Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Регуляризованные адельные формулы для струнных и суперструнных амплитуд в одно-классных квадратичных полях, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 323–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:21:20

© 2010 г.

В. С. Владимиров*

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АДЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СТРУННЫХ И СУПЕРСТРУННЫХ АМПЛИТУД В ОДНОКЛАССНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЯХ

Получены регуляризованные адельные формулы для гамма- и бета-функций для полей рациональных чисел и одноклассных квадратичных полей и произвольных квазихарактеров (с ветвлением или без). Рассматриваются приложения к четырехтахсионным древесным струнным амплитудам, обобщенным амплитудам Венециано (открытая струна), возмущенным амплитудам Вирасоро (замкнутая струна), безмассовым четырехчастичным древесным амплитудам открытой и замкнутой суперструны, амплитудам суперструны Рамона–Невё–Шварца и амплитудам заряженной гетеротической суперструны. Установлены некоторые соотношения между различными струнными и суперструнными амплитудами.

Ключевые слова: адель, идель, поле, струна.

Есть множество различных причин полагать, что в теории струн нет такой вещи, как расстояние, меньшее, чем фундаментальная длина l_{Pl} ... На расстояниях менее l_{Pl} исчезает не только обычная физика, но, насколько нам известно, и локальная физика вместе с ней. Там нет ни расстояний, ни времени, ни энергий, ни частиц, ни локальных сигналов – только дифференциальная топология и приемник теории струн.

Э. Виттен, 1988.

Я бы сказал, что остаются лишь простые числа.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние 20 лет значительно возрос интерес к p -адическим числам. Многочисленные их применения были связаны с открытием в квантовой гравитации и теории струн неархимедовой структуры пространства-времени на сверхмалых, так называемых планковских, расстояниях

$$\Delta x \geq l_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ см},$$

где Δx – ошибка измерения (М. А. Марков и др.). Поэтому для построения математической физики на планковских расстояниях требуются другие, неархимедовы,

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: vladim@mi.ras.ru

числовые поля. Необходимость сохранения рациональных чисел как физических наблюдаемых в неархимедовых полях заставляет нас сделать вывод, что в качестве таких числовых полей можно выбрать поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и никакие другие (теорема Островского!). Таким образом, мы приходим к задачам p -адической математической физики, в частности к аделльным формулам для (супер)струнных амплитуд.

Аделльные формулы появлялись в работах многих математиков и физиков [1]–[18] (см. также основополагающие книги [19]–[23]). Особый интерес представляют аделльные формулы для струнных или суперструнных древесных амплитуд в различных числовых полях. Впервые такая формула для амплитуды Венециано $V = V_\infty$,

$$V(s, t, u) \prod_{p=2}^{\infty} V_p(s, t, u) = 1, \quad s + t + u = -8, \quad (1)$$

(без регуляризации) была предложена в работе [1] и независимо в работах [2], [3]. В формальной аделльной формуле (1) бесконечное произведение расходится при всех (комплексных) значениях переменных Мандельштама (s, t, u) , и возникает проблема регуляризации произведения.

Для общих древесных амплитуд задача сводится к построению аделльных формул для бета-функций в подходящем поле алгебраических чисел. Бета-функции выражаются через гамма-функции того же поля следующим образом ($\kappa = \infty, \omega, p, q$):

$$\begin{aligned} \Gamma_\kappa(\alpha; \theta) \Gamma_\kappa(\beta; \theta') \Gamma_\kappa(\gamma; \theta'') = \\ = \begin{cases} B_\kappa(\alpha, \theta; \beta, \theta'; \gamma, \theta''), & \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \theta\theta'\theta'' = 1, \\ B'_\kappa(\alpha, \theta; \beta, \theta'; \gamma, \theta''), & \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \theta\theta'\theta'' \neq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

кроме того, бета-функция B_κ используется для древесных струнных амплитуд [17], а бета-штрих-функция B'_κ – для древесных суперструнных амплитуд [18].

