Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Зеленов, Об операторах координаты и импульса
в p -адической квантовой механике, *ТМФ*, 2010, том 164,
номер 3, 426–434

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:20:55

© 2010 г.

Е. И. Зеленов*

ОБ ОПЕРАТОРАХ КООРДИНАТЫ И ИМПУЛЬСА В p -АДИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Описываются операторы координаты и импульса в p -адической квантовой механике на языке проекторнозначных мер.

Ключевые слова: p -адическая квантовая механика, спектральная мера, квантование Вейля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается вариант p -адической квантовой механики, в которой волновые функции – комплекснозначные функции p -адического аргумента. Естественная формулировка для такого подхода – квантование Вейля [1]. При этом вместо наблюдаемых (самосопряженных операторов) рассматриваются соответствующие однопараметрические унитарные группы операторов. Связь с привычной формулировкой в вещественном случае вполне естественна: от однопараметрических (сильно непрерывных) унитарных групп необходимо перейти к их самосопряженным генераторам, воспользовавшись теоремой Стоуна. В p -адическом случае такой переход невозможен.

На простейших, но содержательных примерах (операторы координаты и импульса) мы предлагаем процедуру построения самосопряженного оператора по соответствующей однопараметрической унитарной группе для случая p -адической квантовой механики. Оказывается, что спектр построенного таким образом оператора координаты (вернее, его ограниченного аналога) есть канторово множество.

С позиций настоящей статьи p -адическая квантовая механика по сути есть часть вещественной квантовой механики. Однако типичные операторы в p -адической квантовой механике имеют в качестве спектра множества типа канторовых.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Состояние классической системы есть точка в фазовом пространстве F . Будем рассматривать случай одномерной классической механики. В этом случае $F = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ – двумерное векторное пространство над полем p -адических чисел. На пространстве F задана симплектическая форма $B(z, z') = xy' - x'y$, $z = (x, y) \in F$,

*E-mail: evgeny.zelenov@gmail.com

$z' = (x', y') \in F$. Динамика классической системы задается семейством линейных преобразований F , сохраняющих симплектическую форму. В случае двумерного пространства F , который мы рассматриваем, эти преобразования образуют группу $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Классической p -адической (одномерной) системой* назовем тройку (F, B, G) , где F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, B – невырожденная симплектическая форма на F , G – подгруппа группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, действующая на F линейными преобразованиями.

В качестве подгруппы G обычно выбирается однопараметрическая подгруппа, параметр при этом играет роль времени. Мы будем рассматривать произвольные подгруппы. Для $(x, y) \in F$ будем считать x координатой классической частицы, а y – импульсом классической частицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Квантование* предложенной классической системы задается четверкой $(U, V, H, \mathcal{U})$, где H – комплексное гильбертово пространство, U и V – сильно непрерывные унитарные представления аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$ в H , удовлетворяющие соотношению $U(x)V(y) = e^{i\pi\{xy\}_p} V(y)U(x)$ для всех $(x, y) \in F$, $\mathcal{U}$ – унитарное представление группы G в H , удовлетворяющее соотношениям $\mathcal{U}(g)W(z) = W(gz)\mathcal{U}(g)$, где $W(z) = U(x)V(y)$, $z = (x, y) \in F$.

Состояние квантовой системы описывается волновой функцией – элементом пространства H единичной нормы. Предложенное определение дает квантование в форме Вейля.

Приведем пример квантования (координатное представление). В качестве пространства H выберем пространство $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Операторы U и V зададим соотношениями

$$\begin{aligned} (U(x)f)(u) &= e^{i\pi\{xu\}_p} f(u), \\ (V(y)f)(u) &= f(u - y), \end{aligned} \tag{1}$$

$(x, y) \in F$. Далее будем использовать обозначение $e^{2i\pi\{x\}_p} = \chi(x)$.

Представление $\mathcal{U}$ задается интегральными операторами, примеры для различных подгрупп G можно найти в монографии [2].

