Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Садовников, Н. Г. Иноземцева, В. И. Иноземцев,
Специальное множество собственных векторов для гиперболических систем Сазерленда, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 419–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:39:26

© 2010 г.

Б. И. Садовников*, Н. Г. Иноземцева†,
В. И. Иноземцев‡

СПЕЦИАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ САЗЕРЛЕНДА

Построены интегралы движения для гиперболических квантовых систем частиц Сазерленда с внутренними степенями свободы ($su(n)$ -спинами), взаимодействующих с внешним полем с потенциалом Морзе произвольной напряженности τ^2 . Эти системы являются ограниченными, если на τ , напряженность λ парного взаимодействия и число частиц налагаются некоторые ограничения. Основное состояние описывается волновой функцией типа Джастроу.

Ключевые слова: спиновая система, потенциал Морзе, бесспиновая система Сазерленда, интегрируемость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема нахождения точного основного состояния и возбуждений квантовых многочастичных систем заслужила большое внимание, так как примеры решаемых моделей в одном измерении с локальным парным взаимодействием были предложены более чем три десятилетия назад [1], [2]. Перечень таких моделей увеличился после введения систем частиц Калоджеро–Сазерленда (КС) [3], [4], взаимодействующих посредством дальнегодействующего обратноквадратичного потенциала $V(x) = \lambda(\lambda + 1)x^{-2}$, ограниченного гармонической потенциальной ямой $W(x) = \omega^2 x^2/2$ или рассматриваемого при периодических граничных условиях [5]. Расширение семейства решаемых моделей типа КС было связано с рассмотрением взаимодействий структуры, определяемой системой корней алгебр Ли [6]. При этом подходе наиболее общие модели из тех, что построены на сегодняшний день, содержат парный короткодействующий потенциал $[a^{-1} \operatorname{sh}(ax)]^{-2}$ и “граничные условия”, которые задаются в терминах взаимодействия, определяющегося трехпараметрическим потенциалом $W(x) = A_1 \operatorname{ch}(4ax + b_1) + A_2 \operatorname{ch}(2ax + b_2)$ [7]. Гамильтониан с многочастичным

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

†Международный университет природы, общества и человека «Дубна», Дубна, Московская обл., Россия

‡Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: inozv@theor.jinr.ru

потенциалом записывается в виде

$$H = \sum_j^N \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + W(x_j) \right] + \sum_{j < k}^N \frac{\lambda(\lambda + 1)a^2}{\text{sh}^2 a(x_j - x_k)}. \quad (1)$$

Однако собственные состояния при общих значениях параметров найти не так просто. Единственным исключением является предел $b_\alpha \rightarrow +\infty$ при масштабировании параметров A_α экспонентой e^{-b_α} , $\alpha = 1, 2$, [8], что приводит к однопараметрическому потенциалу Морзе

$$W(x) = 2\tau^2 a^2 (e^{2ax} - 1)^2. \quad (2)$$

В работе [8] было обнаружено, что динамика систем, описываемых с помощью соотношений (1), (2), является более сложной. Далее мы называем эти системы системами Сазерленда–Морзе (СМ).

Дальнейший прогресс был достигнут несколько лет тому назад в работах [9] и [10], в которых было предложено обобщение модели КС на случай частиц с внутренними степенями свободы ($su(n)$ -спинами) и обменным спиновым взаимодействием вида $\lambda(\lambda + P_{jk})V(x_j - x_k)$, где оператор P_{jk} транспонирует спины частиц с индексами j и k ,

$$P_{jk} = \sum_{p,q=1}^n e_j^{pq} e_k^{qp}, \quad (3)$$

а операторы e_j^{pq} являются элементарными спиновыми операторами, подчиняющимися коммутационным соотношениям

$$[e_j^{pq}, e_k^{rs}] = \delta_{jk} (\delta^{rq} e_j^{ps} - \delta^{ps} e_j^{rq}). \quad (4)$$

Эти новые модели и соответствующие решеточные спиновые цепочки с ясной физической интерпретацией, возникающие при “замораживании” динамических степеней свободы в пределе большой константы связи λ в гамильтониане, подобном тому, который приведен ниже в формуле (5), были очень подробно исследованы ранее [11]–[20]. Что касается их спектральных свойств, то общим является наличие огромных вырождений уровней; эти вырождения были успешно классифицированы с использованием внутренней симметрии янговского типа [13], [19]. Для более сложных систем типа СМ спектральная задача была решена только для семейства неравномерных спиновых решеток [21].

