Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, О нулевом уровне чисто магнитного двумерного нерелятивистского оператора Паули для частиц со спином $1/2$, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 333–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 11:38:56

© 2010 г. П. Г. Гриневич*, А. Е. Миронов[†], С. П. Новиков[‡]

О НУЛЕВОМ УРОВНЕ ЧИСТО МАГНИТНОГО ДВУМЕРНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ОПЕРАТОРА ПАУЛИ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $1/2$

Исследовано многообразие комплексных собственных функций Блоха–Флоке для нулевого уровня двумерного нерелятивистского оператора Паули, описывающего движение заряженной частицы в периодическом магнитном поле с нулевым потоком через элементарную ячейку и нулевым электрическим полем. Это многообразие полностью изучено для широкого класса алгебро-геометрических операторов. В случае ненулевого потока основное состояние оператора Паули для быстроубывающих на бесконечности полей было найдено Аароновым и Кашером, а для периодических полей – Дубровиным и Новиковым. Для полей с ненулевым потоком алгебро-геометрические операторы ранее известны не были, поскольку комплексное продолжение “магнитных” собственных функций Блоха–Флоке очень плохо ведет себя на бесконечности. Построено несколько неособых алгебро-геометрических периодических полей (с нулевым потоком через элементарную ячейку), отвечающих комплексным римановым поверхностям рода ноль. Для более высоких родов построены периодические операторы с интересными магнитными полями и эффектом Ааронова–Бома. Алгебро-геометрические решения рода ноль порождают также солитоноподобные неособые магнитные поля, поток которых через диск радиуса R пропорционален R (медленно расходится при $R \rightarrow \infty$). Для этого случая найдены наиболее интересные основные состояния в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Ключевые слова: двумерный оператор Паули, задача при одной энергии, алгебро-геометрическое решение, ненулевой магнитный поток, основное состояние, собственная функция Блоха–Флоке, эффект Ааронова–Бома.

1. ВВЕДЕНИЕ. МАГНИТНЫЙ ОПЕРАТОР ПАУЛИ И ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА

Двумерный оператор Паули для заряженных частиц со спином $1/2$, движущихся в электрическом и магнитном полях $E_\alpha = \partial_\alpha U$ и A_α (в калибровке Лоренца),

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: pgg@landau.ac.ru

[†]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
E-mail: mironov@math.nsc.ru

[‡]University of Maryland, College Park, USA. E-mail: novikov@ipst.umd.edu

в нерелятивистском приближении имеет вид [1]

$$L^P = \sum_{\alpha=1,2} (p_\alpha)^2 + B\sigma_3 + U, \quad (1)$$

где

$$ip_\alpha = \partial_\alpha + iA_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^2 \partial_\alpha A_\alpha = 0,$$

B – магнитное поле, σ_α – матрицы Паули,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(здесь и далее мы полагаем $e = 1$, $m = 1/2$ и опускаем несущественные постоянные, например c и $\hbar$). Для $U = 0$ этот оператор сводится к прямой сумме двух скалярных операторов Шредингера, которые имеют “факторизованный” вид [2]–[4]:

$$L^P = QQ^+ \oplus Q^+Q = L_+ \oplus L_-, \quad (2)$$

где

$$Q = \partial + A, \quad Q^+ = -(\bar{\partial} - \bar{A}), \quad \bar{\partial}A + \partial\bar{A} = 2B, \\ z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \partial = \partial_x - i\partial_y, \quad \bar{\partial} = \partial_x + i\partial_y, \quad \partial\bar{\partial} = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2.$$

Магнитное поле B направлено ортогонально к ориентированной плоскости (x, y) , и поэтому имеет знак. Для быстроубывающего при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ поля B магнитный поток $\{B\}$ конечен. Оператор L^P является неотрицательным, следовательно, энергия основного состояния может быть либо нулевой, $\varepsilon_0 = 0$, либо положительной, $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $|\{B\}| \geq 1$ (в естественных квантовых единицах), тогда линейное подпространство, натянутое на основные состояния, имеет размерность $[\{B\}] = m$, где $[\cdot]$ – целая часть числа [2]. Для периодического поля B и целочисленного потока $\{B\} \in \mathbb{Z}$ пространство основных состояний бесконечномерно и изоморфно уровню Ландау в однородном магнитном поле [3], [4]. Высшие уровни отделены от основного ненулевой щелью $\Delta_B > 0$. Как показано в более поздних работах 80-х годов, оператор L^P допускает “суперсимметричное” преобразование $P: L_+ \rightarrow L_- \rightarrow 0$, где $P^2 = 0$, при этом $P: \Psi \rightarrow Q_+\Psi$ для $\{B\} > 0$, Ψ лежит в секторе L_+ .

Все уровни $\varepsilon > 0$ двукратно вырождены, так как обе функции Ψ и $P\Psi$ являются собственными (за исключением случая “инстантонов”, или “основных состояний”, где $P\Psi = 0$ при $\varepsilon_0 = 0$), если функция Ψ принадлежит гильбертову пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$. Выражаясь более древним языком, восходящим к XIX в. и даже к XVIII в., имеется “преобразование Лапласа” скалярных двумерных операторов второго порядка [5]

$$L = (\partial_x + A)(\partial_y + D) + U \rightarrow \tilde{L}e^f(\partial_y + D)e^{-f}(\partial_x + A) + U, \quad U = e^f,$$

при этом $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = (\partial_y + D)\Psi$ и условие $L\Psi = 0$ влечет $\tilde{L}\tilde{\Psi} = 0$. В данном случае $L = Q_1Q_2 + U$.

В самосопряженном эллиптическом случае, изучавшемся подробно в работе [5] с точки зрения спектральных свойств операторов, мы имеем

$$L = QQ^+ + U, \quad Q = \partial + A, \quad Q^+ = -(\bar{\partial} - \bar{A}).$$

Для “чисто факторизуемых” операторов ($U = \text{const}$) мы имеем $\tilde{L} = Q^+Q + U$ (можно положить $U = 0$). В этом случае преобразование $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = Q^+\Psi$ совпадает с “суперсимметрией” и отображает собственные функции оператора L в собственные функции оператора $\tilde{L}$ при всех ε : $L\Psi = \varepsilon\Psi$, $\tilde{L}\tilde{\Psi} = \varepsilon\tilde{\Psi}$.

Основные состояния оператора L являются “инстантонными”, т. е. удовлетворяют уравнению $Q^+\Psi = 0$, если $\Psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Пусть теперь нулевая мода Ψ , $L\Psi = 0$, не принадлежит гильбертову пространству, но “принадлежит спектру”. Это означает, что она растет не быстрее некоторого многочлена при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Доказательство того, что эти решения являются инстантонными, уже не проходит. В этом случае $\varepsilon_0 = 0$ является низшей точкой непрерывного спектра оператора L . Даже если таких “инстантонных” функций Ψ не существует, нельзя строго заключить, что энергия основного состояния оператора L положительна (хотя это весьма вероятно).

В случае потока $\{B\} \neq 0$ энергия основного состояния оператора Паули равна нулю, причем для $L^P = L_+ \oplus L_-$ это состояние реализуется либо в секторе $L = L_+$ (при $\{B\} > 0$), либо в секторе $L = L_-$ (при $\{B\} < 0$) в случаях быстроубывающего и периодического магнитных полей [2]–[4] (см. также работу [6], где рассматривались другие функциональные классы магнитных полей). Остальной спектр имеет кратность два и отделен от нуля положительной щелью Δ_B . Интересные классы “факторизуемых” операторов L , имеющие еще один вырожденный уровень, кроме основного, были найдены в работе [5]. Упомянутые выше работы имеют “солитонное” происхождение. Стоит отметить, что связь преобразований Лапласа с так называемой “двумеризованной цепочкой Тоды”, открытая в теории солитонов, была известна Дарбу и его школе еще в XIX в. но в конце XVIII в. – начале XIX в. вычисления носили чисто формальный характер, а эллиптический случай не был рассмотрен вовсе.

В настоящей работе мы исследуем алгебро-геометрический случай. Для гладких периодических операторов (с периодическими вектор-потенциалами) *магнитный поток всегда нулевой*, но в вырожденном солитоноподобном случае он может отличаться от нуля. При этом возникает полное комплексное многообразие функций Блоха–Флоке, которые являются собственными функциями, отвечающими нулевому уровню, $L\Psi = 0$. Если это многообразие имеет конечный род, то мы называем оператор L *алгебро-геометрическим*.

