Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Интегральная интерпретация двухчастичной волновой функции и представление квантовых корреляций с помощью случайных полей, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 386–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:10:18

© 2010 г.

А. Ю. Хренников*

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВУХЧАСТИЧНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Предложена новая интерпретация волновой функции $\Psi(x, y)$ двухчастичной квантовой системы. Волновая функция интерпретируется не как элемент функционального пространства L_2 квадратично-интегрируемых функций, т. е. вектор, а как ядро интегрального оператора (Гильберта–Шмидта). Первая часть работы посвящена выражению квантовых средних, включая корреляции в двухчастичных системах, с помощью операторной волновой функции. Это новое математическое представление в рамках традиционной квантовой механики. Однако новая интерпретация волновой функции не только порождает новый математический формализм для квантовой механики, но и позволяет выйти за ее пределы, т. е. представить квантовые корреляции (включая запутанные системы) как корреляции (гауссовых) случайных полей.

Ключевые слова: классические волны, квантовые средние, волновая функция, интегральный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа основана на очевидном математическом наблюдении. Любую квадратично-интегрируемую функцию $\Psi(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^{n_1}$, $y \in \mathbf{R}^{n_2}$, можно рассматривать не только как вектор, т. е. элемент пространства $L_2(\mathbf{R}^{n_1+n_2})$, но и как ядро интегрального оператора $\hat{\Psi}: L_2(\mathbf{R}^{n_2}) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^{n_1})$ класса Гильберта–Шмидта. В терминах этого оператора $\hat{\Psi}$ мы находим представление корреляций в двухчастичной системе, а также средние наблюдаемых для каждой частицы. Таким образом, в зависимости от предпочтения можно использовать или векторную, или операторную интерпретацию волновой функции.

Новая интерпретация волновой функции не только порождает новый математический формализм для квантовой механики (КМ), но и позволяет выйти за ее

---

*International Center for Mathematical Modeling in Physics, Engineering, Economics, and Cognitive Science, Linnaeus University, Växjö-Kalmar, Sweden.
E-mail: Andrei.Khrennikov@lnu.se

пределы: представить квантовые корреляции (включая корреляции для запутанных систем) как корреляции (гауссовых) случайных полей. В работе [1] этот подход был реализован в абстрактном гильбертовом пространстве¹⁾. Использование волновых функций, интегральных ядер и гауссовых случайных полей связывает теорию с физическим пространством (см. работы [5], [6]) и существенно проясняет связь КМ с классической теорией поля.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

2.1. Двухчастичная волновая функция как интегральное ядро. Положим $H_1 = L_2(\mathbf{R}^{n_1})$, $H_2 = L_2(\mathbf{R}^{n_2})$ и $H = L_2(\mathbf{R}^{n_1+n_2})$. Выбранное $\Psi \in H$ определяет линейный оператор $\hat{\Psi}: H_2 \rightarrow H_1$, который задается как

$$\hat{\Psi}\phi(x) = \int dy \Psi(x, y)\phi(y),$$

т. е. своим ядром

$$K_{\Psi}(x, y) = \Psi(x, y).$$

Это оператор типа оператора Гильберта–Шмидта. Согласно формуле (П.1) (см. приложение 1) его сопряженный оператор $\hat{\Psi}^*: H_1 \rightarrow H_2$ имеет ядро $K_{\Psi^*}(y, x) = \overline{\Psi(x, y)}$. Таким образом, $\hat{\Psi}^*\phi(y) = \int dx \overline{\Psi(x, y)}\phi(x)$.

Теперь возьмем функцию $\Psi \in H$, нормированную на единицу. Согласно традиционной аксиоматике КМ, она определяет чистое состояние двухчастичной системы $S = (S_1, S_2)$. Теперь представим чистое состояние системы $S = (S_1, S_2)$ как интегральный оператор. Наша цель состоит в том, чтобы выразить КМ-корреляции (для наблюдаемых на подсистемах S_1 и S_2), используя язык этих операторов.