С учетом результатов работ [11]–[21] возникает естественный вопрос, существует ли решаемая спиновая версия динамических систем СМ, описываемых гамильтонианом

$$H_{\text{SM}}^{(s)} = \sum_j^N \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + 2\tau^2 a^2 (e^{2ax_j} - 1)^2 \right] + \sum_{j < k}^N \frac{\lambda(\lambda + P_{jk})a^2}{\text{sh}^2 a(x_j - x_k)}. \quad (5)$$

Цель настоящей работы – показать, что ответ на этот вопрос является положительным.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

В настоящее время принято считать, что возможность редукции спектральной задачи в квантовой механике тесно связана с основополагающей симметрией систем с N степенями свободы, что приводит к существованию по крайней мере $N - 1$ операторов, коммутирующих с гамильтонианом. Далее мы покажем, что на основе этого подхода можно рассмотреть спиновые системы СМ. Для упрощения обозначений удобно ввести переменные $z_j = e^{2ax_j}$, при этом гамильтониан (5) приобретает более удобный вид $H_{\text{SM}}^{(s)} = 4a^2 \mathcal{H}_{\text{SM}}^{(s)}$, где

$$\mathcal{H}_{\text{SM}}^{(s)} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \hat{p}_j^2 + w(z_j) \right] + \sum_{j < k}^N \frac{\lambda(\lambda + P_{jk}) z_j z_k}{(z_j - z_k)^2}, \quad (6)$$

$$w(z) = \frac{\tau^2}{2} (z_j - 1)^2, \quad \hat{p}_j = -\frac{iz_j \partial}{\partial z_j}. \quad (7)$$

Далее мы полагаем, что $\lambda > 0$.

Основное соотношение Лакса для оператора (6) записывается в виде

$$[\mathcal{H}_{\text{SM}}^{(s)}, L] = [L, M]. \quad (8)$$

Инварианты матрицы L не коммутируют с оператором (6). Однако, если найдена такая пара (L, M) , что M подчиняется условию

$$M\mathcal{I} = \mathcal{I}^\dagger M = 0 \quad (9)$$

с вектором $\mathcal{I}$, представляющим собой столбец с равными элементами, то соотношение (8) гарантирует существование интегралов движения в виде [13]–[15]

$$I_s = \mathcal{I}^\dagger L^s \mathcal{I}. \quad (10)$$

Чтобы построить пару Лакса для спиновой системы СМ, рассмотрим следующий анзац [7], [22]:

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & \psi + \rho \\ -\psi - \rho & -L_0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_0 + m & \phi \\ \phi & M_0 + m \end{pmatrix}, \quad (11)$$

в котором L_0 и M_0 составляют стандартную пару Лакса для N -частичной системы частиц Сазерленда,

$$(L_0)_{jk} = -\frac{i}{2} \lambda f_{jk} P_{jk} (1 - \delta_{jk}) + \hat{p}_j \delta_{jk}, \quad (M_0)_{jk} = i(1 - \delta_{jk}) \lambda h_{jk} P_{jk} - i \lambda \delta_{jk} \sum_{s \neq j}^N h_{js} P_{js},$$

где

$$f_{jk} = \frac{z_j + z_k}{z_j - z_k}, \quad h_{jk} = \frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2}, \quad (12)$$

а ψ, ϕ, ρ и m являются $(N \times N)$ -матрицами с элементами

$$\psi_{jk} = \xi(z_j) \delta_{jk}, \quad \phi_{jk} = \varphi(z_j) \delta_{jk}, \quad m_{jk} = \mu(z_j) \delta_{jk}, \quad \rho_{jk} = c P_{jk} (1 - \delta_{jk}). \quad (13)$$

Известно, что соотношение Лакса (8) эквивалентно переопределенной системе функциональных уравнений

$$iz \frac{d}{dz} [w(z) + \mu(z)] = 2\xi(z)\varphi(z), \quad \varphi(z) = -\frac{iz}{2} \cdot \frac{d\xi}{dz}, \quad (14)$$

$$-\frac{i\lambda}{2} f_{jk}[\mu(z_k) - \mu(z_j)] + c[\varphi(z_j) + \varphi(z_k)] = 0, \quad (15)$$

$$-\frac{i\lambda}{2} f_{jk}[\varphi(z_j) + \varphi(z_k)] + \lambda h_{jk}[\xi(z_j) - \xi(z_k)] = c[\mu(z_j) - \mu(z_k)]. \quad (16)$$

