковы во всех элементах, но параметры отображения различны.

Для проведения аналитического исследования остановимся на последнем случае, т.е. допустим, что каждый элемент по-прежнему является кусочно линейным отображением $x_i \mapsto G(x_i, \alpha_i, \gamma)$ (см. (2)), но, в отличие от однородного случая, будем считать, что имеются два типа элементов, отличающиеся друг от друга значениями параметров α_i

Рис. 2. Пространство параметров однородной кольцевой цепочки диффузионно связанных отображений (1), (2).

функции $G(x_i, \alpha_i, \gamma)$ ¹⁾. Предположим, что одному типу элементов соответствует параметр α , а другому – параметр β . Чтобы избежать краевых эффектов, как и для однородного случая (1), будем считать, что цепочка замкнута в кольцо, т.е. $x_{n+N}(k) \equiv x_n(k)$.

Мы подробно исследуем два качественно различных случая: модель с периодически расположенными неоднородностями и модель с единственным дефектом.

2.2. Кольцевая модель с периодической неоднородностью по пространству. Периодическая пространственная неоднородность означает, что в цепочке периодически чередуются элементы с различными значениями параметра функции G , т.е. параметры изменяются следующим образом: $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots$. Динамику цепочки с такой неоднородностью можно полностью описать аналитически.

Рассмотрим сцепленную одномерную сеть вида

$$x_n(k+1) = \begin{cases} G(x_n(k), \alpha, \gamma) + \varepsilon(x_{n+1}(k) - 2x_n(k) + x_{n-1}(k)) & \text{для нечетных } n, \\ G(x_n(k), \beta, \gamma) + \varepsilon(x_{n+1}(k) - 2x_n(k) + x_{n-1}(k)) & \text{для четных } n, \end{cases} \quad (3)$$

где $x_{n+N}(k) \equiv x_n(k)$, функция G по-прежнему задается соотношением (2) и число N четное (в противном случае цепочка (3) не замкнется в кольцо). Исследуем, при каких значениях параметров α, β и ε периодически неоднородная кольцевая модель (3), (2) будет обладать качественно различными режимами поведения. Для этого вычислим показатели Ляпунова системы (3), (2), используя развитую в работе [17] технику.

Дифференциал N -мерного отображения, порождаемого системой вида (3), с учетом граничных условий имеет вид

$$D_f \equiv Q_N = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon - 2\alpha & \varepsilon & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2\varepsilon - 2\beta & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - 2\varepsilon - 2\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 1 - 2\varepsilon - 2\beta \end{pmatrix}.$$

¹⁾Вообще говоря, элементы могут различаться и величиной параметра γ , но, как будет показано далее, характер динамики как неоднородной, так и однородной системы не зависит от γ .

Чтобы найти собственные значения ρ_s , $s = 1, 2, \dots, N$, матрицы Q_N , вычислим детерминант

$$\det(Q_N - \rho I_N) = \begin{vmatrix} 2z_1\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 2z_2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2z_1\varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots & 2z_2\varepsilon \end{vmatrix},$$

где z_1 и z_2 определяются из соотношений $1 - 2\varepsilon - 2\alpha - \rho = 2z_1\varepsilon$, $1 - 2\varepsilon - 2\beta - \rho = 2z_2\varepsilon$. Разлагая его по первой строке, получим

$$\det(Q_N - \rho I_N) = 2z_1\varepsilon B_{N-1} - \varepsilon^2 B_{N-2} - 2\varepsilon^N - \varepsilon^2 \widehat{B}_{N-2},$$

где

$$B_N = \begin{vmatrix} 2z_1\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 2z_2\varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2z_1\varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2z_2\varepsilon \end{vmatrix}, \quad \widehat{B}_N = \begin{vmatrix} 2z_2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 2z_1\varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2z_2\varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2z_1\varepsilon \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что $\widehat{B}_N(z_1, z_2)$ получается из $B_N(z_1, z_2)$ заменой $z_1 \leftrightarrow z_2$, поэтому найдем $B_N(z_1, z_2)$ с помощью рекуррентного соотношения. Разлагая B_N по первой строке, получим

$$B_N = \begin{cases} 2z_1\varepsilon B_{N-1} - \varepsilon^2 B_{N-2} & \text{для четных } N, \\ 2z_2\varepsilon B_{N-1} - \varepsilon^2 B_{N-2} & \text{для нечетных } N. \end{cases}$$

