Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Садовников, Н. Г. Иноземцева, В. И. Иноземцев,
Интегрируемые уравнения для модели с N источниками
и $n - 1$ модами, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 410–418

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:59:51

© 2010 г.

Б. И. Садовников*, Н. Г. Иноземцева†,
В. И. Иноземцев‡

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ С N ИСТОЧНИКАМИ И $n - 1$ МОДАМИ

Рассматриваются упрощенные модели взаимодействия заряженного вещества с резонансными модами излучения, обобщающие хорошо известные модели Джейнса–Каммингса и Дике. Обнаружено, что эти новые модели являются интегрируемыми для произвольного числа дипольных источников и резонансных мод поля излучения. Обсуждается проблема явной диагонализации соответствующих гамильтонианов.

Ключевые слова: квантовая оптика, взаимодействие излучения с веществом, интегрируемость.

1. ВВЕДЕНИЕ

На протяжении последних четырех десятилетий большое внимание уделялось проблеме описания процессов взаимодействия заряженного вещества с электромагнитным излучением при резонансе [1]–[4]. Эта проблема, очень сложная с математической точки зрения в общем случае, допускает некоторые весьма привлекательные упрощения, которые позволяют построить простые модели, имеющие четные *точные* решения. Эти модели могут быть использованы для квантово-статистического описания реальных процессов взаимодействия.

Исходным моментом при построении таких моделей является квантовый гамильтониан [3]

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + u(x) + H_F, \quad H_F = \sum_k \omega_k \left(b_k^+ b_k + \frac{1}{2} \right),$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

†Международный университет природы, общества и человека «Дубна», Дубна, Московская обл., Россия

‡Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: inozv@theor.jinr.ru

где $\vec{p}$ и m – импульс и масса электрона в некотором атоме, $u(x)$ – кулоновский потенциал взаимодействия электрона с ядром и $\vec{A}$ – векторный потенциал вторично-квантованного электромагнитного поля, который дается формулой

$$\vec{A} = \sum_k \left(\frac{2\pi c^2}{\omega_k} \right)^{1/2} \vec{e}_k (b_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{x}} + b_k e^{i\vec{k}\vec{x}}), \quad [b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'},$$

$\vec{e}_k$ – векторы поляризации и b_k, b_k^+ – обычные операторы уничтожения и рождения моды с волновым вектором k и энергией ω_k . Существует несколько этапов упрощения этого обобщенного гамильтониана. Во-первых, пренебрегаем членом $(e^2/2mc^2)\vec{A}^2$, нелинейным по векторному потенциалу. Во-вторых, рассматриваем только переходы между верхними уровнями атома,

$$\frac{1}{2m}\vec{p}^2 + u(x) \rightarrow \omega_0 \sigma^z + \text{const},$$

где σ^z – матрица Паули. В-третьих, рассматриваем только небольшие волновые векторы $\vec{k}, e^{\pm i\vec{k}\vec{x}} \sim 1, ka \ll 1$, где a – типичный размер атома. В-четвертых, используем дипольное приближение и так называемое приближение вращающейся волны [4], что приводит к соотношению

$$-\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A} \rightarrow \sum_k g_k \sigma^x (b_k^+ + b_k) \rightarrow \sum_k g_k (b_k^+ \sigma^- + b_k \sigma^+),$$

где $\sigma^\pm$ – матрицы Паули. И наконец, рассматриваем только резонансный случай, переходя от суммы по k к фиксированному k . Все это позволяет записать очень простой гамильтониан Джейнса–Каммингса [2], который является линейным по операторам рождения и уничтожения одной резонансной моды:

$$H_{JC} = \omega_0 b^+ b + \frac{1}{2} \omega_0 \sigma^z + g(\sigma^+ b + \sigma^- b^+). \quad (1)$$

Решение уравнения на собственные значения для оператора (1) является почти тривиальным, но оно позволяет очень подробно описывать эволюцию соответствующей волновой функции. Получаемые при этом результаты могут быть, очевидно, применены в физике одномодового лазера. Эта чрезвычайно простая модель допускает почти очевидные обобщения по двум направлениям, и тот факт, что она является точно решаемой, побуждает искать связь с моделями, решаемыми с помощью анзаца Бете [5]–[8]: с моделью n -уровневого атома и моделью Дике.