Исходя из уравнений (15), (16), налагающих наиболее серьезные ограничения, мы получаем общее решение этой системы в виде

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \mu_1 z + \frac{\mu_2}{z}, & \varphi(z) &= \epsilon \left(\mu_1 z - \frac{\mu_2}{z} \right), & \xi(z) &= 2i\epsilon \left(\mu_1 z + \frac{\mu_2}{z} + \gamma \right), \\ w(z) &= 2 \left[\mu_1^2 z^2 + \frac{\mu_2^2}{z^2} + \left(2\gamma - \frac{1}{2} \right) \left(\mu_1 z + \frac{\mu_2}{z} \right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $2c = -i\epsilon\lambda$, $\epsilon = \pm 1$. Из формул (13) можно видеть, что матрица M в соотношениях (11) подчиняется условию (9), если и только если $\mu(z) + \varphi(z) = 0$.

Из равенств (17) следует, что $w(z)$ приобретает вид (7), а для элементов матриц L и M справедливы равенства

$$\psi_{jk} = -i \left[\tau(z_j - 1) + \frac{1}{2} \right] \delta_{jk}, \quad \phi_{jk} = -m_{jk} = -\frac{\tau z_j \delta_{jk}}{2}, \quad \rho_{jk} = i\lambda P_{jk} \frac{1 - \delta_{jk}}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, набор интегралов движения дается формулами (10)–(12) и (18) при четных значениях $s = 2l$, $1 \leq l \leq N$. Легко проверить, что гамильтониан (6) пропорционален первому интегралу I_2 из этого набора и все интегралы I_{2l} , $1 \leq l \leq N$, являются функционально независимыми.

Существование пары Лакса (11) со свойством (9) позволяет построить еще один набор операторов, коммутирующих с гамильтонианом (6), подобный тому, который был найден в работах [13]–[15]. Пусть $E^{ab} = \text{diag}(e_1^{ab}, \dots, e_N^{ab}, e_1^{ab}, \dots, e_N^{ab})$ – диагональная $(2N \times 2N)$ -матрица с элементами, подчиняющимися соотношениям (4). Из формул (11), (12) можно видеть, что равенство (8) выполняется, если заменить L на E^{pq} . Таким образом, новый набор операторов задается с помощью матрицы

$$Q_l^{ab} = 2^{-(l+1)} \mathcal{I}^\dagger E^{ab} L^{2l} \mathcal{I}. \quad (19)$$

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Далее мы ограничим рассмотрение случаем $s = 1/2$ (фермионы), который является наиболее важным, поскольку результаты можно применить к описанию явлений в ограниченном квазиодномерном электронном газе [16].

Чтобы найти энергию основного состояния систем, описываемых гамильтонианом (5), естественно воспользоваться пробной волновой функцией типа Джастроу [3], [4], как это было сделано в работах [9], [16]:

$$\begin{aligned} \Psi(z_1\sigma_1, \dots, z_N\sigma_N) = C^{-1/2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |z_j - z_k|^\lambda (z_j - z_k)^{\delta_{\sigma_j\sigma_k}} e^{i\pi/2} \times \\ \times \text{sign}(\sigma_j - \sigma_k) \prod_{l=1}^N z_l^{\rho + \Delta\sigma_l} e^{-\tau z_l}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\sigma_j = 2s_j^{(3)}$, $s_j^{(3)} = \pm 1/2$, являются значениями проекции спина j -й частицы. Параметры ρ и Δ должны быть выбраны из уравнения Шредингера

$$\mathcal{H}_{\text{SM}}^{(s)} \Psi = [A_1 + \tau A_2(z, \sigma) + \lambda A_3(z, \sigma)] \Psi = E \Psi,$$