В случае вещественной квантовой механики U и V образуют сильно непрерывные однопараметрические унитарные группы. Воспользовавшись теоремой Стоуна, можно перейти к самосопряженным генераторам этих групп и получить представление Шредингера, при котором операторы координаты и импульса суть замыкания операторов умножения и дифференцирования соответственно. В рассматриваемой нами p -адической квантовой механике нет аналога теоремы Стоуна, поскольку представление реализуется в комплексном пространстве, а параметр p -адический. Отсутствие генераторов создает определенные сложности при интерпретации p -адической квантовой механики.

Предлагается следующий выход из ситуации. Справедлива следующая теорема (см., например, [3]).

ТЕОРЕМА 1. *Всякое унитарное представление $g \rightarrow T_g$ коммутативной локально-компактной группы G задается формулой*

$$T_g = \int \overline{\lambda(g)} dP(\lambda), \quad (2)$$

где P – некоторая проекторнозначная мера на группе характеров $\hat{G}$ группы G .

Если $G = \mathbb{R}$, а T_g – представление $\mathbb{R}$ в $L_2(\mathbb{R})$ операторами сдвига, указанная выше проекторнозначная мера есть проекторнозначная мера, соответствующая оператору дифференцирования (т.е. оператору импульса в представлении Шредингера).

Возвращаясь к p -адической квантовой механике, мы ставим задачу следующим образом: для представлений аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$, задаваемых формулами (1), построить разложения вида (2). Соответствующие проекторнозначные меры будем называть проекторнозначными мерами операторов координаты и импульса.

3. ОПЕРАТОРЫ КООРДИНАТЫ И ИМПУЛЬСА

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Проекторнозначная мера Q для оператора координаты дается формулой*

$$(Q_\Omega f)(u) = h_\Omega(u) f(u),$$

где $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, Ω – борелевское множество на $\mathbb{Q}_p$, h_Ω – характеристическая функция множества Ω .

Проекторнозначная мера для оператора импульса дается формулой

$$(P_\Omega f)(u) = (\tilde{h}_\Omega * f)(u),$$

где $\tilde{h}$ – преобразование Фурье функции h , $a * -$ оператор свертки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы элементарно. Поскольку пространство $\mathcal{D}$ локально-постоянных комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p$ с компактным носителем плотно в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, а любая функция из $\mathcal{D}$ есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров, доказательство достаточно провести для характеристической функции произвольного шара. Для шара $B \in \mathbb{Q}_p$ обозначим меру через $\mu(B)$. В качестве f возьмем функцию $f = h_B / \sqrt{\mu(B)}$. Представим интеграл по проекторнозначной мере как предел сумм Римана. Для этого представим $\mathbb{Q}_p$ как объединение счетного числа непересекающихся шаров B_i , $i = 1, 2, \dots$, одинакового радиуса:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B)} \int \chi(xu) (h_B, Q_\Omega h_B) d\mu(\Omega) &= \\ &= \frac{1}{\mu(B)} \lim_{\mu(B_i) \rightarrow 0} \sum_{B_i} \chi(xu_i) (h_B, h_{B_i} h_B) \mu(B_i) = \\ &= \lim_{\mu(B_i) \rightarrow 0} \sum_{B_i \subset B} \chi(xu_i) \mu(B_i) = \int_B \chi(xu) du = \frac{1}{\mu(B)} (h_B, \chi(xu) h_B). \end{aligned}$$

Приведенные выкладки доказывают первое утверждение теоремы.

Второе утверждение следует непосредственно из того факта, что проекторнозначные меры Q_Ω и P_Ω связаны преобразованием Фурье F : $P_\Omega = F^{-1}Q_\Omega F$:

$$P_\Omega f = F^{-1}[\tilde{h}_\Omega * F[f]] = h_\Omega f.$$

Проекторнозначные меры P_Ω и Q_Ω не позволяют построить самосопряженные операторы импульса и координаты, однако они позволяют вычислять распределение вероятностей координаты и импульса. Кроме того, мы можем построить самосопряженные операторы, которые являются функциями от операторов координаты и импульса.

4. ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Пусть частица (в координатном представлении) находится в состоянии $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, Ω – борелевское множество в $\mathbb{Q}_p$. Вероятность того, что координата частицы лежит в области Ω , дается формулой

$$\mathcal{P}(x \in \Omega) = \int_\Omega |f(x)|^2 dx.$$

ПРИМЕР 2. Через B_n , $n \in \mathbb{Z}$, обозначим шар радиуса p^n с центром в нуле. Пусть состояние частицы описывается волновой функцией $f = p^{-n/2}h_{B_n}$. Выберем целое m таким образом, чтобы выполнялись неравенства $m \leq n \leq -m$. Найдем вероятность $\mathcal{P}(x \in B_m)$ того, что координата частицы принимает значения в шаре B_m . В соответствии с нашим подходом

$$\mathcal{P}(x \in B_m) = p^{-n}(h_{B_n}, h_{B_m} h_{B_n}) = \frac{p^m}{p^n}.$$

Вероятность $\mathcal{P}(y \in B_m)$ того, что импульс частицы принимает значение в шаре B_m , дается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y \in B_m) &= p^{-n}(h_{B_n}, \tilde{h}_{B_m} * h_{B_n}) = \\ &= p^{-n} \int h_{B_n}(\xi) p^m \int h_{B_{-m}}(\xi - \eta) h_{B_n}(\eta) d\xi d\eta = \frac{p^n}{p^{-m}}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $n = 0$ (т.е. частица находится в вакуумном состоянии, см. [2]) и $m = 0$, то частица с вероятностью 1 находится в области фазового пространства $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Как уже отмечалось, предлагаемый подход не дает возможности построить операторы координаты и импульса, однако позволяет строить функции от таких операторов.

5. p -АДИЧЕСКАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА

Предлагаемый подход позволяет несколько по-другому посмотреть на p -адическую механику и ее связь с вещественной квантовой механикой.

Мы рассматривали проекторнозначные меры на $\mathbb{Q}_p$, при этом операторы проектирования действовали на пространстве $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Однако выбор пространства непринципиален. Легко построить проекторнозначную меру на $\mathbb{Q}_p$, при этом проекторы будут действовать в $L_2(\mathbb{R})$. Можно воспользоваться изоморфизмом сепарабельных

гильбертовых пространств, но мы построим явный пример. Для простоты рассуждений приведем пример для случая $p = 2$, для произвольного p рассуждения аналогичны. В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ выберем ортонормированный базис $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Разложим пространство в ортогональную прямую сумму пространств H_0 и H_1 , где H_0 и H_1 натянуты на векторы с четными и нечетными номерами соответственно. Проекторы на H_0 и H_1 обозначим через P_0 и P_1 . Проектору P_0 поставим в соответствие единичный шар B_0 в $\mathbb{Q}_2$ с центром в нуле, а проектору P_1 – дополнение в $\mathbb{Q}_2$ к этому шару. Теперь пространство H_0 разложим в ортогональную прямую сумму подпространств H_{00} и H_{01} , натянутых на векторы, номера которых при делении на 4 имеют остатки 0 и 2 соответственно. Шар единичного радиуса в $\mathbb{Q}_2$ есть объединение двух непересекающихся шаров B_{00} и B_{01} радиуса $1/2$. Этим шарам поставим в соответствие проекторы P_{00} и P_{01} на подпространства H_{00} и H_{01} . Аналогично поступим с пространством H_1 , рассмотрев подпространства, натянутые на векторы с номерами, имеющими при делении на 4 остатки 1 и 3 соответственно. Проектору P_{10} поставим в соответствие единичный шар $B_{10} \subset \mathbb{Q}_2 \setminus B_0$, а проектору P_{11} – дополнение в $\mathbb{Q}_2$ к множеству $B_0 \cup B_{10}$. Легко увидеть, что продолжая эту процедуру, каждому шару в $\mathbb{Q}_2$ мы поставим в соответствие проектор в $L_2(\mathbb{R})$. Это соответствие задает требуемую проекторнозначную меру.