Отсюда легко выразить детерминанты нечетного порядка через детерминанты четного порядка:

$$B_{2N+1} = \frac{B_{2N+2} + \varepsilon^2 B_{2N}}{2z_1\varepsilon}, \quad (4)$$

и получить рекуррентное соотношение для детерминантов четного порядка:

$$B_{2N} = \varepsilon^2(4z_1z_2 - 2)B_{2N-2} - \varepsilon^4 B_{2N-4}. \quad (5)$$

Соотношение (5) можно интерпретировать как разностное уравнение с начальными условиями

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \varepsilon^2(4z_1z_2 - 1). \quad (6)$$

Тогда, решая систему (5), (6) и учитывая (4), получаем

$$B_N(z_1, z_2) = \begin{cases} \varepsilon^N U_N(z) & \text{для четных } N, \\ \varepsilon^N \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} U_N(z) & \text{для нечетных } N, \end{cases}$$

где $U_N(z)$ – полином Чебышева второго рода. В свою очередь, соотношения для $\widehat{B}_N(z_1, z_2)$ имеют вид

$$\widehat{B}_N(z_1, z_2) = \begin{cases} \varepsilon^N U_N(z) & \text{для четных } N, \\ \varepsilon^N \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} U_N(z) & \text{для нечетных } N. \end{cases}$$

Используя соотношения для B_{N-1} , B_{N-2} и $\widehat{B}_{N-2}$, находим

$$\det(Q_N - \rho I_N) = 2\varepsilon^N (zU_{N-1}(z) - U_{N-2}(z) - 1). \quad (7)$$

Теперь нетрудно определить собственные значения дифференциала отображения (3), (2). Из (7) следует, что

$$zU_{N-1}(z) - U_{N-2}(z) - 1 = 0, \quad (8)$$

или $T_N(z) - 1 = 0$. Здесь мы воспользовались соотношением между полиномами Чебышева второго рода $U_N(z)$ и первого рода $T_N(z)$. Поскольку

$$T_N(z) = \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^N + (z + \sqrt{z^2 - 1})^N}{2},$$

где $z^2 = z_1 z_2$, то, полагая $t = z - \sqrt{z^2 - 1}$, из (8) получим

$$\frac{1}{2} \left(t^N + \frac{1}{t^N} \right) - 1 = 0,$$

или $(t^N - 1)^2 = 0$. Следовательно, $t_s = e^{i2\pi s/N}$ и $z_s = \cos(2\pi s/N)$, $s = 1, 2, \dots, N$. Вспоминая, что $2z_1\varepsilon \cdot 2z_2\varepsilon = 4z^2\varepsilon^2$, приходим к несложному уравнению:

$$(1 - 2\varepsilon - 2\alpha - \rho)(1 - 2\varepsilon - 2\beta - \rho) = 4\varepsilon^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{N} s \right).$$

Решая его относительно ρ , найдем набор собственных значений дифференциала отображения (3), (2):

$$\rho_{1,2}^s = 1 - 2\varepsilon - \alpha - \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{N} s \right)}, \quad (9)$$

где $s = 1, 2, \dots, N/2$. Динамика системы (3), (2) будет полностью регулярной, если все значения ρ_s будут находиться внутри единичного круга на комплексной плоскости. Так как все $\rho_{1,2}^s$ действительны, то условие существования регулярной динамики выполнено, если справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 2\varepsilon + \alpha + \beta &> \sqrt{4\varepsilon^2 + (\alpha - \beta)^2}, \\ \varepsilon + \frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2} &< 1. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon, \alpha, \beta > 0$, то первое неравенство этой системы выполняется всегда. В свою очередь, область в пространстве параметров, в которой $\lambda_s > 0$, удовлетворяет условию $\varepsilon + (\alpha + \beta)/2 + \sqrt{\varepsilon^2 + (\alpha - \beta)^2/4} > 1$.