Мы рассматриваем чисто факторизуемую редукцию $L = -(\partial + A)(\bar{\partial} - \bar{A})$ самосопряженного оператора Шредингера с точки зрения теории алгебро-геометрических операторов. Возможность такого подхода была обнаружена авторами лишь недавно [7] с использованием вполне интегрируемых двумерных систем солитонного типа. В работе [7] был рассмотрен гиперболический оператор $L = \partial_x \partial_y + G \partial_y + S$. Как указано в этой работе, такая система была впервые введена в статье [8], а ее алгебро-геометрические решения и полная иерархия были найдены в работе [11].

Редукция $S = 0$ приводит к интересной “двумерной иерархии Бюргерса”, линеаризуемой аналогично ее одномерному варианту. Спектральный смысл этой линеаризации был вскрыт в работе [7]. Для первой системы из иерархии эта редукция была указана в [9], однако соответствующие условия на данные обратной задачи были найдены лишь недавно [7] (см. информацию в работе [10] по истории вопроса).

Для нередуцированной системы $L_t = (LH - HL) + fL$ оператор $H = \Delta + F\partial_y + A$ может быть интересен с точки зрения спектральной теории в стационарном конечно-зонном случае $LH - HL = -f(x, y)L$. Операторы L и H образуют алгебро-геометрическую пару операторов с частными производными, коммутирующих на решениях уравнения $L\Psi = 0$, в соответствии с терминологией, использованной в работах Кричевера и Новикова конца 70-х – начала 80-х годов. В этом случае оператор H эллиптический. Его исследование – одна из основных целей работы [7]. Несложно добиться, чтобы оператор H был гладким, периодическим и вещественным. Однако в рамках указанного подхода построить нетривиальные самосопряженные операторы не удалось. Поэтому в [7] была сформулирована следующая гипотеза: *если для гладких периодических самосопряженных двумерных операторов Шредингера в $\mathbb{R}^2$ полное комплексное многообразие собственных функций Блоха–Флоке содержит комплексное алгебраическое подмногообразие, то это подмногообразие лежит внутри одного уровня энергии (за исключением тривиальных случаев, сводящихся к одномерным уравнениям).*

2. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ДАННЫЕ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Итак, чисто магнитный двумерный оператор Паули является прямой суммой, $L^P = L_+ \oplus L_-$, двух чисто факторизуемых операторов Шредингера $L_+ = QQ^+$ и $L_- = Q^+Q$, где $Q = \partial + A$, $Q^+ = -(\bar{\partial} - \bar{A})$. Следуя работе [11], напомним, что такое алгебро-геометрический оператор $L = -(\partial + A)(\bar{\partial} + D) + U$ с периодическими по x, y коэффициентами A, D, U .

Опишем данные обратной задачи. Пусть дана неособая риманова поверхность Γ рода $g > 0$ с двумя отмеченными точками ∞_1 и ∞_2 , в окрестности которых заданы локальные параметры k' и k'' такие, что $(k')^{-1}(\infty_1) = 0$, $(k'')^{-1}(\infty_2) = 0$. Пусть задан также набор $\mathcal{D} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_g)$ из g точек (“дивизор” степени g). Тогда (для данных общего положения) существует единственная функция $\Psi(\mathcal{P}, x, y)$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, обладающая следующими свойствами:

- 1) Ψ мероморфна по переменной $\mathcal{P}$;
- 2) в окрестности точек ∞_1, ∞_2 функция Ψ имеет асимптотику, определяющуюся локальными параметрами k', k'' :

$$\begin{aligned} \infty_1: \quad \Psi &= c(x, y)e^{k'z} \left(1 + O\left(\frac{1}{k'}\right) \right), \\ \infty_2: \quad \Psi &= e^{k''z} \left(1 + O\left(\frac{1}{k''}\right) \right); \end{aligned}$$

- 3) Ψ имеет полюсы первого порядка в точках дивизора $\mathcal{D}$, не зависящие от x, y .
- 4) при $x = 0, y = 0$ функция $\Psi \equiv 1$.

Рис. 1. Вырождение римановой поверхности Γ в объединение $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ двух поверхностей рода g с $n + 1$ точкой пересечения. На рисунках $n = 2$, $g = 0$ (а) и $g = 1$ (б).

Эта функция, называемая двухточечной функцией Бейкера–Ахиезера, была введена в работе [11]. Она удовлетворяет уравнению $L\Psi = 0$, где $L = \partial\bar{\partial} - 2(\ln c)_z\bar{\partial} + U(x, y)$, и является функцией Блоха–Флоке, если $c(x, y)$, $U(x, y)$ – периодические функции. Вообще говоря, эти функции квазипериодичны, но для всюду плотного множества римановых поверхностей Γ они периодичны. Можно выразить Ψ , c , U в явном виде через тета-функции, как это стандартно делается в периодической теории солитонов (см. работу [11] и обзоры [12], [13]). Чисто потенциальная редукция $c(x, y) \equiv 1$ была найдена для этих данных в работах [14], [15]. В работе [16] было найдено условие самосопряженности в присутствии магнитного поля $B = -(\Delta \ln c)/2 = -(\partial\bar{\partial} \ln c)/2 \neq 0$: необходимо, чтобы существовала антиголоморфная инволюция $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma(\infty_1) = \infty_2$, такая, что

$$\sigma(k') = -\overline{k''}, \quad \sigma(\mathcal{D}) \sim (K) + \infty_1 + \infty_2, \quad (3)$$

где (K) – дивизор нулей и полюсов голоморфных дифференциальных 1-форм, а знак $\sim$ означает так называемую “линейную эквивалентность” дивизоров, т. е. каждый дивизор нулей и полюсов мероморфной функции считается нулевым. Это условие достаточно и, по-видимому, необходимо, хотя строгое доказательство необходимости в литературе пока отсутствует.

Опишем данные обратной задачи для нашей факторизуемой самосопряженной редукции. Это составляет основной результат настоящей работы.

Риманова поверхность Γ вырождается: $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, где $\infty_1 \in \Gamma'$, $\infty_2 \in \Gamma''$ и пересечение $\Gamma' \cap \Gamma''$ поверхностей Γ' и Γ'' – это набор точек $Q'_0, \dots, Q'_k$ (см. рис. 1).

Необходимо определить антиголоморфную инволюцию $\sigma: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$, $\sigma: \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$, переставляющую точки ∞_1 и ∞_2 , $\sigma: (Q'_0, \dots, Q'_k) \rightarrow (Q'_{i_0}, \dots, Q'_{i_k})$. Пусть род поверхности Γ равен роду поверхности Γ' и равен g . Зададим $g + k$ точек $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_{g+k})$ на Γ' и g точек $\mathcal{D}'' = (\mathcal{P}''_1, \dots, \mathcal{P}''_g)$ на Γ'' , удовлетворяющих на Γ соотношению линейной эквивалентности

$$\sigma(\mathcal{D}' + \mathcal{D}'') + \mathcal{D}' + \mathcal{D}'' \sim (K) + \infty_1 + \infty_2, \quad (4)$$

где $(K) = (K') + (K'')$, и следующему условию на вычеты соответствующей 1-формы ω , $\omega = \omega'$ на Γ' , $\omega = \omega''$ на Γ'' , дивизор которой равен (K) :

$$-\text{Res}_{Q_j} \omega' = \text{Res}_{R_j=\sigma(Q_j)} \omega'', \quad \sigma(R) = Q.$$

Переформулируем введенные понятия в терминах одной поверхности Γ' с локальным параметром $1/k'$ и набором точек $Q_0, \dots, Q_n$ с учетом инволюции σ , $\sigma(Q_j) = Q_{\sigma(j)}$. Найдем функцию Ψ на Γ' такую, что:

- 1) Ψ имеет полюсы первого порядка в $g + k$ точках $\mathcal{D}'$;
- 2) в окрестности точки ∞_1 функция Ψ имеет асимптотику

$$\Psi = c(x, y) e^{k' \bar{z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k'}\right) \right);$$

- 3) при фиксированном Q'_j функции $\varphi_j(z) = \Psi|_{Q'_j}$ голоморфны по z .