2.2. Частичные следы. Найдем ядро оператора $\hat{\Psi}\hat{\Psi}^*: H_1 \rightarrow H_1$. Так как

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}\hat{\Psi}^*\phi(x) &= \int dy \Psi(x, y) \int d\alpha \phi(\alpha) \overline{\Psi(\alpha, y)} = \\ &= \int dy d\alpha \overline{\Psi(\alpha, y)} \Psi(x, y) \phi(\alpha) = \int d\alpha \phi(\alpha) \int dy \overline{\Psi(\alpha, y)} \Psi(x, y), \end{aligned}$$

то ядро имеет вид

$$K_{\Psi\Psi^*}(x, \alpha) = \int dy \overline{\Psi(\alpha, y)} \Psi(x, y). \quad (1)$$

Положим

$$\hat{\rho}_{\Psi} = \Psi \otimes \Psi, \quad \hat{\rho}^{(1)} = \text{Tr}_{H_2} \hat{\rho}_{\Psi}, \quad \hat{\rho}^{(2)} = \text{Tr}_{H_1} \hat{\rho}_{\Psi},$$

где $\Psi \in H$. Если Ψ нормирована на единицу, то $\hat{\rho}_{\Psi}$ является оператором плотности, соответствующим чистому квантовому состоянию Ψ системы $S = (S_1, S_2)$ (согласно терминологии традиционной КМ), а $\hat{\rho}^{(i)}$, $i = 1, 2$, – редуцированные операторы плотности подсистем S_i . Подчеркнем, что когда в настоящей работе мы говорим об операторной интерпретации двухчастичной волновой функции, речь идет не о стандартном соотношении оператора плотности с любым чистым квантовым состоянием.

¹⁾Для средних одночастичных систем, см. также работы [2]–[4].

Последний действует в тензорном произведении пространств состояний H_i , $i = 1, 2$. Наше операторное представление $\Psi \mapsto \hat{\Psi}$ позволяет обойтись без операторов, действующих в тензорном произведении.

Сравнивая выражения (1) и (П.4) (см. приложение 2), получаем равенство

$$\hat{\Psi}\hat{\Psi}^* = \hat{\rho}^{(1)}. \quad (2)$$

В отличие от вещественного случая, в комплексном случае равенство

$$\hat{\Psi}^*\hat{\Psi} = \hat{\rho}^{(2)} \quad (3)$$

не выполняется. Здесь ситуация несколько сложнее (см. п. 2.4). Прежде чем перейти к рассмотрению этой задачи, следует рассмотреть специальный класс интегральных операторов. Он сыграет важную роль в будущей теории.

Теперь возьмем квантовую наблюдаемую $\hat{A}_1$ (самосопряженный оператор), действующую в H_1 . Имеем

$$\text{Tr } \hat{\Psi}\hat{\Psi}^* \hat{A}_1 = \text{Tr } \hat{\rho}^{(1)} \hat{A}_1. \quad (4)$$

Это $\hat{\Psi}$ -операторное представление КМ-среднего подсистемы S_1 двухчастичной системы S .

2.3. Комплексное сопряжение ядра. Пусть $\hat{A}$ – интегральный оператор, для простоты *симметричный*. Определим оператор $\hat{\bar{A}}$ как интегральный оператор с ядром $\bar{A}(x, y) = \overline{A(x, y)}$, т. е.

$$\hat{\bar{A}}\phi(x) = \int \overline{A(x, y)}\phi(y) dy.$$

Заметим, что $\hat{\bar{A}}$ также симметричен:

$$\begin{aligned} \int dx \hat{\bar{A}}\phi(x) \overline{\phi(x)} &= \int dx \int dy \overline{A(x, y)}\phi(y) \overline{\phi(x)} = \int dy \phi(y) \int dx \overline{A(x, y)}\phi(x) = \\ &= \int dy \phi(y) \int dx \overline{A(y, x)}\phi(x) = \int dy \phi(y) \hat{\bar{A}}\phi(y). \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что если $\hat{A} \geq 0$, то $\hat{\bar{A}} \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int dx \int dy \overline{A(x, y)}\phi(y) \overline{\phi(x)} &= \int dx \overline{\phi(x)} \int dy A(x, y) \overline{\phi(y)} = \\ &= \int dx \overline{\phi(x)} \hat{A}\phi(x) = \int dx \hat{\bar{A}}\phi(x) \overline{\phi(x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\hat{\rho}$ – оператор плотности, то $\hat{\bar{\rho}}$ – также оператор плотности.

