Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Грошев, О существовании и единственности классических решений задачи Коши на неглобально гиперболических многообразиях, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 441–446

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:57:22

© 2010 г.

О. В. Грошев*

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ НА НЕГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Задача Коши для волнового уравнения рассматривается на пространстве Мизнера – неглобально гиперболическом многообразии, содержащем замкнутые времениподобные кривые. Доказывается, что существование и единственность классического решения эквивалентны условиям самосогласованности гораздо более строгим, чем конечный набор точечных условий, возникающих для этой задачи на плоскости Минковского с присоединенной ручкой.

Ключевые слова: неглобально гиперболические многообразия, волновое уравнение, задача Коши.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует хорошо развитая теория гиперболических уравнений на глобально гиперболических многообразиях [1], [2]. Глобально гиперболическое многообразие – это ориентируемое по времени лоренцево многообразие (M, g) , которое не имеет замкнутых времениподобных кривых, и множество времениподобных путей между любыми двумя точками которого компактно. В работе [3] доказано, что все глобально гиперболические многообразия диффеоморфны $\mathbb{R}^1 \times \Sigma$, где Σ – поверхность Коши; таким образом, все они имеют тривиальную топологию.

Вместе с тем большое число неглобально гиперболических многообразий представляет общая теория относительности. Эти многообразия являются решениями полевых уравнений Эйнштейна; наиболее известными примерами являются пространства анти-де Ситтера, Геделя и Готта, машина времени Дойча–Полищера и многие другие [4]–[6]. Все эти пространства имеют замкнутые времениподобные кривые, которые с физической точки зрения означают возможность путешествия во времени.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: groshev@mi.ras.ru

Интересным является вопрос построения теории поля на подобных пространствах, в частности вопрос о том, на каких пространствах разрешимо волновое уравнение

$$\square u = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \partial_\beta u) = 0.$$

Из работ Лерэ известно, что на глобально гиперболических многообразиях задача Коши для волнового уравнения разрешима всегда.

Вопрос существования классических решений задачи Коши на неглобально гиперболических многообразиях рассматривался в работах [7]–[10]. В частности, в последней работе доказаны существование и единственность классического решения уравнения Клейна–Гордона на факторе пространства анти-де Ситтера, а также на кротовых норах специального класса.

В работе [11] было доказано, что на плоскости Минковского с присоединенной ручкой (модифицированная машина Дойча–Полицера) классическое решение существует и единственно при выполнении конечного набора точечных условий самосогласованности; кроме того, в ней были приведены примеры, когда полученное решение путешествует во времени, а также затронут вопрос существования обобщенных решений. В работах [12], [13] было доказано, что машину Дойча–Полицера нельзя вложить в асимптотически плоское лоренцево многообразие так, чтобы метрика осталась несингулярной. Эти доказательства остаются верными и для модифицированного пространства.

В настоящей работе мы сравниваем результаты статьи [11] с результатами для волнового уравнения на пространстве Мизнера. Мы доказываем, что существование классического решения на нем эквивалентно таким условиям для начальных данных, которые в точности запрещают путешествия во времени. Отметим, что наша работа также мотивирована изучением возможности создания кротовых нор и неглобально гиперболических регионов при столкновении частиц на высоких энергиях [14].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С РУЧКОЙ

Напомним основные результаты, полученные для плоскости с ручкой. Конструкция плоскости с ручкой следующая.

На полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\}$ рассмотрим два вертикальных интервала S_1 и S_2 длины $\ell > 0$:

$$S_i = \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^2 | x = x_i, t_i < t < t_i + \ell\}. \quad (1)$$

Предположим, что

$$0 < x_2 - x_1 < t_2 - t_1 + \ell; \quad (2)$$

таким образом, вектор $I = (x_2 - x_1, t_2 - t_1)$, переводящий S_1 в S_2 , времениподобен.

Склеим стороны отрезков, как показано на рис. 1, а именно склеим “внутренние” стороны разрезов друг с другом и аналогично “внешние” стороны друг с другом. Получившееся многообразие имеет две особые точки – концы отрезков.