Зафиксируем на поверхности Γ' точки $Q''_0 = Q'_{i_0}, \dots, Q''_k = Q'_{i_k}$ и определим (одноточечную) функцию Бейкера–Ахиезера $\varphi(\mathcal{P}, z)$, антиголоморфную по $\mathcal{P} \in \Gamma'$, имеющую неподвижный дивизор полюсов первого порядка $\sigma(\mathcal{D}'')$ и асимптотику

$$\varphi \sim e^{-\bar{k}' z} \left(1 + O\left(\frac{1}{k'}\right) \right)$$

и удовлетворяющую равенству $\varphi \equiv 1$ при $x = 0$, $y = 0$. Необходимо удовлетворить условию $\sigma(\mathcal{D}'') + \mathcal{D}' = (Q) + (K')_{\Gamma'} + \infty_1$ и условию на вычеты (см. выше) в точках $Q_j \sim Q_{\sigma(j)}$ для формы, определяющей (K') . Пусть

$$\varphi_j(z) = \varphi(Q''_j, z), \quad Q''_j = Q'_{\sigma(j)}. \quad (5)$$

Таким образом, мы описали всё в терминах поверхности Γ' , поскольку $\Gamma'' = \sigma(\Gamma')$. При этих условиях мы устанавливаем, что функция $\Psi(\mathcal{P}, z, \bar{z})$ на поверхности $\Gamma' \ni \mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению $\tilde{L}_+ \Psi = 0$, где $\tilde{L}_+ = (\partial + \tilde{A})\bar{\partial}$, $\tilde{A} = -\partial \ln c$. Найдется константа $\alpha \neq 0$ такая, что функция αc является вещественной. Функция $c = e^{2\Phi}$ порождает симметричный оператор

$$L_+ = -e^{-\Phi}(\partial + \tilde{A})\bar{\partial}e^{\Phi} - (\partial + A)(\bar{\partial} - \bar{A}) = QQ^+, \quad A = \frac{\tilde{A}}{2}, \quad (6)$$

при этом $\Psi \mapsto e^{-\Phi} \Psi = \Psi/\sqrt{c}$, $1 \mapsto 1/\sqrt{c}$. Оператор L_+ является несингулярным, если существует константа α такая, что $\alpha c(x, y) > 0$. Пусть $\varepsilon_0 = 0$ – точка спектра

оператора L_+ . Кандидатом на основное состояние оператора L_+ является функция $1/\sqrt{c}$, удовлетворяющая уравнению

$$Q^+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = (-\bar{\partial} + \bar{A})e^{-\Phi} = 0. \quad (7)$$

Так как $(\partial + A)e^{\Phi} = 0$, функция $\sqrt{c} = e^{\Phi}$ является кандидатом на основное состояние оператора $L_- = Q^+Q$. Однако это верно, если эти функции “обслуживают” спектральную задачу в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Укажем достаточные условия для этого.

Если коэффициенты периодичны (квазипериодичны), то в неособом случае $\alpha c > 0$ функции $\sqrt{\alpha c}$, $\sqrt{1/\alpha c}$ положительны и являются собственными. Мы знаем, что $A = -(\partial \ln c)/2$, $B = -(\Delta \ln c)/2$. При этом магнитный поток через элементарную ячейку $\square$ равен нулю, $\iint_{\square} B dz \wedge d\bar{z} = 0$. Это верно, поскольку

$$B = -\frac{\partial \bar{\partial} \ln c}{2}, \quad B dz \wedge d\bar{z} = -\Phi_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = -d(\Phi_z dz) = \frac{d(A dz)}{2},$$

поэтому поток – интеграл от точной формы.

Теперь рассмотрим основные состояния оператора Паули в экспоненциальном случае. Пусть $A = -2\Phi_z$, $\bar{A} = -2\Phi_{\bar{z}}$, где Φ – вещественная функция. Для всех функций $c' = e^W c$, где $W = \alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, мы имеем одно и то же магнитное поле $B = -\Delta \Phi = -(\Delta \ln c)/2 = -(\Delta \ln c e^W)/2$. Операторы

$$L_{\pm} = -(\partial_x - i\Phi_y)^2 - (\partial_y + i\Phi_x)^2 \pm \Delta \Phi,$$

$$L'_{\pm} = -\left(\partial_x - i\Phi_y - i\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\partial_y + i\Phi_x + i\frac{\alpha}{2}\right)^2 \pm \Delta \Phi$$

унитарно эквивалентны, и их эквивалентность задается унитарным калибровочным преобразованием

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{i(-\beta x + \alpha y)/2} = \Psi', \quad L_+ \rightarrow L'_+, \quad L_- \rightarrow L'_-.$$

Если только одна из функций $\sqrt{c'}$, $1/\sqrt{c'}$ ограничена, то $\varepsilon_0 = 0$, и именно ограниченная функция “обслуживает” спектр в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Мы имеем $\Psi_+ = e^{-i(\alpha x - \beta y)/2} \sqrt{c'}$ для L_+ и $\Psi_- = e^{-i(\alpha x - \beta y)/2} / \sqrt{c'}$ для L_- . Таким образом, мы построили столько различных функций основного уровня $\varepsilon_0 = 0$ для L_+ или L_- , сколько в классе $\{e^W c\}$ имеется ограниченных функций $e^W c$ или e^{-W}/c .

ПРИМЕР 1. Пусть $c = 1 + e^y$ не зависит от x . Тогда функция $1/c$ ограничена, а c неограничена. Пусть $c' = e^{\alpha x + \beta y} c$, тогда функция $1/c'$ ограничена, если $\alpha = 0$, $-1 \leq \beta \leq 0$. Таким образом, мы получаем континуум собственных функций оператора L , которые отвечают уровню $\varepsilon_0 = 0$, нумеруемых индексом β :

$$\Psi_{\beta} = e^{i\beta x/2} \frac{1}{\sqrt{c'}}, \quad \beta \in [-1, 0].$$

При $\beta = 0$ мы имеем $c' = c$, $\Psi_0 = 1/\sqrt{c}$. Неограниченные функции $\sqrt{c}$ и $1/\sqrt{c}$ удовлетворяют уравнениям $L_+(\sqrt{c}) = 0$ и $L_-(1/\sqrt{c}) = 0$, но не являются собственными.

При этом две функции c и $c' = \alpha e^W c$, где $\alpha = \text{const}$, $W = \gamma z + \delta \bar{z}$, порождают одно и то же поле B , так как $B = -(\Delta \ln c)/2 = -(\Delta \ln c')/2$.

Для дифференциалов

$$\Omega_1 = \frac{(k - a_1) \dots (k - a_n)}{(k - k_0) \dots (k - k_n)} dk, \quad \Omega_2 = \frac{s(p + \bar{a}_1) \dots (p + \bar{a}_n)}{(p - p_0) \dots (p - p_n)} dp,$$

где s – некоторая константа, должно выполняться условие на вычеты

$$\text{Res}_{k_j} \Omega_1 + \text{Res}_{p_j} \Omega_2 = 0.$$

Выбирая подходящие дивизоры $\mathcal{D}' = (a_1, \dots, a_n)$, мы получаем любые наперед заданные значения коэффициентов $\kappa_j \in \mathbb{C}$. Нас интересуют такие дивизоры $\mathcal{D}'$ и такие $W_j = p_j z - k_j \bar{z}$, что функция c в классе эквивалентности $c \rightarrow c' = \alpha e^W c$, $\alpha = \text{const}$, является вещественной и положительной. Для вещественности c сумма в (12) должна состоять из следующих слагаемых.

1. Слагаемое “экспоненциального типа”: пусть $\bar{p}_j = -k_j$ для некоторого j , при этом $W_j = p_j z + \bar{p}_j \bar{z}$ (чисто вещественная экспонента), κ_j вещественно, $\kappa_j e^{W_j}$ вещественно. В этом случае мы получаем слагаемые вида $\kappa_j e^{2(\alpha_j x + \beta_j y)}$, где $p_j = \alpha_j + i\beta_j$, $k_j = -\bar{p}_j$ и $\kappa_j - \bar{\kappa}_j = 0$.

2. Слагаемое “смешанного типа”: пусть $p_l = -\bar{k}_j$, $k_l = -\bar{p}_j$ для некоторой пары индексов j, l . При этом $\bar{\kappa}_j = \kappa_l$ и $\kappa_j e^{W_j} + \kappa_l e^{W_l} = \kappa_j e^{W_j} + \bar{\kappa}_l e^{\bar{W}_l}$ вещественно. Мы считаем, что $k_j \neq k_q$ и $p_j \neq p_q$ при $j \neq q$. Тогда мы получаем слагаемые вида

$$e^{W_{R,j}} (\kappa'_j \cos W_{I,j} - \kappa''_j \sin W_{I,j}),$$

где $\kappa_j = \kappa'_j + i\kappa''_j$, $W_j = W_{R,j} + iW_{I,j}$,

$$W_{R,j} = (\alpha_j - \gamma_j)x - (\beta_j - \delta_j)y, \quad W_{I,j} = (\beta_j - \delta_j)x + (\alpha_j + \gamma_j)y,$$

$p_l = -\bar{k}_j = \alpha_l + i\beta_l$, $k_l = -\bar{p}_j = \gamma_l + i\delta_l$. Если $W_{I,j} = 0$, то мы возвращаемся к случаю 1: $p_j = -k_j$.