В работах [13]–[16] были построены регуляризованные аделльные формулы в произвольных полях алгебраических чисел для неразветвленных и разветвленных характеров. В последнем из этих двух случаев аделльные формулы справедливы при выполнении дополнительного условия: характеры на группе идеалов должны быть тривиальны на главных идеалах. Это дает явные соотношения между параметрами локальных характеров. Для решения задачи требуется знать все единицы и простые дивизоры в рассматриваемом поле. Поэтому мы ограничимся случаями полей рациональных чисел и одноклассных квадратичных полей, для которых выведены явные аделльные формулы (заметим, что для одноклассных полей алгебраических чисел все дивизоры принадлежат этому полю). Мы используем также формулу Тейта [22] $\Phi(\theta, s) = \tilde{\Phi}(\theta^{-1}, 1 - s)$, где $\tilde{\Phi}$ – преобразование Меллина преобразования Фурье функции Шварца–Брюа ϕ , определенной на аделльной группе.

2. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АДЕЛЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ $\mathbb{Q}$

Приведем простейший пример аделльной формулы:

$$|x - y|_\infty \prod_p |x - y|_p = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q},$$

где произведение берется по простым p . Эта формула связывает расстояния в полях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, \dots$, между двумя физическими (рациональными) точками x и y (как обычно, $|x|_\infty = |x|$).

Чтобы проиллюстрировать процедуру регуляризации, начнем с адельной формулы для гамма-функций в поле $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$ [13],

$$\Gamma_\infty(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} |x|_\infty^{\alpha-1} e^{2\pi i x} dx = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(1-\alpha)}.$$

Здесь $\zeta(\alpha)$ – дзета-функция Римана. Используя формулу Тейта [22], сформулируем следующее эквивалентное утверждение [13]–[16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого простого числа P выполняется адельная формула*

$$\Gamma_\infty(\alpha) \prod_{p=2}^P \Gamma_p(\alpha) \frac{\zeta_{P_1}(\alpha)}{\zeta_{P_1}(1-\alpha)} = 1, \quad (3)$$

где P_1 – следующее простое число после P ,

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1} e^{-2\pi i \{x\}_p} dx_p = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}}$$

– гамма-функции поля $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, \dots$, а ζ_{P_1} – усеченная ζ -функция Римана,

$$\zeta_{P_1}(\alpha) = \prod_{q=P_1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{-\alpha}}.$$

Теперь заметим, что $\lim_{P_1 \rightarrow \infty} \zeta_{P_1}(1-\alpha) = 1$ равномерно по $\operatorname{Re} \alpha < 0$, а потому из (3) следует, что

$$\Gamma_\infty(\alpha) \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \Gamma_p(\alpha) \zeta_{P_1}(\alpha) = 1, \quad \operatorname{Re} \alpha < 0. \quad (4)$$

Определим *регуляризацию* произведения гамма-функций $\Gamma_p(\alpha)$, $p = 2, 3, \dots$, следующим равенством [13]:

$$\operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(\alpha) = \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \Gamma_p(\alpha) \zeta_{P_1}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha < 0;$$

предел существует, при этом (3) дает регуляризованную адельную формулу

$$\Gamma_\infty(\alpha) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(\alpha) = 1 \quad (5)$$

в первую очередь в области $\operatorname{Re} \alpha < 0$, а далее на всей комплексной плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ в силу аналитического продолжения. Из этой формулы получаем для амплитуды Венециано

$$V(s, t, u) = \Gamma\left(-1 - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(-1 - \frac{t}{2}\right) \Gamma\left(-1 - \frac{u}{2}\right) = B_\infty\left(-1 - \frac{s}{2}, -1 - \frac{t}{2}, -1 - \frac{u}{2}\right)$$

регуляризованную адельную формулу

$$V(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} V_p(s, t, u) = 1, \quad s + t + u = -8. \quad (6)$$

Разветвленные характеры

$$\Theta(X) = \operatorname{sgn}^{\nu} x_{\infty} \prod_{p=2}^{\infty} \theta_p(x_p) |x_p|_p^{i\alpha_p}, \quad \nu \in \mathbb{F}_2, \quad \theta_p(p) = 1, \quad \alpha_p \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

группы A^* иделей $X = (x_{\infty}, x_2, \dots, x_p, \dots)$ тривиальны на группе $\mathbb{Q}^*$, если и только если выполнены условия [1]

$$\theta(-1) = 1, \quad \theta(p) = p^{i\alpha_p}, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где

$$\theta(X) = \operatorname{sgn}^{\nu} x_{\infty} \prod_{p=2}^{\infty} \theta_p(x_p)$$

– характер группы A^* .