Первое из этих обобщений – это модель одноуровневого атома с $n - 1$ модами резонансного излучения:

$$H_{JC}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_\alpha \hat{N}_\alpha + \Delta \hat{R}_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} g_\alpha (b_\alpha \hat{R}_{n\alpha} + b_\alpha^+ \hat{R}_{\alpha n}), \quad (2)$$

где

$$\hat{N}_\alpha = b_\alpha^+ b_\alpha - \hat{R}_{\alpha\alpha}, \quad (\hat{R}_{\alpha\beta})_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta},$$

наборы $\{\omega_\alpha\}, \{g_\alpha\}$ – это энергии мод и их константы связи, а Δ – так называемый параметр расстройки [9], [10]. Существуют очевидные коммутационные соотношения

$[\hat{N}_\alpha, \hat{N}_\beta] = 0$ и $[H_{\text{JC}}^{(n)}, \hat{N}_\alpha] = 0$, которые делают проблему диагонализации выражения (2) при $n \geq 3$ достаточно простой.

Второй способ диагонализации модели Джейнса–Каммингса заключается в рассмотрении произвольного числа N двухуровневых источников излучения,

$$H_D = \omega b^+ b + \sum_{j=1}^N [\omega_j \sigma_z^{(j)} + \lambda (\sigma_+^{(j)} b + \sigma_-^{(j)} b^+)]. \quad (3)$$

Решение этой модели, называемой моделью Дике, которое было предложено много лет назад [1], далеко от тривиального. Оказалось, что задача с гамильтонианом (3) имеет скрытую *динамическую* симметрию, которая позволяет построить некоторые нетривиальные операторы, коммутирующие с (3).

Что произойдет если мы попробуем использовать оба способа обобщения модели Джейнса–Каммингса, т.е. рассмотрим гамильтониан задачи с произвольным числом N многоуровневых источников, взаимодействующих с произвольным числом $n - 1$ резонансных мод излучения,

$$H^{(N,n)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_\alpha \hat{N}_\alpha + \sum_{k=1}^N \Delta_k \hat{R}_{nn}^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N g_\alpha^{(k)} (b_\alpha \hat{R}_{n\alpha}^{(k)} + b_\alpha^+ \hat{R}_{\alpha n}^{(k)}), \quad (4)$$

где $N \geq 2$ и $n \geq 3$ (параметры расстройки Δ_k и константы связи $g_\alpha^{(k)}$ считаются произвольными)? Ответ неясен до сих пор. В работах [5], [8], [7] основная идея заключается в том, чтобы исходить из рациональной r -матрицы Янга и определить оператор Лакса, который удовлетворяет линейной r -матричной алгебре с рациональной r -матрицей.

В нашем подходе мы исходим из вырождения тригонометрической модели Годена. Она позволяет доказать интегрируемость без использования метода Лакса. Наше доказательство является более очевидным с физической точки зрения. В следующих двух разделах мы покажем, что в случае равенства модулей всех констант связи $g_\alpha^{(k)}$ существует некоторое упрощение спектральной задачи для оператора (4). А именно, в этом случае мы построим в явном виде некоторый набор из $N - 1$ нетривиальных операторов, коммутирующих с (4); их существование при вышеприведенном выборе констант связи позволяет называть модель (4) *квантовой интегрируемой* моделью.