3. Чисто “тригонометрический тип” мы имеем, если в случае 2 (слагаемые смешанного типа) $W_{R,j} = 0$ или $\alpha_j = \gamma_j$, $\beta_j = -\delta_j$, при этом $k_j = \bar{p}_j$, т.е. $W_{I,j} = \beta_j x + \alpha_j y$, $e^{W_j} = e^{p_j z - \bar{p}_j \bar{z}}$.

Во всех этих случаях решения для c вещественны. Наличие слагаемых смешанного типа приводит к тому, что функция c имеет нули, и тем самым появляется сингулярность магнитного поля, если нули не “блокированы” другими слагаемыми.

Рассмотрим чисто экспоненциальный тип. Мы имеем

$$c = \sum_j \kappa_j e^{W_j(x,y)} = \sum_{j: \kappa_j > 0} \kappa_j e^{W_j(x,y)} + \sum_{j: \kappa_j < 0} \kappa_j e^{W_j(x,y)},$$

где все κ_j – вещественны. Пусть первоначально $\kappa_j > 0$ для всех j . Тогда, как мы покажем ниже, магнитное поле $B = -(\Delta \ln c)/2$ ограничено в $\mathbb{R}^2$. Для функций $c' = \kappa e^W c$ обе функции $\sqrt{c'}$ и $1/\sqrt{c'}$ одновременно ограничены быть не могут – они либо обе экспоненциально растут при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, либо одна из них $(1/\sqrt{c'})$ ограничена. В последнем случае пара $\{c, W\}$ определяет основное состояние.

Рассмотрим чисто тригонометрический случай. Здесь следует выделить четные и нечетные n . Если n четно, т. е. число $n + 1$ точек пересечения нечетно, то

$$c = \sum_{j=0}^{(n+1)/2} (\kappa'_j \cos W_{I,j} + \kappa''_j \sin W_{I,j}),$$

при этом $W_j = iW_{I,j} = -k_j \bar{z} - \bar{k}_j z$, $k_j = \alpha_j + i\beta_j$. В этом случае функция c всегда имеет нули.

Если n нечетно, т. е. число $n + 1$ точек пересечения четно, то

$$c = 1 + \sum_{j=1}^{n/2} (\kappa'_j \cos W_{I,j} + \kappa''_j \sin W_{I,j}).$$

При надлежащем выборе констант $\kappa', \kappa'' \in \mathbb{R}$ имеем $c > 0$, и магнитное поле B гладко, периодически и имеет нулевой поток сквозь элементарную ячейку двоякопериодической решетки (или квазипериодическое среднее, если функция c квазипериодична). Области в пространстве констант, при которых имеет место периодичность, было бы интересно описать. Эти области ограничены. Набор прямых $W_{I,j} = \alpha_j x + \beta_j y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, проходящих через начало координат, должен быть таков, что все они проходят через целочисленные точки некоторой решетки в плоскости $\mathbb{R}^2$, а коэффициенты α_j, β_j должны быть рационально кратными числу 2π . В противном случае поля квазипериодичны. Наш вывод состоит в том, что в регулярном тригонометрическом случае обе функции $\sqrt{c}$, $1/\sqrt{c}$ периодичны, положительны и являются основными состояниями в обоих секторах L_+, L_- . В общем квазипериодическом случае всё обстоит так же.

ЗАМЕЧАНИЕ. Найдутся “критические” значения констант κ'_j и κ''_j такие, что у функции c существует изолированный нуль (повторяющийся периодически, т. е. мы имеем решетку изолированных нулей). Можно подобрать параметры так, чтобы в этой точке было справедливо равенство $d^2 c = a^2(dx^2 + dy^2)$. Тогда магнитное поле имеет дельтаобразную особенность, $B = -(\Delta \ln c)/2 \sim \delta(x - x_0, y - y_0)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 4$. Покажем, что в этом случае мы имеем несингулярный тригонометрический оператор, существенно зависящий от обоих переменных x, y . Пусть $\mathcal{D}' = (a_1, a_2, -a_1, -a_2)$, тогда функция Ψ записывается как

$$\Psi = e^{k\bar{z}} \frac{u_0 k^4 + u_1 k^3 + u_2 k^2 + u_3 k + u_4}{(k^2 - a_1^2)(k^2 - a_2^2)}$$

и $\varphi = e^{pz}$. Предположим, что точки пересечения Γ' и Γ'' суть $0, k_1, k_2, -k_1, -k_2$ для Γ' и $0, p_1, p_2, -p_1, -p_2$ для Γ'' . Пусть

$$p_1 = k_1 \in \mathbb{R}, \quad p_2 = -k_2 \in i\mathbb{R}. \quad (13)$$

В этом случае антиинволюция $\sigma: k \rightarrow -\bar{p}$ корректно определена на Γ . Для дифференциалов

$$\Omega_1 = \frac{(k^2 - a_1^2)(k^2 - a_2^2)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)k} dk, \quad \Omega_2 = \frac{s(p^2 - \bar{a}_1^2)(p^2 - \bar{a}_2^2)}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)p} dp,$$

где s – некоторое число, должно выполняться условие на вычеты

$$\operatorname{Res}_0 \Omega_1 + \operatorname{Res}_0 \Omega_2 = 0, \quad \operatorname{Res}_{\pm k_j} \Omega_1 + \operatorname{Res}_{\pm p_j} \Omega_2 = 0.$$

В точках пересечения имеем

$$\Psi(0) = 1, \quad \Psi(\pm k_j) = e^{\pm p_j z}, \quad j = 1, 2.$$

Откуда

$$\begin{aligned} u_4 &= a_1^2 a_2^2, \\ u_0 k_1^4 + u_1 k_1^3 + u_2 k_1^2 + u_3 k_1 &= -a_1^2 a_2^2 + (k_1^2 - a_1^2)(k_1^2 - a_2^2) e^{p_1 z - k_1 \bar{z}}, \\ u_0 k_2^4 + u_1 k_2^3 + u_2 k_2^2 + u_3 k_2 &= -a_1^2 a_2^2 + (k_2^2 - a_1^2)(k_2^2 - a_2^2) e^{p_2 z - k_2 \bar{z}}, \\ u_0 k_1^4 - u_1 k_1^3 + u_2 k_1^2 - u_3 k_1 &= -a_1^2 a_2^2 + (k_1^2 - a_1^2)(k_1^2 - a_2^2) e^{-p_1 z + k_1 \bar{z}}, \\ u_0 k_2^4 - u_1 k_2^3 + u_2 k_2^2 - u_3 k_2 &= -a_1^2 a_2^2 + (k_2^2 - a_1^2)(k_2^2 - a_2^2) e^{-p_2 z + k_2 \bar{z}}. \end{aligned}$$

Сложим второе равенство с четвертым, а также третье с пятым, получим

$$\begin{aligned} 2u_0 k_1^4 + 2u_2 k_1^2 &= -2a_1^2 a_2^2 + (k_1^2 - a_1^2)(k_1^2 - a_2^2) 2 \cos(2k_1 y), \\ 2u_0 K^4 - 2u_2 K^2 &= -2a_1^2 a_2^2 + (K^2 + a_1^2)(K^2 + a_2^2) 2 \cos(2Kx), \end{aligned}$$

где $k_2 = iK$.

Пусть $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 = ia \in i\mathbb{R}$. В этом случае с учетом (13) при $s = -1$ условия на вычеты дифференциалов Ω_1 и Ω_2 выполнены. Имеем

$$c = u_0 = \frac{a_1^2 a^2}{k_1^2 K^2} (1 - A \cos(2k_1 y) - B \cos(2Kx)),$$

где

$$A = \frac{(k_1^2 - a_1^2)(k_1^2 + a^2)}{k_1^2(k_1^2 + K^2)}, \quad B = \frac{(K^2 + a_1^2)(K^2 - a^2)}{K^2(k_1^2 + K^2)}.$$

При $K = 10$, $k_1 = 5$, $a_1 = 2$, $a = 1$ получаем

$$A = \frac{546}{3125}, \quad B = \frac{2574}{3125}, \quad A + B = \frac{624}{625},$$

следовательно, при указанных значениях констант магнитное поле гладко и периодически.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим теперь класс всех потенциалов, для которых c – комбинация чисто вещественных экспонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *индикатрисой роста* вещественной линейной формы $W = \alpha x + \beta y$ функцию $I_W(\cdot)$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$, заданную равенством $I_W(\phi) = \max(\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi, 0)$, где ϕ – полярный угол точки на окружности. Для набора вещественных линейных форм $\{W_j\}$ назовем индикатрисой роста функцию $I_{\{W_j\}}(\cdot) = \max_j I_{W_j}(\cdot)$. Такой объект некоторые специалисты называют “тропической суммой”.