ПРИМЕР 1. Разветвленный характер упомянутой выше группы $A^*/\mathbb{Q}^*$ имеет вид [20]

$$\Theta(X) = \operatorname{sgn}^{\nu} x_{\infty} \prod_{p=2}^{\infty} \operatorname{sgn}_{p,-1} x_p,$$

где $x = p^{\operatorname{ord}_p x} (x_0 + x_1 p + \dots)$ и

$$\operatorname{sgn}_{p,-1} x = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ (-1)^{\operatorname{ord}_p x}, & p \equiv 3 \pmod{4}, \\ (-1)^{x_1 + \operatorname{ord}_p x}, & p = 2. \end{cases} \quad (9)$$

Соответствующая адельная формула для гамма-функций имеет вид

$$\Gamma_{\infty}(\alpha; \nu) \operatorname{reg} \left[\prod_{p=4n+1} \Gamma_p(\alpha) \prod_{p=4n+3} \tilde{\Gamma}_p(\alpha) \right] = -2i4^{-\alpha}, \quad (10)$$

где

$$\Gamma_{\infty}(\alpha; \nu) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}^{\nu} x |x|^{\alpha-1} e^{2\pi i x} dx, \\ \tilde{\Gamma}_p(\alpha) = \Gamma_p \left(\alpha + \frac{\pi i}{\ln p} \right) = \frac{1 + p^{\alpha-1}}{1 + p^{-\alpha}} = \Gamma_p(\alpha, \theta_p(x)),$$

$\theta_p(x) = (-1)^{\operatorname{ord}_p x}$. Процедура для бета-функций аналогична.

3. ОДНОКЛАССНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ПОЛЯ И ИХ ПРОСТЫЕ ДИВИЗОРЫ

Квадратичные поля – это поля вида $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0, 1$ и свободно от квадратов: $x = a + b\sqrt{d}$, $\bar{x} = a - b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Для начала введем следующие обозначения: пусть P_d и S_d – множества таких простых чисел p , что соответственно $d \in \mathbb{Q}_p^{*2}$ и $d \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$.

Локальные p -поля конечных точек поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеют вид $\mathbb{Q}_p$, $p \in P_d$, и $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$, где $p \in S_d$, с нормой $|x\bar{x}|_p$ и нормированной мерой Хаара $\delta d_p a d_p b$, где $\delta = 1/2$, если $p = 2$, $d \equiv 5 \pmod{8}$, и $\delta = 1$ в других случаях. Модуль поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ равен p^2 , если $p \in S_d$ и $D \not\equiv 0 \pmod{p}$, и равен p в других случаях.

Обозначим через r_p ранг стандартного локального аддитивного характера χ_p . Только конечное число этих рангов отлично от нуля. Дискриминант поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ равен

$$D = \begin{cases} d, & d \equiv 1 \pmod{4}, \\ 4d, & d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \end{cases} \quad |D| = \prod_{p \in S_d} p^{r_p}. \quad (11)$$

Единицы ϵ квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеют вид $\epsilon = \pm 1$ и, кроме того, $\epsilon = \pm\sqrt{-1}$ при $d = -1$, $\epsilon = \pm(1 \pm \sqrt{-3}/2)$ при $d = -3$, $\epsilon = \pm\Omega^\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{Z}$, при $d > 0$. В последнем случае Ω – примарная единица поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $N(\Omega) = \Omega\bar{\Omega} = \pm 1$, $\Omega > 0$.