где

$$A_1 = \text{const} = -Na^2\lambda^2 \frac{(N-1)(2N-1)}{3},$$

$$A_2(z, \sigma) = \left[\rho - \tau + (N-1) \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \right] \sum_{k=1}^N z_k + \left(\Delta + \frac{N_+ - N_-}{2} \right) \sum_{k=1}^N \sigma_k z_k, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} A_3(z, \sigma) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \neq l}^N \frac{\sigma_k z_k - \sigma_l z_l}{z_l - z_k} - \sum_{k \neq l \neq m}^N \frac{z_k^2 \delta_{\sigma_k \sigma_l}}{(z_k - z_l)(z_k - z_m)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \frac{z_k z_l}{(z_k - z_l)^2} (1 - \delta_{\sigma_k \sigma_l}) \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{z_l}{z_k} \right)^{\varepsilon(\sigma_k - \sigma_l)} \prod_{j \neq k, l}^N \left(\frac{z_j - z_l}{z_j - z_k} \right)^{\delta_{\sigma_j \sigma_k} - \delta_{\sigma_j \sigma_l}} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Последнее слагаемое в правой части (22) порождено частью гамильтониана (6), связанной со спиновым обменом.

Мы получаем, что члены, линейные по z , которые присутствуют в $A_2(z, \sigma)$, исчезают, если параметры ρ и Δ подчиняются условиям

$$\rho = \tau - \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) (N-1), \quad \Delta = \frac{1}{2} (N_- - N_+). \quad (23)$$

Явная зависимость от спиновых переменных в формуле (22) пропадает, если рассматривать отдельно координаты z_j частиц с $\sigma = 1$ (обозначим их через p_ν , $\nu = 1, \dots, N_+$) и частиц с $\sigma = -1$ (обозначим их через q_μ , $\mu = 1, \dots, N_-$). Тогда

$$\begin{aligned} A_3(z, \sigma) = \frac{(N-1)(N_+ - N_-)^2}{4} - \frac{N_+(N_+ - 1)(N_+ - 2) + N_-(N_- - 1)(N_- - 2)}{3} + \\ + \sum_{\nu=1}^{N_+} \sum_{\mu=1}^{N_-} \left\{ \frac{(N_+ - N_-)(p_\nu + q_\mu)}{2(p_\nu - q_\mu)} - \sum_{l \neq \nu}^{N_+} \frac{p_\nu^2}{(p_\nu - p_l)(p_\nu - q_\mu)} - \sum_{m \neq \mu}^{N_-} \frac{q_\mu^2}{(q_\mu - q_m)(q_\mu - p_\nu)} \right\} + \\ + \sum_{\nu=1}^{N_+} \sum_{\mu=1}^{N_-} \frac{p_\nu q_\mu}{(p_\nu - q_\mu)^2} \left[1 - \left(\frac{p_\nu}{q_\mu} \right)^{N_+ - N_-} \prod_{l \neq \nu}^{N_+} \frac{p_l - q_\mu}{p_l - p_\nu} \prod_{m \neq \mu}^{N_-} \frac{q_m - p_\nu}{q_m - q_\mu} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Это выражение кажется чрезвычайно сложным, однако его можно успешно анализировать, если применить следующий прием. Рассмотрим интеграл

$$I_{N_+, N_-} = \int_C \int_{C'} \frac{dz dz'}{(z - z')^4} z^{N_+ - N_- + 1} z'^{N_- - N_+ + 1} \prod_{\nu=1}^{N_+} \frac{z' - p_\nu}{z - p_\nu} \prod_{\mu=1}^{N_-} \frac{z - q_\mu}{z' - q_\mu}. \quad (25)$$

Выберем контуры C и C' , окружающие точки p_ν и q_μ , следующим образом: контур C' лежит внутри контура C при $N_+ - N_- \geq 0$, контур C лежит внутри контура C' при $N_- - N_+ \geq 0$, причем внутренний контур не окружает точку 0 в обоих случаях. Если расширить внешний контур, то легко увидеть, что $I_{N_+, N_-} = 0$.

