Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Обобщенная энтропия гейзенберговской спиновой цепочки, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 363–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:59:44

© 2010 г.

А. Р. Итс*, В. Е. Корепин†

ОБОБЩЕННАЯ ЭНТРОПИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Рассматривается квантовая XY -цепочка в поперечном магнитном поле. Исследуется энтропия Реньи для блока соседних спинов в бесконечной цепочке при нулевой температуре. По сути энтропия Реньи представляет собой след матрицы плотности блока, возведенной в некоторую степень α . Энтропия блоков большого размера вычислена в терминах эллиптической λ -функции Клейна. Предельная энтропия исследуется как функция параметра α . Показано, что энтропия Реньи есть функция, автоморфная относительно некоторой подгруппы модулярной группы. С помощью этого наблюдения выводятся трансформационные свойства энтропии Реньи относительно отображения $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$.

Ключевые слова: квантовое зацепление, спиновая цепочка, анзац Бете.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[5] была решена XY -модель

$$H = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + \gamma) \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + (1 - \gamma) \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + h \sigma_n^z.$$

Спектр этой модели имеет вид

$$\epsilon_k = 4 \sqrt{\left(\cos k - \frac{h}{2} \right)^2 + \gamma^2 \sin^2 k}.$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить энтропию блока большого размера, составленного из соседних спинов и находящегося в основном состоянии $|\text{GS}\rangle$, как меру зацепления между этим блоком и остатком цепочки [6]–[8].

Будем рассматривать полную цепочку как бинарную систему: $|\text{GS}\rangle = |A \& B\rangle$. Блоку из L соседних спинов отвечает подсистема A , а остатку цепочки – подсистема B . Матрица плотности основного состояния обозначается через $\rho_{AB} = |\text{GS}\rangle \langle \text{GS}|$.

*Department of Mathematical Sciences, Indiana University–Purdue University Indianapolis, Indianapolis, USA. E-mail: itsa@math.iupui.edu

†C.N. Yang Institute for Theoretical Physics, State University of New York, Stony Brook, USA. E-mail: korepin@insti.physics.sunysb.edu

Редуцированная матрица плотности подсистемы А имеет вид $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$. При этом выражения для энтропии фон Неймана $S(\rho_A)$ и энтропии Реньи $S_R(\rho_A, \alpha)$ спинного блока записываются как

$$S(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A), \quad S_R(\rho_A, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}(\rho_A^\alpha), \quad 1 > \alpha > 0.$$

Здесь степень α выступает в роли параметра.

С помощью метода теплицевых определителей, формулы Фишера–Гартвига и методов, основанных на интегрируемых фредгольмовых операторах [9]–[14], энтропия Реньи была вычислена в работах [15]–[19]. Чтобы описать результат, необходимо ввести параметр k :

$$k = \begin{cases} \frac{\sqrt{(h/2)^2 + \gamma^2 - 1}}{\gamma}, & 4(1 - \gamma^2) < h^2 < 4, \\ \sqrt{\frac{1 - (h/2)^2 - \gamma^2}{1 - (h/2)^2}}, & h^2 < 4(1 - \gamma^2), \\ \frac{\gamma}{\sqrt{(h/2)^2 + \gamma^2 - 1}}, & h > 2. \end{cases}$$

Нам также понадобятся полный эллиптический интеграл первого рода и модуль:

$$I(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \tau_0 = \frac{I(k')}{I(k)},$$

где $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Стандартный модулярный параметр τ задается соотношениями

$$q = e^{\pi i \tau}, \quad \tau = i \frac{I(k')}{I(k)} \equiv i \tau_0, \quad \text{Im } \tau > 0.$$

Тета-функции $\theta_j(z, q)$ [20], [21] при этом записываются как $\theta_j(z|\tau) := \theta_j(z, e^{\pi i \tau})$, $j = 1, 2, 3, 4$, а энтропия Реньи приобретает вид

$$S_R(\rho_A, \alpha) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(kk') - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\theta_2(0|\alpha i \tau_0) \theta_4(0|\alpha i \tau_0)}{\theta_3^2(0|\alpha i \tau_0)} + \frac{1}{3} \ln 2.$$