Рис. 2. Многоугольник T для потенциала $c = 1 + e^y$. В данном случае T – это отрезок.

Пусть функция c экспоненциально растет во всех направлениях, а следовательно, экспоненциально растет и $\sqrt{c}$. Это стабильное свойство. В этом случае $1/\sqrt{c}$ экспоненциально убывает в $\mathbb{R}^2$. Одновременно с ней убывает целое семейство функций вида $1/\sqrt{c'}$, где $c' = e^W c$ (это верно для любой “достаточно малой” линейной формы $W = \varepsilon(ax + by)$, $\varepsilon \rightarrow 0$).

Для начала обсудим нестабильную ситуацию $n = 1$ (число точек пересечения равно 2). Рассмотрим абсолютно типичное решение $c = 1 + e^y$ из примера 1. Нарисуем на плоскости (α, β) многоугольник T , точки которого суть (α, β) такие, что ограничена функция $1/\sqrt{c'}$, где $c' = e^W c$, $W = \alpha x + \beta y$. В данном случае T совпадает

Рис. 3. Направления роста W_j показаны стрелками; каждый луч с началом в нуле попадает хотя бы в один сектор роста для c .

Рис. 4. Направления роста экспонент, входящих в функцию $c = e^x + e^y + e^{-x-y}$ (а) и многоугольник T для этой функции (б).

с отрезком: $\beta \in [0, 1]$ в $W = \alpha x + \beta y$ (см. рис. 2). Он не содержит внутренних точек, поэтому в классе эквивалентности потенциала $c = 1 + e^y$ нет функций c' , экспоненциально растущих во всех направлениях. То же верно для всех потенциалов с $n + 1 = 2$, $c = \kappa_1 e^{W_1} + \kappa_2 e^{W_2}$. Нестабильные случаи для произвольного $n > 1$ отвечают наборам линейных форм $\{W_j\}$ таких, что все их попарные разности пропорциональны друг другу с постоянными коэффициентами. При этом магнитное поле зависит лишь от одной переменной.

Рассмотрим два примера индикатрис роста в классе $\{e^{Wc}\}$, $c = 1 + e^y$, $W = \alpha x + \beta y$, $\beta \in [0, 1]$. Выбирая $W = e^{-y/2}$, получаем $c' = e^{y/2} + c^{-y/2}$, $I_{W_j}(\phi) = 0$ ровно в двух точках $\phi = 0, \pi$ (рис. 3а). Если положить $W = e^{(x-y)/2}$, $c' = e^{(x+y)/2} + c^{(x-y)/2}$, то $I_{W_j}(\phi) = 0$ на отрезке (рис. 3б).

Стабильная ситуация возможна начиная с $n = 2$ (см. рис. 4). Возьмем $c = e^{W_1} + e^{W_2} + e^{W_3} = e^x + e^y + e^{-x-y}$. В данном случае функция $1/c' = 1/e^{Wc}$ ограничена, если и только если $W \in T$, где T – внутренность треугольника с вершинами в точках $-W_1 = (-1, 0)$, $-W_2 = (0, -1)$, $-W_3 = (1, 1)$ (см. рис. 4б).

Опишем все несингулярные случаи для экспоненциальных c . Пусть знаки всех коэффициентов перед экспонентами в сумме одинаковы, т. е.

$$c = \sum_{j: \kappa_j > 0} e^{W_j \kappa_j}, \quad \text{или} \quad c = \sum_{j: \kappa_j < 0} e^{W_j \kappa_j}.$$

Заметим, что индикатрисы роста различны для наборов $\{W_j\}$ и $\{W_j + W\}$. Это инвариант набора экспонент, входящих в функцию c , а не магнитного поля. Он не зависит от коэффициентов κ_j , входящих в c . Имеются следующие возможности:

Рис. 5. Направления роста. Отмечены точки ϕ_j^0 , в которых в асимптотике участвуют сразу две экспоненты с одинаковым ростом (а) и область, в которой $I_{\{W_j\}}(\varphi) = 0$ – жирная линия (б); зона положительности для $I_{\{W_j\}}(\varphi)$ – объединение областей $x > 0$, $y > -2x$, $y < x$.

или $I_{\{W_j\}}(\phi) > 0$ для всех ϕ (см. рис. 5а, на котором отмечены точки ϕ_j^0 , в которых две экспоненты растут с одинаковой скоростью, а остальные мажорируются этими двумя экспонентами; $\cos \phi_1^0 = \sin \phi_1^0 = 1/\sqrt{2}$, $\cos \phi_2^0 + 2 \sin \phi_2^0 = 0$, $2 \cos \phi_3^0 + \sin \phi_3^0 = 0$, или $I_{\{W_j\}}(\phi) = 0$ на отрезке (см. рис. 5б). Если $I_{\{W_j\}}(\phi) = 0$ в изолированных точках $\phi = \phi_1, \dots, \phi_s$, то $s = 1$ (что соответствует граничным точкам треугольника T) или $s = 2$ (см. рис. 3а).

Выберем в классе $\{ce^W\}$ представителя c' с наименьшим множеством нулей индикатрисы роста функции $W'_j = W_j + W$. Случай изолированных нулей индикатрисы роста с двумя противоположными нулями, $I_{W_j}(\phi_1) = I_{W_j}(\phi + \pi) = 0$, реализуется для $c = e^{W_1} + e^{-W_1}$, и выбором представителя нельзя добиться, чтобы $I_{\{W_j\}}(\phi) > 0$ для всех ϕ . Напротив, если $s = 1$, то, выбирая W , можно добиться, чтобы для всех ϕ имело место $I_{W_j+W}(\phi) > 0$. Этот случай мы назовем стабильным, а реализацию $\{W_j\}$ с изолированным нулем $I_{W_j}(\phi_1) = 0$ – граничной. Легко видеть, что в стабильном случае функция $c > 0$ растет во всех направлениях, а c^{-1} экспоненциально убывает во всех направлениях.

Пусть выбрана стабильная функция $c_0 \in \{ce^W\}$. Она является основным состоянием оператора L_- . Все стабильные функции вида $c_W = c'e^W$ определяют основные состояния при $W = \alpha x + \beta y$:

$$\Psi_W = \frac{e^{-i(\alpha y - \beta x)/2}}{\sqrt{c_0} e^{(\alpha x + \beta y)/2}} \frac{e^{-i(\alpha y - \beta x)/2}}{\sqrt{c_W}}.$$

Подведем итог. Оператор L_- имеет семейство основных состояний Ψ_W , занумерованных такими $W = \alpha x + \beta y$, что набор $\{W_j + W\}$ имеет строго положительную индикатрису роста всюду на окружности направлений роста. Это ограничение задает зависящую от W область T на плоскости (α, β) , являющуюся выпуклым многоугольником. Для W , лежащих внутри T , основное состояние Ψ_W принадлежит $L_2(\mathbb{R}^2)$, для W , лежащих на границе T , состояния Ψ_W не принадлежат $L_2(\mathbb{R}^2)$ и отвечают нижней точке непрерывного спектра оператора L_- в $L^P = L_+ \oplus L_-$. Мы полагаем, что для сектора L_+ нижний уровень строго больше нуля. Во всех состояниях Ψ_W для L_- , кроме c_0 , имеется ненулевой ток J_W , определяющийся фазой комплексной функции Ψ_W . Векторы тока пробегают выпуклый многоугольник.