С другой стороны, оценка этого интеграла дает двойную и тройную суммы вида (24). Мы находим, что $A_3(z, \sigma)$ не зависит от z, σ . Таким образом, если ρ и τ задаются формулами (23), то функции (20) типа Джастроу действительно являются собственными функциями гамильтониана (5) с собственными значениями

$$E_\Delta = a^2 \left\{ -\frac{N}{6} [2\lambda^2(N-1)(2N-1) + \lambda(4N^2 - 3N - 4) + N^2 - 1] + \right. \\ \left. + \tau N[2\lambda(N-1) + N] + \frac{\lambda}{3} \Delta(\Delta^2 - 1) + \Delta^2 \left[\tau - N \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda}{2} \right] \right\}. \quad (26)$$

Минимум этого выражения соответствует значению $\Delta = 0$ для четного N и значению $\Delta = 1$ для нечетного N . Можно применить обычную аргументацию [6] для того, чтобы обосновать гипотезу об основном состоянии: основное состояние существует, если напряженность потенциала Морзе подчиняется соотношению $\tau - (\lambda + 1/2)(N-1) - \Delta/2 > 0$, и описывается с помощью формул (20) и (26) при минимально возможном значении Δ .

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Показано, что некоторые результаты, полученные для систем частиц КС, могут быть распространены на системы частиц СМ. Формализм Лакса обеспечивает нас богатым семейством сохраняющихся операторов, которые дают представление основополагающей бесконечномерной алгебры. Однако в случае систем СМ не существует аналогов операторов типа рождения и уничтожения, которые были найдены для ограниченных моделей Калоджеро в работах [6], [23] и успешно применялись при алгебраическом построении собственных состояний. Показано, что в случае систем СМ фермионов ($s = 1/2$) применение волновых функций типа Джастроу позволяет находить энергию основного состояния и некоторую часть дискретного спектра, характеризваемую “спиновыми” возбуждениями. Должны также существовать возбуждения “пространственного” типа, подобные найденным для бесспиновых систем СМ бозонов [8]. На этом этапе пока неясно, как модифицировать анзац (20), чтобы можно было рассматривать такие возбуждения.

Список литературы

- [1] E. H. Lieb, W. Liniger, *Phys. Rev.*, **130**:4 (1963), 1605–1616.
- [2] J. B. McGuire, *J. Math. Phys.*, **5**:5 (1964), 622–636; **7**:1 (1966), 123–132.
- [3] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **10**:12 (1969), 2191–2196; 2197–2200; **12**:3 (1971), 419–436.
- [4] B. Sutherland, *J. Math. Phys.*, **12** (1971), 246–250; 251–256.
- [5] B. Sutherland, *Phys. Rev. A*, **5**:3 (1972), 1372–1376.
- [6] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **94**:6 (1983), 313–404.
- [7] V. I. Inozemtsev, *Phys. Scripta*, **29**:6 (1984), 518–520.
- [8] V. I. Inozemtsev, D. V. Meshcheryakov, *Phys. Scripta*, **33**:2 (1986), 99–104.
- [9] Z. N. C. Ha, F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. B*, **46**:15 (1992), 9359–9368, arXiv: cond-mat/9204017.
- [10] A. P. Polychronakos, *Phys. Rev. Lett.*, **69**:5 (1992), 703–705, arXiv: hep-th/9202057.
- [11] N. Kawakami, *Phys. Rev. B*, **46**:5 (1992), 3191–3194.
- [12] J. A. Minahan, A. P. Polychronakos, *Phys. Lett. B*, **302**:2–3 (1993), 265–270, arXiv: hep-th/9206046.
- [13] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, V. Pasquier, *J. Phys. A*, **26**:20 (1993), 5219–5236.
- [14] K. Hikami, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **62**:12 (1993), 4203–4217.
- [15] B. Sutherland, B. S. Shastri, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:1 (1993), 5–8.
- [16] K. Vacek, A. Okiji, N. Kawakami, *Phys. Rev. B*, **49**:7 (1994), 4635–4639, arXiv: cond-mat/9309037.
- [17] K. Vacek, A. Okiji, N. Kawakami, *J. Phys. A*, **27**:7 (1994), L201–L206, arXiv: cond-mat/9402012.
- [18] Y. Kato, Y. Kuramoto, *Phys. Rev. Lett.*, **74**:7 (1995), 1222–1225, arXiv: cond-mat/9409031.
- [19] K. Hikami, *Nucl. Phys. B*, **441**:3 (1995), 530–548.
- [20] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:7 (1988), 635–638.
- [21] H. Frahm, V. I. Inozemtsev, *J. Phys. A*, **27**:21 (1994), L801–L807.
- [22] T. Yamamoto, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**:3 (1994), 1212–1213.
- [23] L. Brink, T. H. Hansson, M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **286**:1–2 (1992), 109–111, arXiv: hep-th/9206049.