2. МОДЕЛИ ТИПА ГОДЕНА

В этом разделе мы рассмотрим некоторые более общие операторы, впервые введенные Годеном [11]:

$$\mathcal{H}_j^{(N)} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \sum_{s \neq j}^{N+1} f_{js}^{\alpha\beta} \hat{T}_{\alpha\beta}^j \hat{T}_{\beta\alpha}^s, \quad j = 1, \dots, N+1, \quad (5)$$

где $\hat{T}_{\alpha\beta}^j$ – операторы абсолютно произвольных представлений $SL(n)$, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[\hat{T}_{\alpha\beta}^j, \hat{T}_{\lambda\mu}^s] = \delta_{js} (\hat{T}_{\alpha\mu}^j \delta_{\beta\lambda} - \hat{T}_{\lambda\beta}^j \delta_{\alpha\mu}),$$

а $\{f_{js}^{\alpha\beta}\}$ – произвольный набор чисел, подчиняющихся очевидному ограничению $f_{js}^{\alpha\beta} = f_{js}^{\beta\alpha}$. Легко видеть, что операторы $\hat{N}_\alpha = \sum_{j=1}^{N+1} \hat{T}_{\alpha\alpha}^j$ коммутируют с (5), $[\mathcal{H}_j^{(N)}, \hat{N}_\alpha] = 0$. Пусть N_α – их максимальные собственные значения.

Теперь сформулируем нашу задачу: найти такие наборы чисел $\{f_{js}^{\alpha\beta}\}$, что

$$[\mathcal{H}_j^{(N)}, \mathcal{H}_k^{(N)}] = 0 \quad (6)$$

для всех значений индексов j, k . Легко видеть, что в этом случае “гамильтониан”

$$H_n^{(N)} = \sum_{j=1}^{N+1} \eta_j \mathcal{H}_j^{(N)} + \sum_{\alpha=1}^n \omega_\alpha \hat{N}_\alpha \quad (7)$$

коммутирует со всеми $\mathcal{H}_j^{(N)}$, $[H_n^{(N)}, \mathcal{H}_j^{(N)}] = 0$. В простейшем нетривиальном случае $n = 2$ всегда можно выбрать такой набор $\{f_{js}^{\alpha\beta}\}$, что $f_{jk}^{\alpha\beta} = -f_{kj}^{\beta\alpha}$, и уравнения (6) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_j^{(N)}, \mathcal{H}_k^{(N)}] = & - \sum_{s \neq j, k}^{N+1} \sum_{\alpha, \beta, \lambda=1}^n [f_{js}^{\alpha\beta} f_{sk}^{\alpha\lambda} + f_{kj}^{\alpha\lambda} f_{js}^{\beta\lambda} + f_{jk}^{\alpha\beta} f_{ks}^{\beta\lambda}] \times \\ & \times (\hat{T}_{\alpha\beta}^j \hat{T}_{\lambda\alpha}^k \hat{T}_{\beta\lambda}^s - \hat{T}_{\beta\alpha}^j \hat{T}_{\alpha\lambda}^k \hat{T}_{\lambda\beta}^s) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

что сразу дает переопределенную систему билинейных уравнений

$$f_{js}^{\alpha\beta} f_{sk}^{\alpha\lambda} + f_{kj}^{\alpha\lambda} f_{js}^{\beta\lambda} + f_{jk}^{\alpha\beta} f_{ks}^{\beta\lambda} = 0. \quad (9)$$

В работах [11], [12] показано, что при $n = 2$ существует некоторое, так называемое анизотропное, решение данной системы:

$$f_{js}^{\alpha\alpha} = \text{ctg}(u_j - u_s), \quad f_{js}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sin(u_j - u_s)}, \quad \alpha \neq \beta, \quad (10)$$

где u_j , $j = 1, \dots, N+1$, – произвольные числа. Теперь, следуя работам [11], [12], мы выберем u_j в виде

$$u_j = -\varepsilon \lambda_j + \frac{\pi}{2} + u_{N+1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $f_{j,N+1}^{\alpha\alpha} \sim \varepsilon \lambda_j$, $f_{j,N+1}^{\alpha\beta} \sim 1$. Возьмем $\hat{T}_{\alpha\beta}^{N+1}$ в качестве реализации $SL(2)$ Жордана–Швингера, $\hat{T}_{\alpha\beta}^{N+1} = -b_\alpha b_\beta^+$, и рассмотрим предел $N_2 \gg 1$. Легко видеть, что в этом пределе b -операторы могут рассматриваться как комплексные числа, $b_2, b_2^+ \sim \sqrt{N_2}$; мы также возьмем $\varepsilon \sim N_2^{-1/2}$ и устремим $N_2 \rightarrow \infty$. При этом предельном переходе

$$\lim_{N_2 \rightarrow \infty} H_2^{(N)} = \omega_1 b_1^+ b_1 + \sum_{j=1}^N [\lambda_j (\hat{T}_{11}^{(j)} - \hat{T}_{22}^{(j)}) + (\hat{T}_{12}^{(j)} b_1 + \hat{T}_{21}^{(j)} b_1^+)]. \quad (11)$$