Отметим следующий важный факт. Интеграл от магнитного поля по плоскости расходится (см. приложение):

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} B \, dx \, dy = \frac{1}{2} R \oint_0^{2\pi} I_{\{W_j\}}(\phi) \, d\phi + o(R), \quad R \rightarrow \infty.$$

Для функций общего вида

$$c = \sum_j \kappa_j e^{W_j} + \sum_q e^{W_{R,q}} (\kappa'_q \cos W_{I,q} + \kappa''_q \sin W_{I,q})$$

мы определяем индикатрису роста, используя только часть слагаемых: набор $\{W\}_+$ состоит из тех W_j , для которых $\kappa_j > 0$. Соответствующую область обозначим через T^+ (возможно, стоит сначала сделать замену знака $c \rightarrow -c$ для получения большей области). Если все остальные линейные формы $W_j, W_{R,q}$ лежат в T^+ , то всегда можно подобрать ненулевые коэффициенты при них так, чтобы $c \neq 0$ при всех x, y (и магнитное поле было неособым). *В то же время можно подобрать эти коэффициенты так, чтобы функция c имела нули.*

3.2. Случай $g = 1$. Операторы с феноменом Ааронова–Бома и магнитные блоховские функции. В этом пункте мы рассмотрим случай эллиптических кривых (т. е. кривых рода $g = 1$). Как мы увидим ниже, здесь появляются интересные явления, объединяющие настоящую работу с работами [2]–[4], в которых изучается случай ненулевого магнитного потока (см. также работы [17]–[21] по поводу магнитных трансляций и топологии).

Пусть $\Gamma' = \Gamma'' = \mathbb{C}/\Lambda$, где $\Lambda = \{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ – некоторая решетка в $\mathbb{C}$. Мы будем предполагать, что $\omega_1 = 1$ и что решетка инвариантна относительно сопряжения $\bar{\Lambda} = \Lambda$ (это выполнено, например, если ω_2 – чисто мнимая величина). Положим $\infty_1 = 0 \in \Gamma'$, $\infty_2 = 0 \in \Gamma''$. Пусть $Q_0, \dots, Q_n \in \Gamma'$ и $R_0, \dots, R_n \in \Gamma''$ отвечают точкам пересечения $\Gamma' \cap \Gamma''$.

Выразим функцию Ψ через σ - и ζ -функции Вейерштрасса. Напомним, что $\zeta(w)$ – мероморфная функция на $\mathbb{C}$ с полюсами первого порядка в точках решетки Λ , причем $\zeta(w + 2\omega_s) = \zeta(w) + 2\eta_s$, где $\eta_s = \zeta(\omega_s)$. Из инвариантности решетки при сопряжении вытекает, что $\zeta(w) = \overline{\zeta(\bar{w})}$. Функция $\sigma(w)$ – это аналитическая функция на $\mathbb{C}$ с простыми нулями в точках решетки Λ , причем

$$\sigma(w + 2\omega_s) = -e^{2\eta_s(w + \omega_s)} \sigma(w), \quad \sigma(w - 2\omega_s) = -e^{-2\eta_s(w - \omega_s)} \sigma(w).$$

Из инвариантности решетки при сопряжении также вытекает, что $\sigma(w) = \overline{\sigma(\bar{w})}$.

Функция $\Psi'' = \Psi|_{\Gamma''}$ имеет вид (здесь $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, $p \in \Gamma''$, $P = D''$, P – преобразование Абеля дивизора D'')

$$\Psi'' = e^{-z\zeta(p)} \frac{\sigma(p+z+P)}{\sigma(z+P)\sigma(p+P)}.$$

Функцию $\Psi' = \Psi|_{\Gamma'}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi' = e^{-\bar{z}\zeta(k)} & \left(\frac{\sigma(k+\bar{z}+A_0)\sigma(k-Q_1)\dots\sigma(k-Q_n)}{\sigma(k+P_1)\dots\sigma(k+P_{n+1})} f_0(z, \bar{z}) + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma(k+\bar{z}+A_n)\sigma(k-Q_0)\dots\sigma(k-Q_{n-1})}{\sigma(k+P_1)\dots\sigma(k+P_{n+1})} f_n(z, \bar{z}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= Q_1 + \dots + Q_n + P_1 + \dots + P_{n+1}, \\ A_1 &= Q_0 + Q_2 + \dots + Q_n + P_1 + \dots + P_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_n &= Q_0 + \dots + Q_{n-1} + P_1 + \dots + P_{n+1} \end{aligned}$$

и $D' = P_1 + \dots + P_{n+1}$. Из условия согласованности $\Psi'(Q_s) = \Psi''(R_s)$ получаем

$$\begin{aligned} e^{-\bar{z}\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(Q_0+\bar{z}+A_0)\sigma(Q_0-Q_1)\dots\sigma(Q_0-Q_n)}{\sigma(Q_0+P_1)\dots\sigma(Q_0+P_{n+1})} f_0(z, \bar{z}) &= \\ = e^{-z\zeta(R_0)} \frac{\sigma(R_0+z+P)}{\sigma(z+P)\sigma(R_0+P)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ e^{-\bar{z}\zeta(Q_n)} \frac{\sigma(Q_n+\bar{z}+A_n)\sigma(Q_n-Q_0)\dots\sigma(Q_n-Q_{n-1})}{\sigma(Q_n+P_1)\dots\sigma(Q_n+P_{n+1})} f_n(z, \bar{z}) &= \\ = e^{-z\zeta(R_n)} \frac{\sigma(R_n+z+P)}{\sigma(z+P)\sigma(R_n+P)}, \end{aligned}$$

откуда находим $f_s(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} f_0 &= e^{-z\zeta(R_0)+\bar{z}\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(R_0+z+P)}{\sigma(\bar{z}+Q_0+\dots+Q_n+P_1+\dots+P_{n+1})\sigma(z+P)} S_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_n &= e^{-z\zeta(R_n)+\bar{z}\zeta(Q_n)} \frac{\sigma(R_n+z+P)}{\sigma(\bar{z}+Q_0+\dots+Q_n+P_1+\dots+P_{n+1})\sigma(z+P)} S_n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{\sigma(Q_0+P_1)\dots\sigma(Q_0+P_{n+1})}{\sigma(R_0+P)\sigma(Q_0-Q_1)\dots\sigma(Q_0-Q_n)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ S_n &= \frac{\sigma(Q_n+P_1)\dots\sigma(Q_n+P_{n+1})}{\sigma(R_n+P)\sigma(Q_n-Q_0)\dots\sigma(Q_n-Q_{n-1})}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$c(z, \bar{z}) = \left(\frac{\sigma(\bar{z} + A_0)\sigma(-Q_1)\dots\sigma(-Q_n)}{\sigma(P_1)\dots\sigma(P_{n+1})} f_0(z, \bar{z}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sigma(\bar{z} + A_n)\sigma(-Q_0)\dots\sigma(-Q_{n-1})}{\sigma(P_1)\dots\sigma(P_{k+1})} f_n(z, \bar{z}) \right).$$

Отметим, что у всех f_s в знаменателе стоит один и тот же множитель

$$\sigma'\sigma'' = \sigma(\bar{z} + Q_0 + \dots + Q_n + P_1 + \dots + P_{n+1})\sigma(z + P).$$

Умножив все функции на этот множитель, мы можем найти положительные вещественные функции $\tilde{c} = c\sigma(\bar{z} + Q + D')\sigma(z + D'')$ и соответствующие функции $\tilde{\Psi} = \Psi\sigma(\bar{z} + Q + D')\sigma(z + D'')$. Функции $\tilde{\Psi}$ не являются уже обычными функциями Блоха–Флоке. Чем же они являются? Это мы увидим ниже.