Все одноклассные квадратичные поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ хорошо известны: имеются девять мнимых полей с

$$d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$$

и бесконечное число вещественных полей со следующими группами: $d = p$, если p – простое число; $d = 2p$, если $p \equiv 3 \pmod{4}$ и p простое; $d = pp'$, где $p, p' \equiv 3 \pmod{4}$ и p, p' простые. Для одноклассных полей группа дивизоров тривиальна, т. е. все дивизоры принадлежат кольцу целых данного поля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [23]. Для любого простого числа p все простые дивизоры $\mathfrak{p}$ и $\bar{\mathfrak{p}}$ одноклассного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и их модуль q имеют следующую структуру:

- а) p делит D , $p \in S_d$, $\mathfrak{p} = \sqrt{p}$, $q = \mathfrak{p}^2 = p$;
- б) p не делит D , $p \in S_d$, $\mathfrak{p} = p$, $q = \mathfrak{p}^2 = p^2$;
- в) $p \in P_d$, $D = 4d$, $\mathfrak{p} = a + \sqrt{db}$, $\bar{\mathfrak{p}} = a - \sqrt{db}$, $q = |\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}| = p$, где a и $b > 0$ – целочисленные решения одного из диофантовых уравнений $\pm p = a^2 - db^2$;
- г) $p \in P_d$, $D = d$, $\mathfrak{p} = a + b/2 + \sqrt{db}/2$, $\bar{\mathfrak{p}} = a + b/2 - \sqrt{db}/2$, $q = |\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}| = p$, где a и $b > 0$ – целочисленные решения одного из диофантовых уравнений

$$\pm p = a^2 + ab + \frac{1-d}{4} b^2.$$

В случаях “в” и “г” дивизоры можно выбрать так, что $|\mathfrak{p}|_p = 1/p$, $|\bar{\mathfrak{p}}|_p = 1$.

4. ИДЕЛИ И ИХ ХАРАКТЕРЫ ДЛЯ ОДНОКЛАССНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $A_{\sqrt{d}}^*$ – группа идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ [1]. Перенумеруем конечные точки идеала $X \in A_{\sqrt{d}}^*$ следующим образом: (p_1, p_2) , $m_p = 2$, если $p \in P_d$, и p_1 , $m_p = 1$, если $p \in S_d$, так что для дивизоров $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{p_1}$, $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{p_2}$, если $p \in P_d$, и $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{p_1}$, если $p \in S_d$; для норм $|x|_p = |x|_{p_j}$, $j = 1, 2$, если $p \in P_d$, и $|x\bar{x}|_p = |x|_{p_1}$, $p \in S_d$; аналогично для модулей q_{pj} , характеров θ_{pj} , χ_{pj} , рангов ρ_{pj} , r_{pj} , чисел α_{pj} и т.д.

Произвольный идеаль $X \in A_{\sqrt{d}}^*$ записывается как

$$X = \begin{cases} (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & d > 0, \\ z \in \mathbb{C}, & d < 0, \end{cases} \quad (x_{p_1}, x_{p_2}) \in \mathbb{Q}_p^{*2}, \dots, x_{p_1} \in \mathbb{Q}_p^*(\sqrt{d}), \dots,$$

где в данном случае все его компоненты x_{pj} начиная с некоторого p принадлежат соответствующей группе единиц.

Произвольный характер Θ группы $A_{\sqrt{d}}^*$ на идеале X представляется как

$$\Theta(X) = \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} \theta_{pj}(x_{pj}) |x_{pj}|_{pj}^{i\alpha_{pj}} \begin{cases} \operatorname{sgn}^{\nu} x_1 \operatorname{sgn}^{\mu} x_2 |x_1|^{ia}, & d > 0, \\ z^{\nu} (z\bar{z})^{-\nu/2}, & d < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Это означает, что для любого $X \in A_{\sqrt{d}}^*$ лишь конечное число характеров $\theta_{pj}(x_{pj})$, $x_{pj} \in Z_{pj}^*$, отлично от 1. В соотношении (12) мы совершили замену $\alpha + ia \rightarrow \alpha$, где a – вещественное число ($a = 0$ при $d < 0$), α_{pj} – также вещественные числа, $\nu, \mu \in \mathbb{F}_2$ при $d > 0$ и $\nu \in \mathbb{Z}$ при $d < 0$. Мы считаем, что локальные характеры θ_{pj} в формуле (12) нормированы стандартным образом [16].