И наконец, если мы выберем $\hat{T}_{\alpha\beta}^{(j)}$ в качестве σ -представления $SL(2)$, то мы как раз и получим гамильтониан Дике!

Однако этот предельный переход не работает в общем случае $n \geq 3$. Мы также получаем в этом случае переопределенную систему билинейных уравнений (9), но при $n \geq 3$ имеется возможность выбора индексов $\alpha \neq \beta \neq \lambda$, что исключает все “анизотропные” решения типа (10). Имеются только “изотропные” решения типа $f_{js}^{\alpha\alpha} = f_{js}^{\alpha\beta} = (\nu_j - \nu_s)^{-1}$, и отсюда следует, что при $N_n \rightarrow \infty$ параметров нет. При этом кажется, что подход Годена не приводит к какой-либо интегрируемой системе типа (4).

Докажем отсутствие “анизотропных” решений системы (9) при $N = 2$, $n \geq 3$. В этом простейшем нетривиальном случае набор $\{f_{js}^{\alpha\beta}\}$ может быть параметризован следующим образом:

$$f_{js}^{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{jsp} A_p^{\alpha\beta}, \quad f_{sk}^{\alpha\lambda} = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{skp} A_p^{\alpha\lambda}, \quad f_{js}^{\beta\lambda} = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{jsp} A_p^{\beta\lambda}. \quad (12)$$

Так как $j \neq k \neq s$, система (9) переписывается в виде

$$A_k^{\alpha\beta} A_j^{\alpha\lambda} + A_s^{\alpha\lambda} A_k^{\beta\lambda} + A_s^{\alpha\beta} A_j^{\beta\lambda} = 0$$

с общим решением

$$\begin{aligned} A_1^{\alpha\lambda} &= \frac{A}{\sin \nu_1}, & A_2^{\alpha\lambda} &= \frac{A}{\sin \nu_2}, & A_3^{\alpha\lambda} &= -\frac{A}{\sin(\nu_1 + \nu_2)}, \\ A_1^{\alpha\alpha} &= A \operatorname{ctg} \nu_1, & A_2^{\alpha\alpha} &= A \operatorname{ctg} \nu_2, & A_3^{\alpha\alpha} &= -A \operatorname{ctg}(\nu_1 + \nu_2), \end{aligned}$$

где A, ν_1, ν_2 – некоторые параметры. Теперь, если взять $\alpha \neq \beta \neq \lambda$, то из (9) можно получить, что

$$-\frac{A^2}{2 \cos \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_2}{2} \cos \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} = 0,$$

следовательно, $A = 0$.

Довольно удивительно, что можно построить интегрируемые модели типа Годена при $n \geq 3$, используя только “изотропные” решения системы (9). Мы сделаем это в следующем разделе.

3. НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ С N ИСТОЧНИКАМИ И $n - 1$ МОДАМИ

Рецепт построения интегрируемой модели типа (4) является совершенно необычным. Потребуем, чтобы приведенные выше операторы $\mathcal{H}_j^{(N)}$ подчинялись равенству

$$[\mathcal{H}_j^{(N)}, \mathcal{H}_k^{(N)}] = \widehat{S}_{jk}(\{\widehat{T}_{\alpha\beta}^s\}, \{x\}), \quad (13)$$

где матрицы $\widehat{S}_{jk}$ обладают следующим свойством: при $x \rightarrow \infty$ они имеют только нулевые собственные значения в подпространстве, в котором все операторы из набора $\{\widehat{T}_{\alpha\beta}^s\}$ действуют нетривиально. Затем мы можем ввести новые операторы $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{H}_j^{(N)}$ в этом подпространстве. Эти операторы коммутируют, а $H_n^{N+1} =$