2.4. Частичные следы. Так как

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^*\hat{\Psi}\phi(x) &= \int du \hat{\Psi}\phi(u) \overline{\Psi(u, x)} = \\ &= \int du \int dv \phi(v) \Psi(u, v) \overline{\Psi(u, x)} = \int dv \phi(v) \int du \Psi(u, v) \overline{\Psi(u, x)}, \end{aligned}$$

то ядро имеет вид

$$K_{\Psi^*\Psi}(x, v) = \int du \Psi(u, v) \overline{\Psi(u, x)}.$$

Используя формулу (II.6) (см. приложение 2), получаем равенство $\overline{K_{\rho^{(2)}}(x_2, y_2)} = K_{\Psi^*\Psi}(x_2, y_2)$. Таким образом, в отличие от равенства $\hat{\rho}^{(1)} = \hat{\Psi}\hat{\Psi}^*$ получаем

$$\widehat{\bar{\rho}^{(2)}} = \hat{\Psi}^*\hat{\Psi}.$$

Теперь возьмем квантовую наблюдаемую $\hat{A}_2$ (самосопряженный оператор), действующую в H_2 . Используя формулу (II.7) (см. приложение 3), получаем

$$\text{Tr } \hat{\Psi}^*\hat{\Psi}\hat{A}_2 = \text{Tr } \hat{\rho}^{(2)}\hat{A}_2. \quad (5)$$

Это $\hat{\Psi}$ -операторное представление КМ-среднего подсистемы S_2 двухчастичной системы S .

2.5. Корреляции. Возьмем две квантовые наблюдаемые: $\hat{A}_1$, которая действует в H_1 , и $\hat{A}_2$, которая действует в H_2 (самосопряженные операторы). Рассмотрим следующую композицию операторов:

$$\begin{aligned} \widehat{M}\phi(x) &= \hat{\Psi}\hat{A}_2\hat{\Psi}^*\hat{A}_1\phi(x) = \int dy \Psi(x, y) \hat{A}_2\hat{\Psi}^*\hat{A}_1\phi(y) = \\ &= \int dy \Psi(x, y) \int d\alpha \overline{A_2(y, \alpha)} \hat{\Psi}^*\hat{A}_1\phi(\alpha) = \\ &= \int dy d\alpha \Psi(x, y) \overline{A_2(y, \alpha)} \int d\beta \overline{\Psi(\beta, \alpha)} \hat{A}_1\phi(\beta) = \\ &= \int dy d\alpha d\beta d\gamma \Psi(x, y) \overline{\Psi(\beta, \alpha)} A_1(\beta, \gamma) \overline{A_2(y, \alpha)} \phi(\gamma). \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_M(x, u) = \int dy d\alpha d\beta \Psi(x, y) \overline{\Psi(\beta, \alpha)} A_1(\beta, u) \overline{A_2(y, \alpha)},$$

поэтому

$$\text{Tr } \widehat{M} = \int dx K_M(x, x) = \int dx dy d\alpha d\beta \Psi(x, y) \overline{\Psi(\beta, \alpha)} A_1(\beta, x) A_2(\alpha, y). \quad (6)$$

Теперь рассмотрим оператор $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2: H \rightarrow H$. Он представляет собой квантовую наблюдаемую для двухчастичной системы $S = (S_1, S_2)$, описывающую корреляции между наблюдаемыми $\hat{A}_i$, $i = 1, 2$, для подсистем S_i . Найдем его КМ-среднее (используя традиционную векторную интерпретацию волновой функции):

$$\begin{aligned} \hat{A}\Psi(x_1, x_2) &= \int dy_1 dy_2 A_1 \otimes A_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \Psi(y_1, y_2) = \\ &= \int dy_1 dy_2 A_1(x_1, y_1) A_2(x_2, y_2) \Psi(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Получаем