Найдем данные для периодических гладких вещественных магнитных полей $\tilde{B} = -(\Delta \ln \tilde{c})/2$ при $n = 1$ (две точки пересечения). Имеем для $\tilde{c}$ следующее выражение:

$$e^{\bar{z}\zeta(Q_1) - z\zeta(R_1)} \frac{\sigma(Q_0)\sigma(P_1 + Q_1)\sigma(P_2 + Q_1)\sigma(P + R_1 + z)\sigma(P_1 + P_2 + Q_0 + \bar{z})}{\sigma(P + R_1)} - \\ - e^{\bar{z}\zeta(Q_0) - z\zeta(R_0)} \frac{\sigma(Q_1)\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)\sigma(P + R_0 + z)\sigma(P_1 + P_2 + Q_1 + \bar{z})}{\sigma(P + R_0)}.$$

Положим

$$Q_1 = -Q_0, \quad R_0 = -Q_0, \quad R_1 = Q_0, \quad P = P_1 + P_2, \quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\tilde{c} = e^{-\bar{z}\zeta(Q_0) - z\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 - Q_0)\sigma(P_2 - Q_0)\sigma(P + Q_0 + z)\sigma(P + Q_0 + \bar{z})}{\sigma(P_1 + P_2 + Q_0)} + \\ + e^{\bar{z}\zeta(Q_0) + z\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)\sigma(P - Q_0 + z)\sigma(P - Q_0 + \bar{z})}{\sigma(P_1 + P_2 - Q_0)} = \\ = e^{-2x\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 - Q_0)\sigma(P_2 - Q_0)|\sigma(P + Q_0 + z)|^2}{\sigma(P_1 + P_2 + Q_0)} + \\ + e^{2x\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)|\sigma(P - Q_0 + z)|^2}{\sigma(P_1 + P_2 - Q_0)}.$$

Выберем P_1, P_2 так, чтобы величины

$$A_1 = \frac{\sigma(P_1 - Q_0)\sigma(P_2 - Q_0)}{\sigma(P_1 + P_2 + Q_0)}, \quad A_2 = \frac{\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)}{\sigma(P_1 + P_2 - Q_0)}$$

имели один знак, получим $\tilde{c} \neq 0$. Отметим, что условие на вычеты для дифференциалов

$$\Omega_1 = \frac{\sigma(k + P_1)\sigma(k + P_2)\sigma(k - P)}{\sigma(k - Q_0)\sigma(k - Q_1)\sigma(k)} dk, \\ \Omega_2 = - \frac{\sigma(p + P_1)\sigma(p + P_2)\sigma(p - P)}{\sigma(p - Q_0)\sigma(p - Q_1)\sigma(p)} dp$$

выполнено автоматически.

Пусть $\omega_1 \in \mathbb{R}$, $\omega_2 = i\tau \in i\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \tilde{c}(x, y + 2\tau) e^{-2x\zeta(Q_0)} A_1 \sigma(P + Q_0 + z + 2\omega_2) \sigma(P + Q_0 + \bar{z} - 2\omega_2) + \\
 & + e^{2x\zeta(Q_0)} A_2 \sigma(P - Q_0 + z + 2\omega_2) \sigma(P - Q_0 + \bar{z} - 2\omega_2) = \\
 & = e^{-2x\zeta(Q_0)} A_1 e^{2\eta_2(P+Q_0+z+\omega_2)} \sigma(P + Q_0 + z) e^{-2\eta_2(P+Q_0+\bar{z}-\omega_2)} \sigma(P + Q_0 + \bar{z}) + \\
 & + e^{2x\zeta(Q_0)} A_2 e^{2\eta_2(P-Q_0+z+\omega_2)} \sigma(P - Q_0 + z) e^{-2\eta_2(P-Q_0+\bar{z}-\omega_2)} \sigma(P - Q_0 + \bar{z}) = \\
 & = e^{-2x\zeta(Q_0)} A_1 \sigma(P + Q_0 + z) \sigma(P + Q_0 + \bar{z}) e^{2\eta_2(z-\bar{z}+2\omega_2)} + \\
 & + e^{2x\zeta(Q_0)} A_2 \sigma(P - Q_0 + z) \sigma(P - Q_0 + \bar{z}) e^{2\eta_2(z-\bar{z}+2\omega_2)} = \\
 & = \hat{c}(x, y) e^{2\eta_2(z-\bar{z}+2\omega_2)}, \\
 & \tilde{c}(x + 2\omega_1, y) = e^{-2x\zeta(Q_0)-4\omega_1\zeta(Q_0)} A_1 \sigma(P + Q_0 + z + 2\omega_1) \sigma(P + Q_0 + \bar{z} + 2\omega_1) + \\
 & + e^{2x\zeta(Q_0)+4\omega_1\zeta(Q_0)} A_2 \sigma(P - Q_0 + z + 2\omega_1) \sigma(P - Q_0 + \bar{z} + 2\omega_1) = \\
 & = e^{-2x\zeta(Q_0)-4\omega_1\zeta(Q_0)} A_1 e^{2\eta_1(P+Q_0+z+\omega_1)} \sigma(P + Q_0 + z) e^{2\eta_1(P+Q_0+\bar{z}+\omega_1)} \sigma(P + Q_0 + \bar{z}) + \\
 & + e^{2x\zeta(Q_0)+4\omega_1\zeta(Q_0)} A_2 e^{2\eta_1(P-Q_0+z+\omega_1)} \sigma(P - Q_0 + z) e^{2\eta_1(P-Q_0+\bar{z}+\omega_1)} \sigma(P - Q_0 + \bar{z}).
 \end{aligned}$$

Пусть Q_0 – решение уравнения $\omega_1\zeta(Q_0) = \eta_1 Q_0$ (из нечетности функции ζ следует, что решение существует). Тогда

$$\hat{c}(x + 2\omega_1, y) = \hat{c}(x, y) e^{2\eta_1(2P+z+\bar{z}+2\omega_1)}.$$

Следовательно, магнитное поле $\tilde{B} = -(\Delta \ln \tilde{c})/2$ периодически.

Заметим, что $\Delta \ln(\sigma' \sigma'') = 2\pi \delta_{Q+D'} + 2\pi \delta_{D''}$ локально имеет вид периодической суммы двух дельта-функций с весом 2π , так как $\sigma' = \sigma(\bar{z} + u)$, $\sigma'' = \sigma(z + v)$. При этом, если $u = v = 0$, то $\ln(\sigma \bar{\sigma}) \sim \ln|z|^2$ в окрестности точки $z = 0$, кроме того, $\Delta(\ln|z|^2) = 4\pi \delta(x) \delta(y)$, так что $\Delta(\ln \sigma')$ и $\Delta(\ln \sigma'')$ положительны.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Магнитный поток гладкого периодического поля $\tilde{B}$ сквозь элементарную ячейку $\square$ равен -2π (одному кванту магнитного потока).*

Это утверждение следует из того, что для “алгебро-геометрического” поля B , для которого определены обычные функции Блоха–Флоке, поток сквозь $\square$ равен нулю по определению. Вычтем из потока $-2\pi \sigma' \sigma'' = |\sigma(z + P)|^2$. Из поля B в пределах элементарной ячейки $\square$ вычтем две дельта-функции, $\tilde{B} = B - \pi \delta_{Q+D'} - \pi \delta_{D''}$ (при этом $D'' = Q + D'$ в нашем примере для $n = 1$). После этого мы будем иметь нулевой поток B . Отсюда следует, что полный поток $\iint_{\square} \tilde{B} dx dy = -2\pi$.

Сопоставление с базисами Дубровина–Новикова [3], [4] для ненулевых потоков. Наша функция $\tilde{\Psi}$, собственная для оператора L^P с магнитным полем $\tilde{B}$, является магнитным аналогом блоховских функций. Такое семейство магнитных блоховских функций, занумерованное точками тора $T^2 = \Gamma'$, было построено для всех ненулевых целых значений магнитного потока периодического поля $B(x, y)$ в работах [3], [4]. Все функции из этого семейства принадлежат гильбертову пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$ и выражаются через эллиптические σ -полиномы от z ($\bar{z}$ не входит в формулы [3], [4]). Тем не менее можно изменить нормировку и базис для сингулярных “алгебро-геометрических полей” рода $g = 1$, найденных в настоящей работе,

и получить все функции из работ [3], [4] для $\varepsilon_0 = 0$. При этом весь набор функций будет изоморфен “уровню Ландау”.

Сингулярное магнитное поле B с дельтаобразной сингулярностью, является алгебро-геометрической реализацией операторов с феноменом Ааронова–Бома, для которых можно вычислить комплексное многообразие блоховских решений уравнения $L^P \Psi = 0$. Из них гильбертову пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$ могут принадлежать лишь функции типа $1/\sqrt{c}$, если $\tilde{c}$ не имеет нулей. В нашем примере для $n = 1$ мы имеем

$$c = |s(z + P)|^{-2} \tilde{c}, \quad B = \tilde{B} + 2\pi\delta(z + P).$$

Итак, c имеет (периодически повторяющийся) полюс второго порядка при $z + P = 0$. Следовательно, функция $c^{-1/2}$ имеет нуль при $z + P = 0$ и положительна всюду вне этой точки. Это основное состояние для периодического оператора с феноменом Ааронова–Бома и суммарным потоком, равным нулю. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ это состояние отвечает нижней точке непрерывного спектра.