Граница раздела областей с качественно различной (регулярной и хаотической) динамикой – это поверхность в трехмерном пространстве параметров $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, которая, очевидно, задается выражением

$$\varepsilon + \frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}} = 1. \quad (10)$$

Для наглядности приведем сечения фазового пространства системы (3), (2) плоскостями $\delta = \text{const}$, где $\delta = \beta - \alpha$ – параметр неоднородности (рис. 3). Пусть D_1 обозначает область регулярной динамики, а D_2 – область, где $\lambda_s > 0$. Граница раздела этих областей задается уравнением, вытекающим из (10). Для сравнения на рис. 3а,б штриховыми линиями представлены границы раздела областей D_1 и D_2 для *однородной* ($\delta = 0$) системы сцепленных отображений (см. рис. 2). Как следует из рис. 2, при $\delta > 1$ при любых значениях ε, α модель проявляет хаотическую динамику. При $\delta < 1$ появляется область D_1 , где ее динамика регулярна. Эта область в определенном диапазоне значений параметров $0 < \delta < 1$ будет подобластью области регулярного поведения для однородной модели. При $-1 < \delta < 0$ среди значений параметров ε, α существуют такие, при которых неоднородная модель имеет регулярную динамику, тогда как однородная – хаотическую. Ограничение $\alpha > -\delta$ соответствует условию $\beta > 0$. При $\delta < -1$ область D_1 исчезает и при всех возможных значениях ε, α модель (3), (2) проявляет только хаотические свойства. Непосредственно из рис. 3 следует возможность двух качественно различных вариантов: параметр α принадлежит области порядка, параметр β – области хаоса с $\lambda_s > 0$, а общая динамика является регулярной, и наоборот, общая динамика периодически неоднородной модели может быть хаотической. Реализация того или иного варианта зависит от величины параметра диффузии ε .

Рис. 3. Сечения плоскостями $\delta = \text{const}$ пространства параметров модели (2), (3): а – при $-1 < \delta < 0$; б – при $0 < \delta < 1$.

2.3. Кольцевая модель с единственным дефектом. Рассмотрим теперь другой интересный случай пространственно неоднородной модели диффузионно сцепленных отображений – систему с единственным дефектом, т.е. в этом случае одному из составляющих ее N элементов соответствует параметр β (см. формулу (2)), а остальным

$N - 1$ элементом – параметр α . Без потери общности будем считать, что этот один выделенный элемент находится в точке $n = 1$. Таким образом, рассмотрим модель следующего вида:

$$x_n(k+1) = \begin{cases} G(x_n(k), \alpha, \gamma) + \varepsilon(x_{n-1}(k) - 2x_n(k) + x_{n+1}(k)), & n = 2, 3, \dots, N, \\ G(x_1(k), \beta, \gamma) + \varepsilon(x_N(k) - 2x_1(k) + x_2(k)), & n = 1, \end{cases} \quad (11)$$

где $x_{n+N} \equiv x_n(k)$. Пусть по-прежнему функция $G(x, \alpha, \gamma)$ задается выражением (2). Определим дифференциал соответствующего отображения для системы (11), (2):

$$D_f \equiv Q_N = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon - 2\beta & \varepsilon & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2\varepsilon - 2\alpha & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - 2\varepsilon - 2\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 1 - 2\varepsilon - 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Если использовать для нахождения показателей Ляпунова модели (11), (2) ту же технику, что и ранее (см. п. 2.1, 2.2, а также монографию [17]), то решение характеристического уравнения для дифференциала отображения (12) сведется к определению корней многочлена порядка $2N + 2$. Это можно сделать только численно, и поэтому для исследования этой модели применим несколько иной подход.

Пользуясь оценкой собственных значений матрицы (12) по теореме Гершгорина [22], построим оценку области регулярной динамики системы (11), (2). Согласно утверждению этой теоремы все собственные числа матрицы $A = \{a_{ij}\}_{n \times n}$ принадлежат объединению кругов на комплексной плоскости:

$$\rho_s \in \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : \|z - a_{ij}\| \leq R'_i\}, \quad s = 1, 2, \dots, N,$$

где R'_i – либо строчная почти норма матрицы A , $R'_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, либо столбцевая почти норма матрицы A , $R'_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$. Так как дифференциал отображения (12) представляет собой действительную симметричную матрицу, то, во-первых, строчная и столбцевая почти нормы совпадают, а во-вторых, собственные значения D_f являются действительными. Следовательно, круги Гершгорина преобразуются в интервалы на действительной оси:

$$\rho_s \in \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{R} : |z - a_{ij}| \leq R'_i\}, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Так как $\varepsilon > 0$, из выражения (12) легко определить

$$R'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = |\varepsilon| + |\varepsilon| = 2\varepsilon.$$