$-\sum_{j=1}^N \mathcal{H}_j^{(N)}$ является некоторым нетривиальным гамильтонианом. Вычисляя непосредственно коммутатор операторов (5), можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{jk}(\{\hat{T}_{\alpha\beta}^s\}, \{x\}) = & - \sum_{s \neq j, k}^N \sum_{\alpha, \beta, \lambda=1}^n (f_{js}^{\alpha\beta} f_{sk}^{\alpha\lambda} + f_{kj}^{\alpha\lambda} f_{js}^{\beta\lambda} + f_{jk}^{\alpha\beta} f_{ks}^{\beta\lambda}) \times \\ & \times (\hat{T}_{\alpha\beta}^j \hat{T}_{\lambda\alpha}^k \hat{T}_{\beta\lambda}^s - \hat{T}_{\beta\lambda}^j \hat{T}_{\alpha\lambda}^k \hat{T}_{\lambda\beta}^s) - \sum_{\alpha, \beta, \lambda=1}^n (f_{j, N+1}^{\alpha\beta} f_{N+1, k}^{\alpha\lambda} + f_{kj}^{\alpha\lambda} f_{j, N+1}^{\beta\lambda} + f_{jk}^{\alpha\beta} f_{k, N+1}^{\beta\lambda}) \times \\ & \times (\hat{T}_{\alpha\beta}^j \hat{T}_{\lambda\alpha}^k \hat{T}_{\beta\lambda}^{N+1} - \hat{T}_{\beta\lambda}^j \hat{T}_{\alpha\lambda}^k \hat{T}_{\lambda\beta}^{N+1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Выберем $f_{jk}^{\alpha\beta} = A(\nu_j - \nu_k)^{-1}$, $1 \leq j, k \leq N$, т.е. используем изотропное решение Годена при $j, s, k \leq N$. Тогда двойная сумма исчезает, и мы имеем

$$\begin{aligned} \hat{S}_{jk}(\{\hat{T}_{\alpha\beta}^s\}, \{x\}) = & - \sum_{\alpha, \beta, \lambda=1}^n \left[f_{j, N+1}^{\alpha\beta} f_{N+1, k}^{\alpha\lambda} + \frac{A}{\nu_j - \nu_k} (f_{k, N+1}^{\beta\lambda} - f_{j, N+1}^{\beta\lambda}) \right] \times \\ & \times (\hat{T}_{\alpha\beta}^j \hat{T}_{\lambda\alpha}^k \hat{T}_{\beta\lambda}^{N+1} - \hat{T}_{\beta\lambda}^j \hat{T}_{\alpha\lambda}^k \hat{T}_{\lambda\beta}^{N+1}). \end{aligned} \quad (15)$$

На числа $f_{j, N+1}^{\alpha\beta}$ нет никаких ограничений, кроме симметрии. Отсюда в соотношении (15) мы имеем $Nn(n+1)/2$ свободных параметров при заданном наборе $\{A, \{\nu_j\}\}$. Разумеется, существует тривиальный случай, когда все $f_{j, N+1}^{\alpha\beta} = 0$, но, к счастью, можно построить и нетривиальный анзац

$$f_{j, N+1}^{\alpha\beta} = (\delta_{\beta n} f_{j, N+1}^{\alpha n} + \delta_{\alpha n} f_{j, N+1}^{\beta n})(1 - \delta_{\alpha n} \delta_{\beta n}) f_{j, N+1}^{nn},$$

т.е. $f_{j, N+1}^{\alpha\beta} = 0$, кроме случаев $\alpha \neq n$ или $\beta \neq n$.