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Psi} \equiv \langle \hat{A}\Psi, \Psi \rangle = \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 A_1(x_1, y_1) A_2(x_2, y_2) \Psi(y_1, y_2) \overline{\Psi(x_1, x_2)}.$$

В равенстве (6) положим $\beta \rightarrow x_1$, $x \rightarrow y_1$, $\alpha \rightarrow x_2$, $y \rightarrow y_2$. Получаем

$$\mathrm{Tr} \widehat{M} = \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 A_1(x_1, y_1) A_2(x_2, y_2) \Psi(y_1, y_2) \overline{\Psi(x_1, x_2)}.$$

Таким образом, квантовую корреляцию можно представить с использованием

$$\langle \hat{A} \rangle_\Psi = \mathrm{Tr} \widehat{\Psi} \hat{A}_2 \widehat{\Psi}^* \hat{A}_1. \quad (7)$$

3. ПРЕДКВАНТОВАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

3.1. Представление квантовых корреляций в терминах случайных полей. В ряде работ (см., например, [1], [4]) мы пропагандировали предквантовую модель, в которой роль скрытых параметров играют классические поля. Подробности этого подхода, так называемой предквантовой классической статистической теории поля (ПКСТП), можно найти в упомянутых работах. Предквантовая переменная, соответствующая квантовой наблюдаемой $\hat{A}$, задается квадратичной формой

$$f_A(\phi) = \int A(x, y) \phi(x) \overline{\phi(y)} dx dy.$$

Рассмотрим группу $G_2 = \{e, *\}$, где $*^2 = e$. Она естественным образом действует в пространстве L_2 комплекснозначных функций: $\phi \rightarrow \bar{\phi}$. Возьмем некоторое пространство, обозначаемое как $F(L_2, \mathbf{R})$, (вещественнозначных) функционалов $f: L_2 \rightarrow \mathbf{R}$. Действие группы G_2 в L_2 можно поднять на пространство $F(L_2, \mathbf{R})$: $f \rightarrow \bar{f}$, где $\bar{f}(\phi) = f(\bar{\phi})$.

Сравним квадратичные формы операторов $\hat{A}$ и $\hat{\bar{A}}$:

$$\begin{aligned} f_{\bar{A}}(\phi) &= \int \overline{A(x, y)} \phi(y) \overline{\phi(x)} dx dy = \int A(y, x) \phi(y) \overline{\phi(x)} dx dy = \\ &= \int A(x, y) \phi(x) \overline{\phi(y)} dx dy = f_A(\bar{\phi}). \end{aligned}$$

Рассмотрим векторное гауссово случайное поле $\omega \rightarrow \phi(x; \omega) = (\phi_1(x; \omega), \phi_2(x; \omega))$ с нулевым средним. Возьмем две квантовые наблюдаемые $\hat{A}_i$, $i = 1, 2$, на подсистемах S_i двухчастичной системы $S = (S_1, S_2)$ и соответствующие предквантовые квадратичные функционалы $f_{A_1}(\phi_1)$, $f_{A_2}(\phi_2)$. Подставляя компоненты $\phi(x; \omega)$ в эти функционалы, получим квадратичные функционалы гауссовых случайных полей. Теперь возьмем такое гауссово случайное поле, что корреляция между его компонентами задается оператором $\widehat{\Psi}$, т.е. формально для любых двух точек $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^3$ выполнено

$$E\phi_1(x_0; \omega)\phi_2(y_0; \omega) = \Psi(x_0, y_0). \quad (8)$$

Мы не будем вдаваться в математические подробности построения этого случайного поля (см. [1]). Одна из математических сложностей заключается в том, что его компоненты нельзя выбрать в виде функций из L_2 . Необходимо рассмотреть расширение Гильберта–Шмидта пространства L_2 . Согласно работе [1] имеем равенство

$$Ef_{A_1}\bar{f}_{A_2} = Ef_{A_1}Ef_{A_2} + \mathrm{Tr} \widehat{\Psi} \hat{A}_2 \widehat{\Psi}^* \hat{A}_1,$$

где E обозначает среднее по (классическому) гауссовому случайному полю. Это равенство доказывается прямым вычислением среднего от произведения двух квадратичных форм гауссовых случайных полей.