Поскольку R'_i не зависит от i и в дифференциале отображения D_f (12) присутствуют только два типа различных диагональных элементов, то собственные значения D_f принадлежат объединению двух интервалов

$$\{z \in \mathbb{R} : |1 - 2\varepsilon - 2\alpha - z| \leq 2\varepsilon\} \cup \{z \in \mathbb{R} : |1 - 2\varepsilon - 2\beta - z| \leq 2\varepsilon\}.$$

Тогда, учитывая, что $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$, получим оценку *сверху* для модуля собственных значений D_f :

$$|\rho_s| \leq \begin{cases} \beta + 2\varepsilon, & \alpha < \beta, \\ \alpha + 2\varepsilon, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

Таким образом, область $\tilde{D}_1$ в пространстве параметров $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{D}_1 : \begin{cases} \beta + 2\varepsilon < 1 & \text{при } \alpha < \beta, \\ \alpha + 2\varepsilon < 1 & \text{при } \alpha > \beta, \end{cases} \quad (13)$$

соответствует регулярной динамике неоднородной модели (11), (2), а область

$$\tilde{D}_2 : \begin{cases} \beta + 2\varepsilon > 1 & \text{при } \alpha < \beta, \\ \alpha + 2\varepsilon > 1 & \text{при } \alpha > \beta, \end{cases} \quad (14)$$

соответствует положительным λ_s . Области $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ приведены на рис. 4. Область $\tilde{D}_1$ является *нижней* оценкой области регулярной динамики, так как она получена с помощью оценки *сверху* собственных значений дифференциала отображения. Любая точка пространства параметров из $\tilde{D}_1$ будет соответствовать регулярной динамике модели, а любая точка из $\tilde{D}_2$ – либо регулярной, либо, если движение финитно, хаотической динамике.

Рис. 4. Оценка области регулярной динамики неоднородных цепочек с двумя типами элементов в пространстве параметров $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Полученная оценка верна не только для рассмотренной модели с одним дефектом, но и для *целого класса* кольцевых систем отображений с диффузионной связью вида (1), характеризующихся наличием двух типов элементов (с разными параметрами α_i функции $G(x_i, \alpha_i, \gamma)$). Дело в том, что в данном случае количество элементов каждого типа и их

взаимное расположение *не имеют значения*. В самом деле, почти нормы дифференциалов отображения всех таких систем совпадают, и центры двух возможных интервалов, в которых по теореме Гершгорина содержатся собственные значения D_f , также общие.

Согласно следствию из теоремы Гершгорина в случае, если два интервала, в которых проводится оценка ρ_s , не пересекаются, происходит “кластеризация” собственных значений дифференциала отображения, а именно q собственных значений ρ_s , $s = 1, 2, \dots, q$, будут лежать внутри одного интервала, а $N - q$ собственных значений ρ_s , $s = q + 1, q + 2, \dots, N$, — внутри другого интервала. Здесь q — число элементов с параметром α , $N - q$ — число элементов с параметром β . Однако учет этого свойства не позволяет улучшить оценку области регулярной динамики.

Сравним оценку (13) с точным результатом, полученным для кольцевой модели с пространственно-периодической неоднородностью (см. п. 2.2). Очевидно, эта модель относится к классу, для которого приведенная оценка остается справедливой. Для наглядности построим сечения $\delta = \text{const}$ области D_1 , соответствующей регулярной динамике системы (3), (2), и ее оценки $\tilde{D}_1$, они приведены на рис. 5. Из этого рисунка следует, что оценка (13) области регулярной динамики достаточно хорошо приближает истинное поведение модели, но не отражает того факта, что при $-1 < \delta < 0$ область регулярной динамики для системы (3), (2) шире области регулярной динамики пространственно-однородной системы.

Рис. 5. Оценка и точный результат для области регулярной динамики модели с периодической неоднородностью: а — при $-1 < \delta < 0$; б — при $0 < \delta < 1$.