Далее заметим, что поскольку $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{R}$ – полные метрические пространства одинаковой мощности, то они изоморфны как борелевские пространства, через $\beta: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим этот изоморфизм. С помощью β меру на $\mathbb{Q}_p$ можно перенести на $\mathbb{R}$, $\nu_{\mathbb{R}}(\Omega) = \mu_{\mathbb{Q}_p}(\beta^{-1}\Omega)$, где Ω – борелевское подмножество $\mathbb{R}$, а $\mu_{\mathbb{Q}_p}$ – борелевская мера на $\mathbb{Q}_p$. Таким же образом построенная проекторнозначная мера на $\mathbb{Q}_p$ задает некоторую проекторнозначную меру на $\mathbb{R}$. Эта мера позволяет строить самосопряженные операторы (наблюдаемые) вещественной квантовой механики, соответствующие наблюдаемым в p -адической квантовой механике. В следующем разделе мы уточним предложенную идею.

6. СПЕКТР ОПЕРАТОРА КООРДИНАТЫ

Рассмотрим более подробно оператор p -адической координаты. Для простоты ограничимся случаем, когда волновые функции имеют носитель в единичном шаре в $\mathbb{Q}_p$. В пространстве $H_p = L_2(\mathbb{Z}_p)$ определим проекторнозначную меру Q , как в теореме 2:

$$(Q_{\Omega}\psi)(u) = h_{\Omega}(u)\psi(u), \quad \psi \in L_2(\mathbb{Z}_p),$$

где Ω – борелевское множество в $\mathbb{Z}_p$.

Как уже отмечалось, построенная проекторнозначная мера Q не позволяет получить оператор p -адической координаты $\mathcal{Q}$ путем простого интегрирования функции $f(x) = x$, $x \in \mathbb{Z}_p$, по этой мере, поскольку f принимает значения в поле p -адических чисел, однако мы можем построить аналог функций от оператора координаты.

Действительно, пусть $F: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая по Борелю ограниченная комплекснозначная функция. Тогда

$$F(\mathcal{Q}) = \int_{\mathbb{Z}_p} F(\lambda) dQ(\lambda)$$

задает ограниченный оператор на H_p . Если функция F принимает вещественные значения, то оператор $F(Q)$ самосопряженный. Легко видеть, что оператор $F(Q)$ имеет вид

$$(F(Q)\psi)(x) = F(x)\psi(x), \quad \psi \in H_p.$$

Другими словами, это оператор умножения на функцию F .

Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 3. Пусть $x = x_0 + x_1p + \dots + x_np^n + \dots$ – каноническое разложение целого p -адического числа x , N – натуральное число. Рассмотрим функцию $F_N(x) = x_0 + x_1 + \dots + x_{N-1}p^{N-1}$. Функция F_N непрерывна, локально-постоянна (постоянна на каждом шаре радиуса p^{-N}) и принимает значения в множестве целых чисел $\{0, 1, 2, \dots, p^N - 1\}$. Справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |F_N(x) - x|_p = 0,$$

в этом смысле функция F_N аппроксимирует линейную функцию.

Оператор $F_N(Q)$ обладает следующими свойствами:

- а) $F_N(Q)$ – самосопряженный оператор;
- б) собственные значения оператора $F_N(Q)$ пробегает множество целых чисел от 0 до $p^N - 1$;
- в) все собственные значения оператора $F_N(Q)$ имеют бесконечную кратность.

Следующим естественным шагом в построении p -адического оператора координаты является рассмотрение C^* -алгебры операторов, порожденной семейством проекторов $\{Q_\Omega\}$, где Ω пробегает семейство борелевских подмножеств $\mathbb{Z}_p$. Обозначим эту алгебру через A_Q . Заметим, что в вещественном случае эта алгебра есть алгебра непрерывных функций на спектре оператора координаты.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра A_Q изоморфна алгебре $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на единичном шаре в $\mathbb{Z}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того факта, что любая функция из $C(\mathbb{Z}_p)$ есть равномерный предел конечных линейных комбинаций характеристических функций шаров в $\mathbb{Z}_p$.

Заметим, что алгебра $C(\mathbb{Z}_p)$ изоморфна алгебре $C(\mathcal{C})$ непрерывных функций на канторовом множестве $\mathcal{C}$ (поскольку $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно $\mathcal{C}$).