2. ЭНТРОПИЯ РЕНЬИ И МОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Квадрат эллиптического параметра k как функция модулярного параметра τ стандартным образом обозначается через $\lambda(\tau)$ и называется *эллиптической λ -функцией*, или *λ -модулярной функцией* [22]–[26]. Заметим, что

$$\lambda(\tau) = \frac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \equiv k^2(e^{i\pi\tau}), \quad \text{Im } \tau > 0, \quad 1 - \lambda(\tau) = \frac{\theta_4^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \equiv k'^2(e^{i\pi\tau}).$$

Функция $\lambda(\tau)$ играет центральную роль в теории модулярных функций и модулярных форм, и ей посвящена обширная литература. Формулы для энтропии Реньи в терминах модулярных λ -функций имеют вид

$$S_R(\rho_A, \alpha) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(kk') - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \ln \{ \lambda(\alpha i \tau_0) (1 - \lambda(\alpha i \tau_0)) \} + \frac{1}{3} \ln 2$$

при $h > 2$ и

$$S_R(\rho_A, \alpha) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \left(\frac{k'}{k^2} \right) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\lambda^2(\alpha i \tau_0)}{1-\lambda(\alpha i \tau_0)} + \frac{1}{3} \ln 2$$

при $h < 2$. Эти соотношения позволяют использовать мощный аппарат теории модулярных функций в исследованиях энтропии Реньи. Подробный анализ этого вопроса будет проведен в последующих публикациях. В настоящей работе мы ограничимся описанием двух наиболее непосредственных приложений теории модулярных функций, связанных со свойствами симметрии λ -функции.

Модулярные преобразования. Положим

$$f(\tau) := \lambda(\tau)(1 - \lambda(\tau)), \quad g(\tau) := \frac{\lambda^2(\tau)}{1 - \lambda(\tau)}$$

и перепишем формулы для энтропии Реньи в новом виде:

$$S_R(\rho_A, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(kk') - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \ln f(\alpha i \tau_0) + \frac{1}{3} \ln 2, & h > 2, \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \left(\frac{k'}{k^2} \right) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \ln g(\alpha i \tau_0) + \frac{1}{3} \ln 2, & h < 2. \end{cases}$$

Из указанных симметрий вытекают соотношения симметрий для функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ под действием модулярной группы:

$$\begin{aligned} f(\tau+1) &= -\frac{g(\tau)}{f(\tau)}, & f\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= f(\tau), \\ g(\tau+1) &= g(\tau), & g\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{g(\tau)}{f(\tau)}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $f(\tau)$ автоморфна относительно подгруппы модулярной группы, порождаемой преобразованиями

$$\tau \rightarrow \tau + 2, \quad \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad (1)$$

в то время как функция $g(\tau)$ является автоморфной относительно подгруппы модулярной группы, порождаемой преобразованиями

$$\tau \rightarrow \tau + 1, \quad \tau \rightarrow -\frac{\tau}{2\tau + 1}. \quad (2)$$

Разумеется, обе функции наследуют от λ -функции свойство автоморфности относительно подгруппы, которая представляет собой общую подгруппу для подгрупп преобразований (1) и (2). Мы приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *С точностью до тривиальных аддитивных членов и мультипликативных факторов и после простого масштабного преобразования энтропия Реньи как функция от α представляет собой функцию, автоморфную относительно подгруппы (1) группы модулярных преобразований в случае $h > 2$ и автоморфную относительно подгруппы (2) группы модулярных преобразований в случае $h < 2$; в обоих случаях энтропия автоморфна относительно действия общей подгруппы двух указанных групп преобразований.*

Из симметрии энтропии Реньи вытекают, в частности, следующие явные соотношения между величинами энтропии в точках α и $1/\alpha\tau_0^2$:

$$S_R\left(\rho_A, \frac{1}{\alpha\tau_0^2}\right) = \frac{\alpha\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1}(1 - \alpha)S_R(\rho_A, \alpha) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \alpha^2\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1} \ln \frac{kk'}{4}$$