Наконец, применяя (7), получаем представление квантовой корреляции в виде дисперсии двух классических случайных переменных, квадратичных функционалов гауссовых случайных полей:

$$\text{cov}(f_{A_1}, \bar{f}_{A_2}) = \langle \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 \rangle_\Psi. \quad (9)$$

3.2. К экспериментальной проверке предсказаний ПКСТП. Равенство (9) показывает, что корреляции традиционных квантовых наблюдаемых можно выразить в терминах классических случайных полей. Однако ПКСТП не только воспроизводит предсказания КМ, с ее помощью можно получить и ряд новых предсказаний. С помощью ПКСТП можно измерить (по крайней мере в принципе) не только квадратичные функционалы предквантового поля, но и функционалы любого типа. Неквадратичные функционалы не имеют аналогов в традиционной КМ. Они представляют новый класс наблюдаемых, так сказать, *предквантовые наблюдаемые*. Простейший класс таких наблюдаемых задается линейными функционалами предквантовых полей. Они представляют собой сглаживания компонент этих полей. Если пренебречь необходимостью сглаживания, то ПКСТП предсказывает корреляцию между компонентами “двухчастичного предквантового случайного поля” в двух различных точках, которая задается равенством (8). По-видимому, это равенство дает правильную физическую интерпретацию двухчастичной волновой функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сопряженный оператор и след интегрального оператора

Напомним несколько равенств для ядра интегрального оператора. Начнем с замечания по поводу сопряженного оператора:

$$\int dx \int dy A(x, y) \phi_1(y) \overline{\phi_2(x)} = \int dy \phi_1(y) \overline{\int dx A(x, y) \phi_2(x)}.$$

Таким образом, $\hat{A}^*$ имеет ядро $A^*(\alpha, \beta) = \overline{A(\beta, \alpha)}$; в частности, $\hat{A}$ является самосопряженным, если

$$A(\alpha, \beta) = \overline{A(\beta, \alpha)}. \quad (\text{П.1})$$

Теперь напомним интегральное представление следа. Будем действовать формально. Чтобы наше рассмотрение было совсем строгим, следует воспользоваться теорией обобщенных функций. Возьмем ортонормированный базис в L_2 , скажем, $\{\phi_k\}$. Тогда для любого $f \in L_2$ имеем

$$f(x) = \sum_k \int f(y) \overline{\phi_k(y)} dy \phi_k(x) = \int dy f(y) \sum_k \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)}.$$

Таким образом (по крайней мере формально), $\sum_k \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)} = \delta(x - y)$. Теперь рассмотрим интегральный оператор $\hat{A}$ и найдем его след:

$$\begin{aligned} \sum_k \int dx \int dy A(x, y) \phi_k(y) \overline{\phi_k(x)} &= \int dx dy A(x, y) \sum_k \phi_k(y) \overline{\phi_k(x)} = \\ &= \int dx dy \delta(x - y) A(x, y). \end{aligned}$$

Получаем

$$\text{Tr } \hat{A} = \int dx A(x, x). \quad (\text{П.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Ядра частичных следов