Мы также нашли все комплексные функции Блоха–Флоке для $\varepsilon_0 = 0$. Это семейство зависит от одного параметра k и соответствует уровню Ландау с потоком, равным одному кванту, как указано выше. Подробное сопоставление нашего базиса с базисом Дубровина–Новикова магнитных блоховских функций [3], [4] будет произведено в следующей работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотика магнитного потока

Вычислим асимптотику магнитного потока через диск D_R^2 радиуса R в чисто экспоненциальном случае

$$c = e^{2\Phi} = \sum_j \kappa_j e^{W_j}, \quad \kappa_j > 0, \quad W_j = R(\alpha_j \cos \phi + \beta_j \sin \phi).$$

Вектор-потенциал на окружности радиуса $r = R$ в полярных координатах имеет вид

$$A = \Phi_y dx - \Phi_x dy = -\frac{1}{2} R \left(\sum_j \kappa_j e^{W_j} (\alpha_j \cos \phi + \beta_j \sin \phi) \right) \frac{d\phi}{c}. \quad (14)$$

Наше предположение заключается в том, что существуют в точности N индексов $j = 1, \dots, N$ таких, что индикатриса $I_{\{W_j\}}(\phi)$ является строго положительной, а все остальные индексы $q \neq 1, 2, \dots, N$ несущественны (соответствующие линейные формы W_q расположены строго внутри выпуклой области $T \subset \mathbb{R}^2$ с координатами (α, β) , нумерующими быстроубывающие векторы основных состояний нашего оператора). Существуют области $\Delta_j = [\phi_j^0, \phi_{j-1}^0]$, $j = 1, \dots, N$, $\phi_0^0 = \phi_N^0$, на окружности единичного радиуса, где $I_{\{W_k\}} = I_{W_j}(\phi)$. Таким образом, область Δ_N граничит с Δ_{N-1} и Δ_1 (т.е. наша нумерация является циклической против часовой стрелки).

Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} \iint_{D_R^2} B(x, y) dx dy + \frac{1}{2} R \oint_{S^1} I_{\{W_k\}}(\phi) d\phi = \\ = \sum_{s \geq 1} R^{-s} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(s)} \{Q_s(a_j) + Q_s(a_j^{-1})(-1)^s\} + \text{остаточный член}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\lambda_j^{(s)}$, $Q_s(a_j)$ – некоторые константы, которые мы определим далее. Мы полагаем, что этот ряд является расходящимся, поскольку, как показано ниже, коэффициенты Q_s растут, как $s!$. Об остаточном члене мы утверждаем, что он убывает быстрее любой отрицательной степени R . Мы также утверждаем, что “регуляризованный поток” в левой части (15) имеет порядок $O(R^{-1})$ при $R \rightarrow \infty$.

Проводя вычисления в окрестности критической точки ϕ_j^0 , мы используем следующую функцию:

$$t_j(z) = \frac{W_{j+1} - W_j}{R} = (\alpha_{j+1} - \alpha_k) \cos \phi + (\beta_{j+1} - \beta_j) \sin \phi.$$

Здесь $\phi = \phi_j^0 + z$, $|z| < \epsilon$. При $z = 0$ мы имеем $W_j = W_{j+1}$, $t_j(0) = 0$. Обратная функция $z(t_j)$ задана обратным рядом с конечным радиусом сходимости:

$$z = \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_j^{(k)} t_j^{k+1}}{k+1}, \quad d\phi = dz = \sum_{k \geq 0} \lambda_j^{(k)} t_j^k dt_j.$$

Положим

$$Q_k(a) = \int_0^\infty \frac{aw^k e^{-w}}{1 + ae^{-w}} dw;$$

эти числа потребуются нам для исследования выражения

$$\oint_{S_R^1} A + \frac{1}{2} R \oint_{S^1} I_{\{W_q\}}(\phi) d\phi.$$

Наша функция s везде растёт экспоненциально, но магнитное поле затухает только вне малых областей, содержащих “критические” точки ϕ_j^0 . Легко видеть, что вектор-потенциал A после вычитания индикатрисы роста $R \cdot I_{\{W_q\}}(\phi) d\phi$ становится экспоненциально малым вне этих малых областей. Только два экспоненциальных члена $\kappa_j e^{W_j}$ и $\kappa_{j+1} e^{W_{j+1}}$ в s существенны в каждой такой области между Δ_j и Δ_{j+1} . Отбрасывание всех остальных членов в сумме $s = \sum_q \kappa_q e^{W_q}$ и соответствующей сумме для A в каждой такой малой области имеет экспоненциально малое влияние. В области Δ_q умножим числитель и знаменатель в выражении (14) на $\kappa_q^{-1} e^{-W_q}$. Экспонента e^{-W_j} отвечает вершине выпуклого многоугольника T , нумерующего все функции $c' = ce^{W_q} \in T$ такие, что $(ce^{W_q})^{-1/2}$ порождают основные состояния оператора Паули. Нам нужно, чтобы $q = j$ для $\phi \leq \phi_j^0$ (или $\phi \in \Delta_j$) и $q = j+1$ для $\phi \in \Delta_{j+1}$. Таким образом, только два члена остаются в числителе и знаменателе.

Аналогичный результат мы получаем в области Δ_j , лежащей ниже точки ϕ_j^0 , с константой κ_{j+1}/κ_j и экспонентой $e^{W_{j+1}-W_j}$. Кроме того, мы должны обратить направление интегрирования. Выбрав такое ϵ , чтобы $R\epsilon = O(R^\delta)$, $\delta > 0$, мы замечаем следующий факт. Интегрирование на интервале $[\phi_j^0 - \epsilon, \phi_j^0 + \epsilon]$ выражений s $w = Rt_j$, которые появляются в наших вычислениях регуляризованного магнитного потока, может быть расширено до интервала $(-\infty, +\infty)$, поскольку остаточный член имеет порядок $O(e^{-R^\delta})$, более точно, он затухает быстрее чем любой полином. Выражая переменную $z = \phi - \phi_j^0$ через переменную $t_j = (W_j - W_{j+1})/R$, мы

легко получаем искомый результат. В последнем интегрировании мы имеем сумму интегралов вида

$$Q_s(a) = R^{-s-1} \int_0^\infty \frac{ae^{-w}}{1+ae^{-w}} w^s dw,$$

где $w = Rt_j$, $a = \kappa_{j+1}/\kappa_j$ при $z \leq 0$, $w = -Rt_j$, $a = \kappa_j/\kappa_{j+1}$ при $z \geq 0$. Легко показать, что $Q'_s = \int_0^\infty e^{-w} w^s dw$ растут, как $s!$. Вероятно, это верно и для наших выражений Q_s .

Благодарности. П. Г. Гриневич поддержан РФФИ (грант № 09-01-12148-офи_м), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5413.2010.1) и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”. А. Е. Миронов поддержан РФФИ (грант № 09-01-00598_а) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5770.2010.1). С. П. Новиков поддержан РФФИ (грант № 08-01-00054_а).

Список литературы

- [1] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*. т. 4: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.
- [2] Y. Aharonov, A. Casher, *Phys. Rev. A*, **19**:6 (1979), 2461–2462.
- [3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *ЖЭТФ*, **79**:3 (1980), 1006–1016.
- [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **253**:6 (1980), 1293–1297.
- [5] S. P. Novikov, A. P. Veselov, “Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations”, *Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroads*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, ed. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, AMS, Providence, RI, 1997, 109–132, arXiv:math-ph/0003008.
- [6] J. E. Avron, R. Seiler, *Phys. Rev. Lett.*, **42**:15 (1979), 931–934.
- [7] P. Grinevich, A. Mironov, S. Novikov, *New reductions and nonlinear systems for 2D Schrodinger operators*, arXiv:1001.4300.
- [8] С. В. Манаков, *УМН*, **31**:5(191) (1976), 245–246.
- [9] В. Г. Копорелченко, *Inverse Problems*, **4**:1 (1988), 151–163.
- [10] P. Grinevich, A. Mironov, S. Novikov, *2D Schrodinger operator, (2+1) systems and new reductions. The 2D Burgers hierarchy and inverse problem data*, arXiv:1005.0612.
- [11] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18.
- [12] Б. А. Дубровин, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80.
- [13] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [14] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **270**:1 (1984), 20–24.
- [15] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788.
- [16] И. В. Чередник, *Докл. АН СССР*, **252**:5 (1980), 1104–1108.
- [17] С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **257**:3 (1981), 538–543.
- [18] С. П. Новиков, “Двумерные операторы Шредингера в периодических полях”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **23**, ВИНТИ, М., 1983, 3–32.
- [19] А. С. Лыскова, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 189–190.
- [20] А. С. Лыскова, *УМН*, **36**:5(221) (1981), 181–182.
- [21] J. Zak, *Phys. Rev. A*, **134**:6 (1964), A1602–A1606.