Вернемся теперь к системе отображений (11), (2), пространственная неоднородность которой связана с наличием только одного дефекта, и *численно* найдем собственные значения дифференциала отображения (12). Для этого случая характеристический многочлен можно записать следующим образом:

$$\det(Q_N - \rho I_N) = \begin{vmatrix} 2z\varepsilon + 2(\alpha - \beta) & \varepsilon & 0 & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 2z\varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2z\varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 2z\varepsilon \end{vmatrix},$$

где $2z\varepsilon = 1 - 2\varepsilon - 2\alpha - \rho$. Разлагая $\det(Q_N - \rho I_N)$ по первой строке, получим

$$\det(Q_N - \rho I_N) = [2z\varepsilon + 2(\alpha - \beta)] B_{N-1} - 2\varepsilon^2 B_{N-2} - 2(-1)^N \varepsilon^N, \quad (15)$$

где

$$B_N = \begin{vmatrix} 2z\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & 2z\varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2z\varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2z\varepsilon \end{vmatrix}.$$

Как и ранее, используя разложение B_N по первой строке, найдем рекуррентное соотношение $B_N = 2z\varepsilon B_{N-1} - \varepsilon^2 B_{N-2}$. Его можно интерпретировать как разностное уравнение с начальными условиями $B_1 = 2z\varepsilon$, $B_2 = \varepsilon^2(4z^2 - 1)$, решение которого будет иметь вид

$$B_N = \varepsilon^N U_N(z), \quad (16)$$

где $U_N(z)$ — полином Чебышева второго рода. Учитывая (16) и вид $U_N(z)$,

$$U_N(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{N+1} - (z - \sqrt{z^2 - 1})^{N+1}}{2\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{(\frac{1}{t})^{N+1} - t^{N+1}}{\frac{1}{t} - t},$$

где $t = z - \sqrt{z^2 - 1}$, из (15) получим следующее соотношение:

$$\det(Q_N - \rho I_N) = 2\varepsilon^N \left[\frac{t^{2N+1} + 1}{2t^N} + \left(\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon} \right) \frac{1 - t^{2N}}{(1 - t^2)t^{N-1}} - (-1)^N \right].$$

Таким образом, характеристическое уравнение для дифференциала отображения (12) можно записать как

$$\begin{aligned} t^{2N+2} + 2 \left(\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon} \right) t^{2N+1} - t^{2N} - 2(-1)^N t^{N+2} + \\ + 2(-1)^N t^N + t^2 - 2 \left(\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon} \right) t - 1 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь, численно определив корни уравнения (17), легко вычислить ρ_s . Сравнивая значения ρ_s с единицей при всех возможных значениях параметров $\alpha, \beta, \varepsilon$, для кольцевой цепочки диффузионно связанных отображений с одним дефектом нетрудно получить области D_1 и D_2 с качественно различной динамикой. На рис. 6 приведены сечения этих областей плоскостями $\delta = \text{const}$, где $\delta = \beta - \alpha$. Штриховой линией указана оценка (13) области регулярной динамики. Так же, как для модели с периодической неоднородностью, в данном случае при положительных δ эта область шире, чем предсказывает оценка. Однако, в отличие от периодической неоднородности, при $\delta < 0$ оценка полностью совпадает с численным результатом и одновременно с результатом для однородной цепочки. Таким образом, если один из элементов системы имеет параметр меньший, чем остальные, то на характер динамики всего ансамбля такой дефект не окажет никакого

Рис. 6. Характерный вид сечений плоскостями $\delta = \text{const}$ пространства параметров цепочки с $N = 20$ элементами с одним дефектом: а – при $\delta = -0.3$; б – при $\delta = 0.3$.

влияния. Если же параметр отличается в большую сторону, это сужает область регулярной динамики модели по сравнению с однородным случаем.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалось поведение систем диффузионно сцепленных одномерных отображений, моделирующих одномерную активную среду с пространственной неоднородностью. Рассмотрены различные типы неоднородностей. Для всех систем, пространственная неоднородность которых связана с наличием двух типов элементов, отличающихся значением параметра, *аналитически* построена нижняя оценка области в пространстве параметров, в которой ансамбль проявляет регулярную динамику. Эта оценка проведена на основе локализации собственных значений дифференциала отображения. Для двух моделей из того же класса получены точные аналитические и численные результаты исследования характера динамики.