Пусть теперь $\hat{A}$ действует в H :

$$\hat{A}\phi(x_1, x_2) = \int dy_1 dy_2 A(x_1, x_2, y_1, y_2) \phi(y_1, y_2).$$

Найдем интегральное представление его частичного следа по H_2 . Для этого рассмотрим x_1, y_1 как параметры. Таким образом, находим ядро оператора $\text{Tr}_{H_2} \hat{A}$:

$$A_{H_2}(x_1, y_1) = \int dz A(x_1, z, y_1, z). \quad (\text{П.3})$$

Теперь найдем ядро H_2 -следа проекционного оператора $\hat{\rho}_\Psi = \Psi \otimes \Psi$, $\Psi \in H$. Имеем

$$\hat{\rho}_\Psi u(x_1, x_2) = \int d\alpha d\beta \overline{\Psi(\alpha, \beta)} u(\alpha, \beta) \Psi(x_1, x_2).$$

Таким образом, ядро имеет вид

$$K_{\rho_\Psi}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Psi(x_1, x_2) \overline{\Psi(y_1, y_2)}.$$

Оператор частичного H_2 -следа $\hat{\rho}^{(1)} = \text{Tr}_{H_2} \hat{\rho}_\Psi$ имеет ядро

$$K_{\rho^{(1)}}(x_1, y_1) = \int dz \Psi(x_1, z) \overline{\Psi(y_1, z)} \quad (\text{П.4})$$

и действует как

$$\hat{\rho}^{(1)} g(x) = \int dy K_{\rho^{(1)}}(x, y) g(y) = \int dy dz \Psi(x, z) \overline{\Psi(y, z)} g(y). \quad (\text{П.5})$$

Найдем ядро оператора $\hat{\rho}^{(2)} = \text{Tr}_{H_1} \hat{\rho}_\Psi$:

$$K_{\rho^{(2)}}(x_2, y_2) = \int dz \Psi(z, x_2) \overline{\Psi(z, y_2)}. \quad (\text{П.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Одно равенство для следов

Рассмотрим произвольный оператор плотности $\hat{\rho}$ и квантовую наблюдаемую $\hat{A}$, а также операторы, получаемые посредством комплексного сопряжения их ядер. Будем использовать равенство

$$\text{Tr } \hat{\rho} \hat{A} = \text{Tr } \hat{\rho} \hat{A}. \quad (\text{П.7})$$

Докажем его: $K_{\bar{\rho}\bar{A}}(x, y) = \int du \overline{\rho(x, u)} \overline{A(u, y)}$, а потому

$$\text{Tr } \hat{\rho} \hat{A} = \int dx du \overline{\rho(x, u)} \overline{A(u, x)} = \int dx du \rho(u, x) A(x, u) = \text{Tr } \hat{\rho} \hat{A}.$$

Список литературы

- [1] A. Khrennikov, *Demystification of quantum entanglement*, arXiv:0905.4791.
- [2] A. Bach, *J. Math. Phys.*, **14**:1 (1981), 125–132; *Phys. Lett. A*, **73**:4 (1979), 287–288; *J. Math. Phys.*, **21**:4 (1980), 789–793.
- [3] J. Kupsch, O. G. Smolyanov, N. A. Sidorova, *J. Math. Phys.*, **42**:3 (2001), 1026–1037, arXiv:math-ph/0012025.
- [4] A. Khrennikov, *J. Math. Phys.*, **48**:1 (2007), 013512, 18 pp.; *J. Phys. A*, **38**:41 (2005), 9051–9073, arXiv:quant-ph/0505228; *Found. Phys. Lett.*, **18**:7 (2005), 637–650; *Phys. Lett. A*, **357**:3 (2006), 171–176, arXiv:quant-ph/0602210; *Found. Phys. Lett.*, **19**:4 (2006), 299–319; *Nuovo Cimento B*, **121**:5 (2006), 505–521, arXiv:hep-th/0604163; *Phys. Lett. A*, **372**:44 (2008), 6588–6592.
- [5] I. V. Volovich, “Quantum cryptography in space and Bell’s theorem”, *Foundations of Probability and Physics*, Quantum Probab. White Noise Anal., **13**, ed. A. Khrennikov, World Sci., River Edge, NJ, 2001, 364–372.
- [6] I. V. Volovich, “Towards quantum information theory in space and time”, *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*, ed. A. Khrennikov, Växjö Univ. Press, Växjö, 2002, 423–440.