Коммутатор $[\mathcal{H}_j^N, \mathcal{H}_k^N]$ является все еще слишком сложным. Сделаем следующее предположение: пусть

$$f_{j, N+1}^{nn} = -F\nu_j, \quad f_{j, N+1}^{\lambda n} = \varepsilon_\lambda \sqrt{AF}, \quad |\varepsilon_\lambda| = 1, \quad (16)$$

где ν_j – произвольные числа. Тогда (13) может быть переписано как

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_j^{(N)}, \mathcal{H}_k^{(N)}] = & \sum_{\beta, \lambda=1}^{n-1} AF \varepsilon_\beta \varepsilon_\lambda (\hat{T}_{n\beta}^j \hat{T}_{\lambda n}^k \hat{T}_{\beta\lambda}^{N+1} - \hat{T}_{\beta n}^j \hat{T}_{n\lambda}^k \hat{T}_{\lambda\beta}^{N+1}) - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sqrt{AF} \{ F\nu_j \varepsilon_\lambda (\hat{T}_{nn}^j \hat{T}_{\lambda n}^k \hat{T}_{n\lambda}^{N+1} - \hat{T}_{nn}^j \hat{T}_{n\lambda}^k \hat{T}_{\lambda n}^{N+1}) - \\ & - F\nu_k \varepsilon_\lambda (\hat{T}_{n\lambda}^j \hat{T}_{nn}^k \hat{T}_{\lambda n}^{N+1} - \hat{T}_{\lambda n}^j \hat{T}_{nn}^k \hat{T}_{n\lambda}^{N+1}) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выберем теперь $\hat{T}_{\beta\lambda}^{N+1} = -b_\beta b_\lambda^+$ в качестве представления $SL(n)$ Жордана–Швингера и рассмотрим действие правой части выражения (17) на векторы $\varphi_{nn}^{(L)}$ такие, что $\hat{N}_n \varphi_{nn}^{(L)} \sim L^2 \varphi_{nn}^{(L)}$, $L \gg 1$, где

$$\hat{N}_n = - \left(\hat{T}_{nn}^{N+1} + \sum_{j=1}^N \hat{T}_{nn}^j \right) = b_n b_n^+ - \sum_{j=1}^N \hat{T}_{nn}^j.$$

Тогда

$$\hat{T}_{nn}^{N+1} \sim -L^2, \quad \hat{T}_{n\alpha}^{N+1} \sim -Lb_{\alpha}^+, \quad \hat{T}_{\alpha n}^{N+1} \sim -Lb_{\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq n-1.$$

Если

$$F = \frac{A\Delta}{L^2}, \quad f_{k,N+1}^{nn} = -\frac{A\Delta\nu_k}{L^2}, \quad f_{k,N+1}^{\lambda n} = \frac{\varepsilon_{\lambda}A\sqrt{\Delta}}{L},$$

то $\lim_{L \rightarrow \infty} [\mathcal{H}_j^{(N)}, \mathcal{H}_k^{(N)}] \varphi_{nn}^{(L)} = 0$, и операторы $\tilde{\mathcal{H}}_j^{(N)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{H}_j^{(N)}$ коммутируют на подпространстве! В явном виде эти операторы записываются как

$$\tilde{\mathcal{H}}_j^{(N)} = A \sum_{s \neq j} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \hat{T}_{\alpha\beta}^j \hat{T}_{\beta\alpha}^s \frac{1}{\nu_j - \nu_s} + \hat{w}_j, \quad (18)$$

где

$$\hat{w}_j = A \left[\sum_{\lambda=1}^{n-1} \varepsilon_{\lambda} \sqrt{\Delta} (b_{\lambda} \hat{T}_{n\lambda}^j + b_{\lambda}^+ \hat{T}_{\lambda n}^j) + \Delta \nu_j \hat{T}_{nn}^j \right]$$

и

$$H_{N+1}^{(N)} = - \sum_{j=1}^N \tilde{\mathcal{H}}_j^{(N)} = - \sum_{j=1}^N \hat{w}_j = -A \sum_{k=1}^N \left[\sum_{\lambda=1}^{n-1} \varepsilon_{\lambda} \sqrt{\Delta} (b_{\lambda} \hat{T}_{n\lambda}^k + b_{\lambda}^+ \hat{T}_{\lambda n}^k) + \Delta \nu_k \hat{T}_{nn}^k \right].$$

Операторы $H_{N+1}^{(N)}$ коммутируют с операторами $\tilde{\mathcal{H}}_j^{(N)}$ и $\hat{N}_{\alpha} = - \sum_{j=1}^N \hat{T}_{\alpha\alpha}^j + b_{\alpha}^+ b_{\alpha}$.