Все три рассмотренных случая, т.е. оценка области регулярной динамики (13) для класса моделей с двумя типами элементов, точные результаты для периодически неоднородной системы (рис. 3) и модели с одним дефектом (рис. 6), выявляют возможность двух вариантов общей динамики системы. В первом случае, когда параметр одного типа элементов принадлежит области регулярной динамики, параметр другого типа элементов принадлежит области с неустойчивым поведением, а общая динамика модели является регулярной, а во втором, наоборот, динамика всей модели может быть неустойчивой или в случае финитности хаотической. Реализация того или иного типа поведения зависит от параметра диффузии ε и возможна только при его малых значениях. Очевидно, что при достаточно больших значениях ε общая динамика всех цепочек из рассматриваемого класса не будет регулярной.

Насколько нам известно, проведенные исследования – это первая попытка аналитического описания динамики *неоднородных* систем сцепленных отображений, поскольку изучение даже однородных дискретных моделей распределенных сред еще далеко от завершения. Многое еще не ясно, остаются открытыми вопросы о качественных и количественных методах исследования. Кроме того, в данной работе не затронуты вопросы о возможных стационарных состояниях модели в области регулярности, о волновых движениях по цепочке и влиянии на них дефектов, о динамике системы с параметрами, зави-

сящими от времени, и т.п. Однако в ближайшем будущем на некоторые из этих вопросов будут получены ответы [23, 24].

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда INTAS, грант INTAS-97-1094.

Список литературы

- [1] *K. Kaneko.* Physica D. 1989. V. 34. P. 1–41.
- [2] *K. Kaneko.* Physica D. 1989. V. 37. P. 60–82.
- [3] *L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai.* Statistical mechanics of coupled map lattices. In: Theory and Applications of Coupled Map Lattices. Ed. K. Kaneko. San-Francisco: Wiley and Sons, 1993. P. 169–189.
- [4] *A. S. Mikhailov, A. Yu. Loskutov.* Chaos and Noise. Berlin: Springer, 1996.
- [5] *M. Bär, M. Eiswirth.* Phys. Rev. E. 1993. V. 48. P. 1635–1637.
- [6] *Zhilin Qu, J. N. Weiss, A. Garfinkel.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 58. P. 1378–1390.
- [7] *S. Morita.* Phys. Lett. A. 1997. V. 226. P. 172–178.
- [8] *A. P. Muñizuri, V. Perez-Muñizuri, M. Gomez-Gesteira, L. O. Chua, V. Perez-Villar.* Int. J. Bif. Chaos Appl. Sci. Eng. 1995. V. 5. P. 17–50.
- [9] *L. A. Bunimovich.* Physica D. 1995. V. 86. P. 248–255.
- [10] Theory and Applications of Coupled Map Lattices. Ed. K. Kaneko. San-Francisco: Wiley and Sons, 1993.
- [11] Chaos Focus Issue on Coupled Map Lattices. Chaos. 1992. V. 2. № 3.
- [12] *K. Kaneko.* Physica D. 1990. V. 41. P. 137–172.
- [13] *L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai.* Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 491–504.
- [14] *G. Perez, S. Sinha, H. Cerdeira.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 6936–6939.
- [15] *W. Just.* J. Stat. Phys. 1995. V. 79. P. 429–449.
- [16] *K. Kaneko.* Physica D. 1991. V. 54. P. 5–19.
- [17] *В. С. Афраймович, В. И. Некоркин, Г. В. Осипов, В. Д. Шалфеев.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
- [18] *В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Ятно.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
- [19] Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. научн. трудов. Ред. А. В. Гапонов-Грехов. Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
- [20] *Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
- [21] *D. G. Aronson, H. F. Weinberger.* Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve pulse propagation. In: Lect. Notes Math. V. 446. Partial Differential Equations and Related Topics. Ed. J. A. Goldstein. Berlin: Springer, 1975. P. 5–49.
- [22] *Р. Хорн, Ч. Джонсон.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [23] *А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рыбалко, Д. Н. Удин.* Динамика неоднородной сети неавтономных диффузионно связанных кусочно-линейных отображений. Регулярная и хаотическая динамика (в печати).
- [24] *A. Loskutov, S. D. Rybalko, D. N. Udin, N. V. Brilliantov.* Space-time chaos and order in nonuniform coupled map lattices. Physica D (submitted).

Поступила в редакцию 20.IX.1999 г.,
после доработки 13.IV.2000 г.