Введем редуцированный характер группы идеалов $A_{\sqrt{d}}^*$:

$$\theta(X) = \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} \theta_{pj}(x_{pj}) \begin{cases} \operatorname{sgn}^{\nu} x_1 \operatorname{sgn}^{\mu} x_2, & \nu, \mu \in \mathbb{F}_2, \quad d > 0, \\ z^{\nu} (z\bar{z})^{-\nu/2}, & \nu \in \mathbb{Z}, \quad d < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Предположим, что характер (12) тривиален на главных идеалах $X = I^x$, $x \in \mathbb{Q}^*(\sqrt{d})$, т. е. определен на фактор-группе $A_{\sqrt{d}}^*/\mathbb{Q}^*(\sqrt{d})$. В этом случае лишь конечное число характеров θ_{pj} нетривиально. Обозначим через U множество тех p , для которых все ранги $\rho_{pj} = 0$ (без ветвления); множество остальных p обозначим через R (с ветвлением). Обозначим норму главного идеала характера Θ через

$$N = \prod_{p \in R} \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{\rho_{pj}}.$$

Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условия тривиальности характера на главных идеалах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Характер Θ (12) группы идеалов $A_{\sqrt{d}}^*$ одноклассного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ тривиален на группе $\mathbb{Q}^*(\sqrt{d})$, если и только если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \theta(-1) &= 1 \text{ при всех допустимых } d; \\ \theta(\sqrt{-1}) &= 1 \text{ при } d = -1; \end{aligned}$$

$\theta((1 + \sqrt{-3})/2) = 1$ при $d = -3$;

$\theta(\Omega) = \Omega^{-ia}$ при всех допустимых $d > 0$.

При этом $q_{pj}^{i\alpha_{pj}} = \theta(\mathfrak{p}_{pj})|\mathfrak{p}_{pj}|^{ia}$, $p = 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, \dots, t_p$, где характер θ определяется равенством (13).

5. АДЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИЙ В ОДНОКЛАССНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЯХ

Регуляризованная адельная формула для гамма-функций характера Θ (12), определенного на фактор-группе $A_{\sqrt{d}}^*/\mathbb{Q}^*(\sqrt{d})$ одноклассного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, представляется следующим образом (по поводу случая $P = 2$ см. раздел 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого характера $\Theta(X)$, определенного на фактор-группе $A_{\sqrt{d}}^*/\mathbb{Q}^*(\sqrt{d})$, выполнена следующая адельная формула для гамма-функций:

$$\Lambda(N|D|)^{\frac{1}{2}-\alpha} = \text{reg} \prod_{p \in F} \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{q_{pj}}(\alpha + i\alpha_{pj}) \times \begin{cases} \Gamma_{\infty}(\alpha + ia; \nu) \Gamma_{\infty}(\alpha; \mu), & d > 0, \\ \Gamma_{\omega}(\alpha; \nu), & d < 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $|\Lambda| = 1$, $\Gamma_{\infty}(\alpha; \nu)$ при $\nu \in \mathbb{F}_2$ и $\Gamma_{\omega}(\alpha; \nu)$ при $\nu \in \mathbb{Z}$ – гамма-функции полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ для характеров $\text{sgn}^{\nu} x$ и $z^{\nu}(z\bar{z})^{-\nu/2}$ соответственно, и

$$\Gamma_{q_{pj}}(\alpha + i\alpha_{pj}) = \frac{1 - q^{\alpha-1}\theta(\mathfrak{p}_{pj})|\mathfrak{p}_{pj}|^{ia}}{1 - q^{-\alpha}\theta(\mathfrak{p}_{pj})|\mathfrak{p}_{pj}|^{ia}}, \quad p = 2, 3, \dots$$