И наконец, в качестве $\hat{T}_{\alpha\beta}^j$ выберем матричное представление $SL(n)$, $\hat{T}_{\alpha\beta}^j \rightarrow \hat{R}_{\alpha\beta}^j$, и прибавим линейную комбинацию $\sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}$ к $H_{N+1}^{(N)}$. Легко видеть, что в результате мы получаем оператор обобщенной модели Дике (4) при $n \geq 3$,

$$H^{(N,n)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} + \sum_{k=1}^N \Delta_k \hat{R}_{nn}^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N g_{\alpha}^{(k)} [b_{\alpha} \hat{R}_{n\alpha}^{(k)} + b_{\alpha}^+ \hat{R}_{\alpha n}^{(k)}]$$

с константами связи

$$g_{\alpha}^{(k)} = -A\varepsilon_{\alpha} \sqrt{\Delta}, \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1. \quad (19)$$

При таком выборе констант связи наиболее общая модель (4) становится квантовой интегрируемой моделью, и спектральная задача может быть упрощена. Однако мы не нашли способа это осуществить, за исключением наиболее простого нетривиального случая $N = 2$, который описывается в следующем разделе.

4. ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ $N = 2$

В этом случае гамильтониан (4) при выборе констант связи в форме (19) может быть записан следующим образом:

$$H_n^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} + \Delta_1 \hat{R}_{nn}^1 + \Delta_2 \hat{R}_{nn}^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{k=1}^2 [b_{\alpha} \hat{R}_{n\alpha}^k + b_{\alpha}^+ \hat{R}_{\alpha n}^k], \quad (20)$$

где

$$\hat{N}^{\alpha} = b_{\alpha}^+ b_{\alpha} - \sum_{j=1}^2 \hat{R}_{\alpha\alpha}^j.$$

Перепишем (20) следующим образом:

$$H_n^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_\alpha \hat{N}_\alpha + \hat{k}_1 + \hat{k}_2, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{k}_{1,2} &= \pm (\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} \hat{P}_{1,2} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [b_\alpha \hat{R}_{n\alpha}^{1,2} + b_\alpha^+ \hat{R}_{\alpha n}^{1,2}] + \Delta_{1,2} \hat{R}_{nn}^{1,2}, \\ \hat{P}_{1,2} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \hat{R}_{\alpha\beta}^1 \hat{R}_{\beta\alpha}^2. \end{aligned}$$

Собственные функции гамильтониана (21) являются, разумеется, общими собственными функциями операторов $\hat{k}_{1,2}$ и N_α , $\alpha = 1, \dots, n-1$. Мы имеем

$$\psi = \left[\sum_{\lambda,\mu=1}^{n-1} A_{\lambda\mu} \varphi_\lambda^1 \varphi_\mu^2 b_\lambda^+ b_\mu^+ + \sum_{\lambda=1}^{n-1} (B_\lambda^{(1)} \varphi_\lambda^1 \varphi_n^2 + B_\lambda^{(2)} \varphi_\lambda^2 \varphi_n^1) b_\lambda^+ + C \varphi_n^1 \varphi_n^2 \right] Z_n |0\rangle,$$

где $\varphi_\lambda^1, \varphi_\mu^2$ – собственные векторы операторов $\hat{R}_{\lambda\lambda}^1, \hat{R}_{\mu\mu}^2$, а $Z_n = \prod_{\alpha=1}^{n-1} (b_\alpha^+)^{N_\alpha}$. Из соотношения $\hat{k}_{1,2}\psi = k_{1,2}\psi$ можно получить следующую систему алгебраических уравнений для коэффициентов $A_{\mu\nu}, B_\lambda^{(1,2)}, C$:

$$\begin{aligned} A_{\mu\lambda}(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + B_\mu^{(2)} &= k_1 A_{\lambda\mu}, & -A_{\mu\lambda}(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + B_\lambda^{(1)} &= k_2 A_{\lambda\mu}, \\ -B_\lambda^{(1)}(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + C &= k_2 B_\lambda^{(2)}, & B_\lambda^{(2)}(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + C &= k_1 B_\lambda^{(1)}, \\ B_\lambda^{(1)}(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + \Delta_1 B_\lambda^{(2)} + \sum_{\mu=1}^{n-1} A_{\mu\lambda}(N_\mu + 1 + \delta_{\lambda\mu}) &= k_1 B_\lambda^{(2)}, \\ -B_\lambda^{(2)}(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + \Delta_2 B_\lambda^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n-1} A_{\lambda\mu}(N_\mu + 1 + \delta_{\lambda\mu}) &= k_2 B_\lambda^{(1)}, \\ C(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + C\Delta_1 + \sum_{\mu=1}^{n-1} B_\mu^{(1)}(N_\mu + 1) &= k_1 C, \\ -C(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + \Delta_2 C + \sum_{\mu=1}^{n-1} B_\mu^{(2)}(N_\mu + 1) &= k_2 C. \end{aligned}$$

Эта система легко сводится к двум уравнениям для $k_{1,2}$:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - \Delta_1)(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + (\Delta_1 - \Delta_2)^{-2} - k_1(k_1 - \Delta_1) + 1 + \sum_{\mu=1}^{n-1} (N_\mu + 1) &= 0, \\ (\Delta_2 - k_1 - k_2)(\Delta_1 - \Delta_2)^{-1} + (\Delta_1 - \Delta_2)^{-2} - k_2(k_2 - \Delta_2) + 1 + \sum_{\mu=1}^{n-1} (N_\mu + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Собственные значения гамильтониана (20) задаются формулой

$$h^{2,n} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \omega_\alpha N_\alpha + k_1 + k_2.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили наиболее общую квантовую интегрируемую модель взаимодействия $n - 1$ мод излучения с N дипольными источниками, которая охватывает все известные модели этого типа: модель Джейнса–Каммингса ($N = 1$, $n = 2$), ее обобщение для произвольного числа мод ($N = 1$) и модель Дике (произвольное N , $n = 2$). Коммутативный набор операторов, включающий гамильтонианы $H_n^{(N)}$, найден в явном виде. Мы не использовали никаких “анизотропных” форм решения Годена; гамильтониан модели был получен с помощью ограничивающей методики. Мы почти сразу получили решение для $N = 2$ и произвольного n , используя дополнительные интегралы движения; однако на данном этапе исследований нам не удалось найти решения в наиболее интересном случае произвольных N и n . Мы надеемся вернуться к этой проблеме в будущем.

Благодарности. Мы благодарны рецензенту, который указал на работы [5]–[8] и сделал полезные замечания.

Список литературы

- [1] R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **93**:1 (1954), 99–110.
- [2] F. W. Cummings, *Phys. Rev.*, **140**:4A (1965), A1051–A1056.
- [3] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Clarendon Press, Oxford; Oxford Univ. Press, London, 1954.
- [4] L. Allen, J. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, New York, 1975.
- [5] B. Jurčo, *J. Math. Phys.*, **30**:8 (1989), 1739–1743.
- [6] A. Rybin, G. Kastelewicz, J. Timonen, N. Bogolubov, *J. Phys. A*, **31**:20 (1998), 4705–4723.
- [7] T. Skrypnik, *J. Math. Phys.*, **50**:10 (2009), 103523, 25 pp.
- [8] O. Babelon, D. Talalaev, *J. Stat. Mech.*, **06** (2007), P06013, 16 pp., arXiv: [hep-th/0703124](https://arxiv.org/abs/hep-th/0703124).
- [9] X.-S. Li, N.-Yu. Bei, *Phys. Lett. A*, **101**:3 (1984), 169–174.
- [10] A. Abdel-Hafez, A.-S.F. Obada, M. M. A. Ahmad, *Phys. Rev. A*, **35**:4 (1987), 1634–1647.
- [11] M. Gaudin, *J. de Physique*, **37**:10 (1976), 1087–1098.
- [12] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson, Paris, 1983.