при $h > 2$ и

$$S_R\left(\rho_A, \frac{1}{\alpha\tau_0^2}\right) = \frac{\alpha\tau_0^2 - \alpha^2\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1}S_R(\rho_A, \alpha) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \alpha^2\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1} \ln \frac{k'}{4k^2} - \\ - \frac{1}{12} \cdot \frac{\alpha\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1} \ln f(\alpha i\tau_0)$$

при $h < 2$. Особо отметим появление дополнительного члена, содержащего модулярную функцию $f(\tau)$, в случае $h < 2$.

Список литературы

- [1] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 407–466.
- [2] E. Barouch, B. M. McCoy, *Phys. Rev. A*, **3**:2 (1971), 786–804.
- [3] E. Barouch, B. M. McCoy, M. Dresden, *Phys. Rev. A*, **2**:3 (1970), 1075–1092.
- [4] D. B. Abraham, E. Barouch, G. Gallavotti, A. Martin-Löf, *Phys. Rev. Lett.*, **25**:20 (1970), 1449–1450; *Stud. Appl. Math.*, **50** (1971), 121; **51** (1972), 211.
- [5] G. Müller, R. E. Shrock, *Phys. Rev. B*, **32**:9 (1985), 5845–5850; J. Kurmann, H. Thomas, G. Müller, *Phys. A*, **112**:1–2 (1982), 235–255.
- [6] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, *Phys. Rev. A*, **53**:4 (1996), 2046–2052, arXiv: [quant-ph/9511030](#).
- [7] A. Rényi, *Probability Theory*, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., **10**, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- [8] S. Abe, A. K. Rajagopal, *Phys. Rev. A*, **60**:5 (1999), 3461–3466, arXiv: [quant-ph/9904088](#).
- [9] B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Stat. Phys.*, **116**:1–4 (2004), 79–95, arXiv: [quant-ph/0304108](#).
- [10] A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Phys. A*, **38**:13 (2005), 2975–2990, arXiv: [quant-ph/0409027](#).
- [11] M. E. Fisher, R. E. Hartwig, “Toeplitz determinants: some applications, theorems, and conjectures”, *Stochastic Processes in Chemical Physics*, Adv. Chem. Phys., **15**, ed. K. E. Shuler, 1968, 333–353.
- [12] E. L. Basor, *Indiana Univ. Math. J.*, **28**:6 (1979), 975–983.
- [13] E. L. Basor, C. A. Tracy, *Phys. A*, **177**:1–3 (1991), 167–173.
- [14] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer, Berlin, 1990.
- [15] A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Phys. A*, **38**:13 (2005), 2975–2990, arXiv: [quant-ph/0409027](#).
- [16] A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, “Entropy of XY spin chain and block Toeplitz determinants”, *Universality and Renormalization*, Fields Inst. Commun., **50**, eds. I. Binder, D. Kreimer, AMS, Providence, RI, 2007, 151–183, arXiv: [quant-ph/0606178](#).
- [17] F. Franchini, A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *Analysis of entropy of XY spin chain*, arXiv: [quant-ph/0606240](#).
- [18] F. Franchini, A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Phys. A*, **40**:29 (2007), 8467–8478, arXiv: [quant-ph/0609098](#).
- [19] J. P. Keating, F. Mezzadri, *Comm. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 543–579, arXiv: [quant-ph/0407047](#).
- [20] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.

- [21] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции*, М., 1963.
- [22] F. Klein, R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. v. 2*, Teubner, Leipzig, 1890.
- [23] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [24] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, Internat. Ser. Pure Appl. Math., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [25] E. W. Weisstein, *Elliptic lambda function*.
<http://mathworld.wolfram.com/EllipticLambdaFunction.html>
- [26] E. W. Weisstein, *Klein's absolute invariant*.
<http://mathworld.wolfram.com/KleinsAbsoluteInvariant.html>