Предположим, что кроме характера Θ определены два характера Θ' и Θ'' фактор-группы $A_{\sqrt{d}}^*/\mathbb{Q}^*(\sqrt{d})$. Обозначим через R, R', R'' и U, U', U'' множества разветвленных и неразветвленных точек характеров $\Theta, \Theta', \Theta''$ соответственно, и рассмотрим гамма-функции $\Gamma_{\kappa}(\alpha; \nu)$, $\Gamma_{\kappa}(\beta; \nu')$, $\Gamma_{\kappa}(\gamma; \nu'')$, где $\kappa = \infty, \omega, p, q$. Бета-функции определяются равенством (2). В частности, для главных квазихарактеров положим

$$\Gamma_q(\alpha) = \Gamma_q(\alpha; 1), \quad B_q(\alpha, \beta, \gamma) = B_q(\alpha, 1; \beta, 1; \gamma, 1). \quad (15)$$

Три раза пользуясь адельными формулами (14) для гамма-функций характеров $\Theta, \Theta', \Theta''$ и перемножая их, получаем следующую адельную формулу для бета-функций. Поскольку для двух случаев $\Theta\Theta'\Theta'' = I$ с $\alpha + \beta + \gamma = 1$ и $\Theta\Theta'\Theta'' \neq I$ с $\alpha + \beta + \gamma = 0$ получаются слишком сложные выражения, мы опускаем соответствующие адельные формулы для бета-функций и отсылаем читателя к оригинальным работам [15], [16].

ПРИМЕР 2. Для гауссова поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ и для главного характера адельная формула записывается так:

$$B_{\omega} B_2 \text{reg} \left[\prod_{p=4n+1} B_p^2 \prod_{p=4n+3} B_p \right] (\alpha, \beta, \gamma) = 2, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ДРЕВЕСНЫМ ЧЕТЫРЕХЧАСТИЧНЫМ СТРУНЫМ И СУПЕРСТРУНЫМ АМПЛИТУДАМ

Струнные амплитуды для четырехчастичных процессов рассеяния с траекторией Редже $\alpha(s) = \alpha + \alpha' s$ определяются амплитудой Венециано (8) с адельной формулой (10) и амплитудой Вирасоро $W(s, t, u) = B_\omega(s, t, u)$ с адельной формулой

$$WW_2 \text{ reg} \left[\prod_{p=4n+1} W_p^2 \prod_{p=4n+3} W_{p^2} \right] (s, t, u) = 2, \quad s + t + u = -32. \quad (16)$$

Данная формула, как и формула (10), хорошо известна [13]. Эти соотношения позволяют разложить амплитуды Венециано и Вирасоро в бесконечное произведение более простых выражений.

Амплитуды Венециано и Вирасоро обобщаются на случай разветвленных характеров с помощью формул

$$V_{\nu\mu\eta}(s, t, u) = B_\infty \left(-1 - \frac{s}{2}, \nu; -1 - \frac{t}{2}, \mu; -1 - \frac{u}{2}, \eta \right), \quad (17)$$

где $s + t + u = -8$, $\nu + \mu + \eta = 0$ в $\mathbb{F}_2$, и

$$W_{\nu\mu\eta}(s, t, u) = B_\omega \left(-1 - \frac{s}{8}, \nu; -1 - \frac{t}{8}, \mu; -1 - \frac{u}{8}, \eta \right), \quad (18)$$

где $s + t + u = -32$, $\nu + \mu + \eta = 0$ в $\mathbb{Z}$. Эти амплитуды обладают кроссинг-симметрией относительно перестановок переменных (s, ν) , (t, μ) и (u, η) и удовлетворяют адельным формулам из раздела 5.

Четырехтахсионные амплитуды замкнутой струны при наличии возмущений [4], [16], [19]. Эти амплитуды имеют вид (здесь $\{n_i\} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$)

$$I(s, t, u; \{n_i\}) = \int_{\mathbb{C}} z^{-2-\frac{s}{8}+n_1} (1-z)^{-2-\frac{t}{8}+n_2} \bar{z}^{-2-\frac{s}{8}+n_3} (1-\bar{z})^{-2-\frac{t}{8}+n_4} |dz \wedge d\bar{z}|$$

и выражаются через обобщенные амплитуды Вирасоро:

$$I(s, t, u; \{n_i\}) = (-1)^{q+q'} W_{qq'q''}(s - 4p, t - 4p', u - 4p''), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} s + t + u &= -32, & p + p' + p'' &= 0, & q + q' + q'' &= 0, \\ p &= n_1 + n_3, & p' &= n_2 + n_4, & q &= n_1 - n_3, & q' &= n_2 - n_4. \end{aligned}$$

Они удовлетворяют адельным формулам из раздела 5 при $d < 0$.

