Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Трушечкин, Необратимость и роль измерительно-го прибора в функциональной формулировке классической механики, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 435–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:50:21

© 2010 г.

А. С. Трушечкин^{*†}

НЕОБРАТИМОСТЬ И РОЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРИБОРА В ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Анализируется роль прибора в недавно предложенной функциональной формулировке классической механики, основным уравнением которой является уравнение Лиувилля. Его решения обладают свойством делокализации (расплывания), что интерпретируется как необратимость на микроуровне. Показывается, что, отслеживая динамику частицы с помощью приборов, можно наблюдать приближенно обратимую и возвращаемую динамику для частицы, однако многократные измерения неизбежно приводят к выделению тепла и возрастанию энтропии в приборе. Таким образом, необратимое поведение переносится с изучаемой системы на измерительный прибор, который тоже является физической системой.

Ключевые слова: классическая механика, проблема необратимости, уравнение Лиувилля, теория измерений.

1. В статье Воловича [1] предлагается новая формулировка классической механики, названная функциональной. Исходное понятие механики в этой формулировке – не материальная точка, а функция плотности распределения в фазовом пространстве. Соответственно фундаментальным динамическим уравнением становится не уравнение Ньютона (или эквивалентные ему уравнения Гамильтона), а уравнение Лиувилля, даже если речь идет не об ансамбле, а об одной частице. Уравнение Ньютона (Гамильтона) тогда становится приближенным уравнением для средних координат и импульсов. В работе [1] вычислены поправки к решениям уравнения Ньютона для некоторых частных случаев.

Целью перехода к новой формулировке классической механики является согласование обратимой микроскопической динамики с необратимой макроскопической. Эта проблема известна как проблема необратимости и является в настоящее время

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: trushechkin@mi.ras.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия.

одной из важнейших фундаментальных проблем математической физики, требующих своего решения. Как известно, динамика материальной точки обратима и возвращаема. Но динамика функции плотности, подчиняющаяся уравнению Лиувилля, обладает так называемым свойством делокализации (расплывания): если частица движется в ограниченном объеме (например, ящике), то на больших временах достигается равномерное распределение пространственной плотности (см. теоремы Козлова о диффузии в бесстолкновительной сплошной среде [2], [3]). Это свойство соответствует необратимому поведению. Поэтому, если мы описываем с помощью функции плотности не только системы, состоящие из большого числа частиц, но даже и одну частицу, то противоречия между микро- и макроскопической динамиками нет (см. также [4]): обе динамики необратимы.

Аргумент в пользу функциональной формулировки состоит в том, что произвольные вещественные числа, т.е. бесконечные дроби (а с ними и отдельные траектории) не наблюдаемы. Поэтому в самом деле рассмотрение пучка траекторий или динамики функции плотности распределения более оправданно, чем рассмотрение отдельной траектории точки. Отдельная траектория является своего рода “скрытой переменной” и не имеет непосредственного физического смысла.

2. В работе [5] приводится еще один аргумент в пользу этой позиции: поскольку непосредственно наблюдаемые величины – это показания измерительных приборов, а любой прибор имеет погрешность, то в действительности мы никогда не знаем состояние системы как точку в фазовом пространстве. Мы знаем состояние системы только как некоторое распределение вероятностей. В той же работе предлагается метод построения функции плотности распределения на основе непосредственно наблюдаемых величин – показаний прибора – с помощью методов математической статистики. А именно если $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ – результаты измерений некоторой наблюдаемой $\mathbb{X}$ ($X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины), то этой наблюдаемой ставится в соответствие функция плотности

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}} e^{-(x-\bar{X})^2/(2S^2)}, \quad (1)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$$

– статистическая оценка среднего значения показаний прибора,

$$S^2 = \frac{S_{\text{сл}}^2}{n} + \sigma_{\text{сист}}^2$$

– оценка дисперсии, связанной с полной погрешностью измерений,

$$S_{\text{сл}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X^{(i)} - \bar{X})^2$$

– оценка дисперсии, связанной со случайной погрешностью, $\sigma_{\text{сист}}^2$ – дисперсия, связанная с систематической погрешностью (предполагается известной, так как может быть оценена с помощью данных паспорта прибора).

3. Настоящая работа посвящена рассмотрению роли измерительного прибора в функциональной формулировке динамики. Пусть имеется частица на прямой. В начальный момент времени $t = 0$ мы провели серию измерений координаты и импульса и построили функцию плотности вида

$$\rho(q, p) = \frac{1}{2\pi s_q s_p} \exp \left[-\frac{(q - \bar{q})^2}{2s_q^2} - \frac{(p - \bar{p})^2}{2s_p^2} \right]. \quad (2)$$

Это двумерный аналог формулы (1). Здесь мы перешли от случайных величин оценок средних $\bar{Q}$, $\bar{P}$ и дисперсий S_q^2 , S_p^2 к конкретным реализациям этих случайных величин (т.е. конкретным значениям, полученным в результате измерений и вычислений) $\bar{q}$, $\bar{p}$, s_q^2 и s_p^2 .