Гомеоморфизм $\alpha: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{C}$ строится следующим образом. Пусть $a = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots$ – целое p -адическое число. Определим

$$\alpha(a) = \frac{p}{p-1} \left(a_0 + \frac{a_1}{p+1} + \dots + \frac{a_n}{(p+1)^n} + \dots \right).$$

Видно, что α есть непрерывное вложение $\mathbb{Z}_p$ в отрезок $[0, 1]$ вещественной прямой. Образом этого отображения являются вещественные числа, у которых в разложении по обратным степеням числа $p+1$ отсутствует число p , т.е. канторово множество, которое мы обозначили через $\mathcal{C}$ (см., например, [4]).

Построенное отображение α позволяет перенести меру Хаара (и, соответственно, проекторнозначную меру Q) с $\mathbb{Z}_p$ на отрезок $[0, 1]$. Действительно, пусть μ_p – мера Хаара на $\mathbb{Z}_p$. Через μ_p^α обозначим меру на $[0, 1]$, которая задается следующим образом:

$$\mu_p^\alpha([a, b]) = \mu_p(\alpha^{-1}(\mathcal{C} \cap [a, b])).$$

Построенная мера μ_p^α на отрезке $[0, 1]$ непрерывна и сингулярна по отношению к мере Лебега, носитель этой меры – канторово множество $\mathcal{C}$. Аналогичным образом определим проекторнозначную меру Q^α на отрезке $[0, 1]$:

$$Q^\alpha([a, b]) = Q(\alpha^{-1}(\mathcal{C} \cap [a, b])).$$

Построенная мера Q^α делает естественным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Оператором Q^α координаты в p -адической квантовой механике (или просто p -адическим оператором координаты) назовем следующий оператор:*

$$\mathcal{Q}^\alpha = \int_0^1 \lambda dQ^\alpha(\lambda).$$

Оператор Q^α выглядит довольно сложно в вещественном представлении. В действительности это весьма простой оператор.

ЛЕММА 1. *p -Адический оператор координаты Q^α есть оператор умножения на функцию α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу построения меры Q^α справедлива следующая формула:

$$\mathcal{Q}^\alpha = \int_0^1 \lambda dQ^\alpha(\lambda) = \int_{\mathbb{Z}_p} \alpha(\lambda) dQ(\lambda),$$

а последний оператор есть оператор умножения на α в силу свойств проекторнозначной меры Q .

Как легко заметить, спектр оператора Q^α есть канторово множество на отрезке $[0, 1]$.

Из леммы 1 вытекает довольно любопытное следствие.

ТЕОРЕМА 4. *Любую непрерывную комплекснозначную функцию на $\mathbb{Z}_p$ можно равномерно приблизить полиномами от функции α .*

Действительно, как следует из леммы 1, функция α порождает алгебру $C(\mathbb{Z}_p)$.

Заметим, что спектр построенного оператора Q^α есть канторово множество $\mathcal{C}$.

В дальнейшем удобно будет использовать в качестве отображения α другую функцию. Пусть d – вещественное число, $0 < d < 1$. Для целого p -адического числа $a = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots$ определим вещественнозначную функцию α_d по формуле

$$\alpha_d(a) = \frac{p^{1/d} - 1}{(p - 1)p^{1/d}} \left(a_0 + \frac{a_1}{p^{1/d}} + \dots + \frac{a_n}{p^{n/d}} + \dots \right).$$

Как было показано в работе [5], отображение α_d – непрерывное вложение $\mathbb{Z}_p$ в отрезок $[0, 1]$, образом этого отображения является канторово множество $\mathcal{C}_d$, хаусдорфова размерность этого множества равна d . Все построения, сделанные ранее для

отображения α , верны и для α_d . Кроме того, легко заметить, что α совпадает с α_d при $d = 1/\log_p(1+p)$.

Для построения оператора p -адической координаты мы использовали непрерывное вложение $\mathbb{Z}_p$ в отрезок $[0, 1]$. Посмотрим теперь, какой оператор мы получим, если вместо непрерывного вложения будем использовать борелевский изоморфизм $\mathbb{Z}_p$ и $[0, 1]$. В некотором смысле, построенный ниже изоморфизм будет пределом отображений α_d при $d \rightarrow 1$.