Безмассовая четырехчастичная амплитуда суперструны Рамона–Невё–Шварца [19], [14], [17]. Эта амплитуда пропорциональна выражению

$$A_\infty(s, t, u) = \Gamma_\infty \left(-\frac{s}{2}, 1 \right) \Gamma_\infty \left(-\frac{t}{2}, 1 \right) \Gamma_\infty \left(-\frac{u}{2}, 1 \right) = B'_\infty \left(-\frac{s}{2}, 1; -\frac{t}{2}, 1; -\frac{u}{2}, 1 \right), \quad (20)$$

а соответствующая адельная формула имеет вид

$$\begin{aligned} A_\infty(s, t, u) &= \text{reg} \left[\prod_{p=4n+1} \Gamma_p \left(-\frac{s}{2} \right) \Gamma_p \left(-\frac{t}{2} \right) \Gamma_p \left(-\frac{u}{2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{p=4n+3} B'_p \left(-\frac{s}{2}, \theta_p; -\frac{t}{2}, \theta_p; -\frac{u}{2}, \theta_p \right) \right] = 8i, \quad s + t + u = 0, \quad (21) \end{aligned}$$

с характером $\theta_p(x) = (-1)^{\text{ord}_p x}$ (см. раздел 2).

Безмассовые амплитуды для четырех заряженных частиц гетеротической суперструны [4], [13]–[18], [19]. Имеются четыре основных типа таких амплитуд, а именно

$$D_K(s, t, u) = \frac{\pi \Gamma(-1 - \frac{s}{8} - \frac{S}{2}) \Gamma(-1 - \frac{t}{8} - \frac{T}{2}) \Gamma(-1 - \frac{u}{8} - \frac{U}{2})}{\Gamma(1 + \frac{s}{8}) \Gamma(1 + \frac{t}{8}) \Gamma(1 + \frac{u}{8})}, \quad (22)$$

с $s+t+u=0$, где $K=(S, T, U)$, $S+T+U=-8$, – аналоги переменных Мандельштама (s, t, u) :

$$(S, T, U) = (-8, 0, 0), (-6, -2, 0), (-4, -4, 0), (-4, -2, -2).$$

Амплитуды D_K выражаются через B_ω -функции,

$$D_K(s, t, u) = \frac{4}{t} B_\omega\left(-\frac{1}{2} - \frac{s}{8} - \frac{S}{4}, 1 + \frac{S}{2}; -\frac{t}{8} - \frac{T}{4}, 2 + \frac{T}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{u}{8} - \frac{U}{4}, 1 + \frac{U}{2}\right), \quad (23)$$

и, таким образом, через обобщенные амплитуды Вирасоро. Например,

$$D_{8,0,0}(s, t, u) = \frac{4}{t} W_{-321}(s-20, t-8, u-4), \quad s+t+u=0. \quad (24)$$

Поэтому они удовлетворяют адельной формуле из раздела 5 при $d < 0$.

Другой тип адельных формул для амплитуд D_K получается, если представить их в виде, пропорциональном B'_∞ -функциям,

$$D_K(s, t, u) \sim B'_\infty\left(-\frac{s}{8}, \nu; -\frac{t}{8}, \mu; -\frac{u}{8}, \eta\right), \quad (25)$$

где $s+t+u=0$, $\nu + \mu + \eta = 1$ лежит в $\mathbb{F}_2$, и применить адельную формулу (21).

Таким образом, мы установили соотношение между амплитудами рассеяния в теории гетеротической струны и суперструны Рамона–Невё–Шварца.