С течением времени распределение показаний приборов меняется. А именно если в начальный момент времени совместное распределение координаты и импульса частицы приближается функцией ρ , то в произвольный момент t оно будет приближаться функцией $\rho_t(q, p)$, которая является решением задачи Коши для уравнения Лиувилля с начальным условием ρ :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \rho_t}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial \rho_t}{\partial p}, \quad \rho_0 = \rho,$$

здесь $\rho_t = \rho_t(q, p)$, $V = V(q)$ – потенциальная энергия, $m > 0$ – масса.

Для многих потенциалов V (в частности, в случае свободного движения $V = 0$) с течением времени наблюдается расплывание плотности распределения (“делокализация”) [1]. Поэтому даже если в начальный момент времени мы знали положение частицы с очень хорошей точностью, со временем погрешность в определении положения частицы нарастает, и на больших временах сказать, где находится частица, мы практически не можем.

В этих рассуждениях важно, что на рассматриваемом промежутке времени мы больше не выполняли никаких измерений. Таким образом, уравнение Лиувилля описывает динамику функции плотности вероятности при отсутствии повторных измерений. Но как только в момент t мы провели очередную серию измерений координаты и импульса частицы, в результате изменения нашего знания о состоянии функция плотности снова “схлопывается” в функцию вида (2) (конечно, вообще говоря, с другими значениями $\bar{q}$, $\bar{p}$, s_q^2 и s_p^2). В какой-то степени это классический аналог квантового эффекта Зенона, когда постоянное наблюдение за частицей удерживает ее от неограниченного расплывания. Здесь мы пренебрегаем воздействием прибора на изучаемую систему, которое в классической механике может быть сделано сколь угодно малым, и рассматриваем изменение состояния при измерении только как следствие изменения нашего знания о нем.

Отсюда можно заметить, что при достаточно частых повторных измерениях можно наблюдать приближенно обратимую и возвращаемую динамику: вследствие частых измерений состояние системы будет постоянно схлопываться в состояния вида (2), и неограниченной делокализации не будет. Фактически динамика функции плотности приближенно сведется к динамике средних, т.е. к уравнениям Ньютона

(Гамильтона), которые обладают свойствами обратимости и возвращаемости. Формализуем рассуждение, обосновывающее возможность наблюдать возвращаемость динамики в функциональной формулировке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \varphi_t)$ – динамическая система, где Ω – некоторое множество, $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра измеримых подмножеств Ω , μ – мера на Ω , причем $\mu(\Omega) < \infty$, $\varphi_t, t \in \mathbb{R}$, – группа автоморфизмов Ω . Пусть далее на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задана также некоторая вероятностная мера P , абсолютно непрерывная относительно меры μ . И пусть $G \in \mathcal{F}$ – измеримое подмножество Ω . Тогда для любого вещественного T выполнено

$$P\left(\bigcup_{t>T} \varphi^t(G)\right) \geq P(G).$$

Предложение 1 фактически является следствием теоремы Пуанкаре о возвращении. Поясним его смысл. Пусть дана динамическая система, например, одна или несколько частиц в закрытом ящике, φ^t – гамильтонов поток, Ω – поверхность энергетического уровня, μ – инвариантная мера, и выполнено условие теоремы Пуанкаре $\mu(\Omega) < \infty$ (оно заведомо выполнено, например, если частицы не взаимодействуют друг с другом). Выберем множество G так, чтобы оно соответствовало случаю, когда все частицы собраны в одной из половин ящика (фиксированной). Вероятностная мера P на Ω связана с нашей оценкой начального состояния. Мера P , будучи абсолютно непрерывной относительно μ , имеет интегрируемую плотность ρ . На практике, как говорилось ранее, функция плотности ρ строится на основе серии измерений в момент времени $t = 0$, т.е. в начальный момент времени состояние известно только в виде некоторой интегрируемой функции плотности вероятности. Допустим, известно, что достоверно или с очень большой вероятностью все частицы собраны в фиксированной половине ящика (т.е. $P(G) = 1$ или $P(G) = 1 - \varepsilon$, где ε – некоторое малое число). Поскольку нам не известно состояние как точка в фазовом пространстве, мы не можем точно определить и время возвращения системы в состояние, когда все частицы снова будут собраны в той же половине ящика (можно назвать его “макросостоянием”). Но когда-то такой момент времени наступит, поэтому, если мы будем непрерывно (или в достаточно частые дискретные моменты времени) наблюдать за системой, то с большой вероятностью в некоторый момент мы заметим это возвращение в начальное макросостояние.