Обозначим через $\mathcal{Z}_p$ множество целых p -адических чисел с выколотыми целыми рациональными точками (т.е. точками с конечными каноническими разложениями). Множество $\mathcal{Z}_p$ локально компактно и оснащено естественной борелевской структурой как подмножество $\mathbb{Z}_p$.

Определим отображение $\beta: \mathcal{Z}_p \rightarrow [0, 1]$ по формуле

$$\beta(a) = \frac{1}{p}(a_0 + a_1p^{-1} + a_2p^{-2} + \dots + a_np^{-n} + \dots),$$

где $a = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots$ – каноническое разложение $a \in \mathcal{Z}_p$.

Обратное отображение $\beta^{-1}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}_p$ определяется очевидным образом.

Справедлива следующая очевидная лемма.

ЛЕММА 2. *Отображение β отображает $\mathcal{Z}_p$ на $[0, 1]$ взаимно однозначно. Отображение β непрерывно, обратное отображение β^{-1} разрывно в счетном числе точек.*

Из леммы 2 вытекает, что β является борелевским изоморфизмом $\mathcal{Z}_p$ и $[0, 1]$ (более того, β является обобщенным гомеоморфизмом класса $(0, 1)$, см. [4]).

С помощью изоморфизма β определим меру μ на отрезке $[0, 1]$ по формуле $\mu(\Omega) = \mu_p(\beta^{-1}(\Omega))$, где Ω – борелевское подмножество отрезка $[0, 1]$, а μ_p – мера на $\mathcal{Z}_p$, индуцированная мерой Хаара на $\mathbb{Z}_p$.

Непосредственно из построения меры μ вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.*

Отображение β очевидным образом продолжается до непрерывного отображения $\mathbb{Z}_p \rightarrow [0, 1]$, которое будем обозначать тем же символом β . Аналогично оператору $\mathcal{Q}^\alpha$ (см. определение 3) построим оператор $\mathcal{Q}^\beta$, который есть оператор умножения на функцию β . Из теоремы 5 непосредственно следует, что спектр оператора $\mathcal{Q}^\beta$ есть отрезок $[0, 1]$. В отличие от оператора $\mathcal{Q}^\alpha$, оператор $\mathcal{Q}^\beta$ не порождает алгебру $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на $\mathbb{Z}_p$. Как легко заметить, оператор $\mathcal{Q}^\beta$ порождает подалгебру B в $C(\mathbb{Z}_p)$, состоящую из функций, обладающих следующим свойством. Пусть $a = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n$ – целое рациональное число. Непрерывная функция f лежит в алгебре B тогда и только тогда, когда выполнено равенство $f(a) = f(a - p^{n+1})$ для всех целых рациональных a . Отметим также, что алгебра B изоморфна алгебре $C([0, 1])$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Поэтому “правильным” оператором координаты следует считать оператор $\mathcal{Q}^\alpha$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как отмечалось в начале статьи, одна из целей данной работы – попытка глубже понять связь между вещественной и p -адической квантовыми механиками. С позиций настоящей статьи p -адическая квантовая механика по сути есть часть вещественной квантовой механики. Однако “типичные” операторы в p -адической квантовой механике имеют в качестве спектра множества типа канторовых, а “типичные” меры непрерывны и сингулярны относительно меры Лебега. В этом смысле p -адическая квантовая механика может выступать инструментом описания некоторого класса сложных квантово-механических систем. Заметим, что эта идея высказывалась в ранних работах по p -адической математической физике (библиографию см. в [2], [6]).

Благодарности. Автор выражает благодарность И. В. Воловичу за многочисленные плодотворные обсуждения идей и результатов работы. Работа финансировалась Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] В. С. Владимиров, И. И. Волович, *Докл. АН СССР*, **302**:2 (1988), 320–323.
- [2] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [3] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
- [4] К. Куратовский, *Топология*. т. 1, 2, Мир, М., 1966, 1969.
- [5] S. Fischenko, E. Zelenov, “ p -Adic models of turbulence”, *p -Adic Mathematical Physics*, AIP Conf. Proc., **286**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, AIP, New York, 2006, 174–191.
- [6] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17, arXiv: 0904.4205.