Безмассовая четырехчастичная амплитуда открытой (бозонной) суперструны [2], [16]–[18]. Эта амплитуда пропорциональна выражению

$$A_4^{\text{bos}}(s, t, u) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2}) \Gamma(-\frac{t}{2})}{\Gamma(1 + \frac{u}{2})}, \quad (26)$$

и представляется с помощью B'_∞ -функции:

$$\begin{aligned} A_4^{\text{bos}}(s, t, u) &= \frac{1}{4\pi i} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4} - 1 \right) \times \\ &\times B'_\infty\left(-\frac{s}{2}, 1; -\frac{t}{2}, 1; -\frac{u}{2}, 1\right), \quad s+t+u=0. \end{aligned} \quad (27)$$

Она пропорциональна амплитудам Рамона–Невё–Шварца. Здесь вновь применяется адельная формула из раздела 5.

Безмассовая четырехчастичная амплитуда замкнутой суперструны [14]–[18], [2]. Эта амплитуда пропорциональна функции

$$C(s, t, u) = -\pi \frac{\Gamma(-\frac{s}{8}) \Gamma(-\frac{t}{8}) \Gamma(-\frac{u}{8})}{\Gamma(1 + \frac{s}{8}) \Gamma(1 + \frac{t}{8}) \Gamma(1 + \frac{u}{8})} \quad (28)$$

и выражается через B'_ω -функцию:

$$C(s, t, u) = \frac{1}{8\pi} \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{t}{8}\right) \left(1 + \frac{u}{8}\right) \times \\ \times B'_\omega\left(-\frac{s}{8}, 2; -\frac{t}{8}, 2; -\frac{u}{8}, 2\right), \quad s + t + u = 0. \quad (29)$$

Здесь применяются адельные формулы из раздела 5 при $d < 0$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1) и РФФИ (грант № 08-01-00727).

Список литературы

- [1] P. G. O. Freund, E. Witten, *Phys. Lett. B*, **199**:2 (1987), 191–194.
- [2] I. V. Volovich, *Class. Quant. Grav.*, **4**:4 (1987), L83–L87.
- [3] I. V. Volovich, *Lett. Math. Phys.*, **16**:1 (1988), 61–67.
- [4] H. Kawai, D. C. Lewellen, S.-H. H. Tye, *Nucl. Phys. B*, **269**:1 (1986), 1–23.
- [5] P. G. O. Freund, M. Olson, *Phys. Lett. B*, **199**:2 (1987), 186–190.
- [6] P. H. Frampton, Y. Okada, M. R. Ubriaco, *Phys. Lett. B*, **213** (1988), 260–262.
- [7] I. Ya. Aref'eva, B. G. Dragović, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **209**:4 (1988), 445–450.
- [8] I. Ya. Aref'eva, B. G. Dragovic, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **212**:3 (1988), 283–291.
- [9] P. H. Frampton, H. Nishino, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:17 (1989), 1960–1963.
- [10] Ph. Ruelle, E. Thiran, D. Versteegen, J. Weyers, *Modern Phys. Lett. A*, **4**:18 (1989), 1745–1752.
- [11] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
- [12] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адитический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [13] V. S. Vladimirov, *Lett. Math. Phys.*, **27**:2 (1993), 123–131.
- [14] V. S. Vladimirov, “Adelic formulas for gamma- and beta-functions in algebraic number fields”, *p-Adic Functional Analysis*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **192**, eds. W. H. Schikhof, C. Perez-Garcia, J. Kakol, M. Dekker, New York, 1997, 383–395.
- [15] В. С. Владимиров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:1 (1996), 63–86.
- [16] В. С. Владимиров, “Адельные формулы для 4-частичных древесных струнных и суперструнных амплитуд в одноклассных квадратичных полях”, *Избранные вопросы p-адической математической физики и анализа*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова. т. 245, Тр. МИАН, Наука, М., 2004, 9–28.
- [17] В. С. Владимиров, “О разветвленных характерах группы идеалей одноклассных квадратичных полей”, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **224**, Наука, М., 1999, 122–129.
- [18] В. С. Владимиров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 43–58.
- [19] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*. т. 1, 2, Мир, М., 1990.
- [20] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции*, Наука, М., 1966.
- [21] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus. An Introduction to p-Adic Analysis*, Cambridge Stud. Adv. Math., **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [22] А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972.
- [23] З. И. Боревиц, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.