Таким образом, может показаться, что рассмотрение функции плотности вероятности не меняет обратимый и возвращаемый характер динамики, пусть и в приближенном смысле, если над системой производить достаточно частые измерения.

4. Однако при внимательном анализе следует заметить, что многократные измерения не являются “безобидными” с точки зрения проблемы необратимости. В работах [6], [7] при анализе известного мысленного эксперимента “демон Максвелла” указывается на то, что измерение можно провести обратимым образом, но термодинамически необратимой является операция приведения прибора после измерения в исходное состояние. Ее можно также назвать операцией стирания предыдущего результата измерения. Если прибор обладает памятью, то все равно к стиранию старых результатов измерений рано или поздно необходимо прибегать, поскольку

память любого прибора конечна. В работах [7], [8] показывается, что в результате стирания одного бита информации в некотором устройстве в нем выделяется теплота в количестве не менее $kT \ln 2$, где k – постоянная Больцмана, T – температура устройства. При этом энтропия устройства увеличивается на величину не менее $k \ln 2$.

Определим количество бит, которое необходимо для запоминания результата измерения и которое, следовательно, необходимо стереть перед следующим измерением для того, чтобы привести прибор в исходное состояние.

Пусть ε – точность, с которой прибор проводит измерение, т.е. $\sigma_{\text{сист}} = \varepsilon$ (для простоты предположим, что случайной погрешности нет). Тогда для запоминания результата необходимо $-\log_2 \varepsilon$ двоичных разрядов (бит). И в самом деле, количество разрядов в цифровых приборах и цена наименьшего деления в аналоговых приборах, как правило, согласованы с погрешностью самого прибора (поэтому, если класс точности прибора неизвестен, то за погрешность принимают единицу наименьшего разряда для цифровых приборов и половину цены наименьшего деления для аналоговых) [9]. Таким образом, при выполнении одного измерения некоторой одномерной физической величины с точностью ε в приборе возрастает энтропия минимум на

$$\Delta S = -k \ln 2 \log_2 \varepsilon = -k \ln \varepsilon. \quad (3)$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При проведении каждого измерения произвольной одномерной наблюдаемой с величиной систематической ошибки ε в измерительном приборе выделяется теплота в количестве не менее $Q = -kT \ln \varepsilon$ и возрастает энтропия на величину не менее $\Delta S = -k \ln \varepsilon$.*

Чем более динамическая система хаотична, тем большую неопределенность имеет время возвращения, тем дольше мы должны проводить частые измерения микро- или макроскопических величин, чтобы обнаружить возвращаемость, тем быстрее возрастает энтропия измерительного прибора. Таким образом, теоретически мы можем наблюдать приближенно обратимую и возвращаемую динамику изучаемой физической системы, но только ценой многократных измерений и связанных с ними выделением тепла и возрастанием энтропии в приборе, т.е. необратимое поведение переносится с изучаемой системы на измерительный прибор, который тоже является физической системой.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00727-а и № 09-01-12161-офи_м) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1). Автор благодарен И. В. Воловичу за полезные замечания.

Список литературы

- [1] И. В. Волович, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер.*, **8/1:67** (2008), 35–55; I. V. Volovich, *Time irreversibility problem and functional formulation of classical mechanics*, 2009, arXiv: 0907.2445.

- [2] В. В. Козлов, *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Современная математика, РХД, М., Ижевск, 2002.
- [3] В. В. Козлов, *Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика*, РХД, М., Ижевск, 2008.
- [4] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 120–137.
- [5] A. S. Trushechkin, I. V. Volovich, *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:4 (2009), 361–367, arXiv:0910.1502.
- [6] L. Szilard, *Z. f. Physik*, **53**:11–12 (1929), 840–856.
- [7] C. H. Bennett, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **21**:12 (1982), 905–940.
- [8] Р. Ландауэр, “Необратимость и выделение тепла в процессе вычислений”, *Квантовый компьютер и квантовые вычисления*. т. 1, 2, ред. В. А. Садовничий, Удмуртский университет, Ижевск, 1999, 9–32.
- [9] Б. Д. Агапьев, В. Н. Белов, Ф. П. Кесманлы, В. В. Козловский, С. И. Марков, *Экспериментальная обработка результатов измерений*, СПбГТУ, СПб., 2001.