Любое гладкое поле, заданное на рассматриваемом многообразии, будет удовлетворять определенным условиям склейки на разрезах S_1 и S_2 . Обратно, если поле

Рис. 1. Плоскость Минковского с двумя разрезами, склеенными определенным образом. Идентификация точек “внешних” и “внутренних” сторон разрезов указана линиями со стрелками.

дифференцируемо в области $\Omega = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$ и удовлетворяет этим условиям склейки, то оно гладко на рассматриваемом многообразии.

Рассмотрим волновое уравнение на этом многообразии:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (3)$$

в Ω с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_x|_{t=0} = \psi, \quad (4)$$

где $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Наложим следующие условия склейки:

$$u(X_{\pm}) = u(X_{\mp} + I), \quad u_x(X_{\pm}) = u_x(X_{\mp} + I), \quad (5)$$

где $X = (x, t) \in S_1$, а

$$u(X_{\pm}) = \lim_{x \rightarrow x_1 \pm 0} u(x, t).$$

Предполагается, что указанные пределы справа и слева существуют.

Введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Классическим решением задачи (3)–(5) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \{t = 0\})$, удовлетворяющая условиям (3)–(5) в предположении, что указанные в условиях (5) пределы справа и слева существуют.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$c_i = x_i - t_i, \quad d_i = x_i + t_i;$$

здесь i может быть равно 1 или 2. Будем обозначать через Φ следующий (упорядоченный) набор функций:

$$\Phi(x) = \left(\varphi^{(i)}(x), i = 0, 1, 2; \int_a^x \psi(s) ds; \psi^{(j)}(x), j = 0, 1 \right). \quad (6)$$

Обозначим через Ψ вектор

$$\Psi = (\Phi(c_1 - \ell), \Phi(c_2 - \ell), \Phi(c_1), \Phi(c_2), \Phi(d_1 + \ell), \Phi(d_2 + \ell), \Phi(d_1), \Phi(d_2)). \quad (7)$$

Была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для существования классического решения задачи (3)–(5) необходимым и достаточным является выполнение равенства*

$$L\Psi = 0, \quad (8)$$

где L – некоторая специальная матрица ранга 10.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку условие (8) представляет собой конечное число условий для значений в точках, пространство функций, удовлетворяющих им, достаточно обширно. В частности, в работе [11] были построены примеры решений, которые проходят по региону с нарушенной глобальной гиперболичностью, и, таким образом, “путешествуют во времени”.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА МИЗНЕРА

Пространство Мизнера – это хорошо известное в общей теории относительности плоское двумерное пространство-время. Оно является фактором $\mathbb{R}^{1,1}/\langle \mathcal{B} \rangle$ пространства Минковского по свободной группе, порожденной бустом $\mathcal{B}$. Проще всего это многообразие представить в системе координат (ξ, η) , где

$$\xi = -(x + t), \quad \eta = x - t.$$

В этих координатах буст $\mathcal{B}$ задается следующим образом:

$$\mathcal{B}: (\xi, \eta) \mapsto (B\xi, B^{-1}\eta).$$

Он сохраняет лоренцеву метрику $ds^2 = -d\xi d\eta$. В качестве фундаментальной области действия $\mathcal{B}$ можно взять полосу $\{\xi_0 < \xi < B\xi_0\}$. Само пространство Мизнера получается (см. рис. 2) после отождествления границ фундаментальной области с помощью соотношения

$$(\xi_0, \eta) \sim (B\xi_0, B^{-1}\eta).$$

На получившемся многообразии существует единственная замкнутая нулевая геодезическая $\eta = 0$. Она делит пространство на два региона – “прошлое” и “будущее”. В прошлом существуют глобальные поверхности Коши и не существует замкнутых времениподобных кривых, тогда как в будущем через каждую точку проходит замкнутая времениподобная кривая.

Сформулируем задачу Коши для волнового уравнения на пространстве Мизнера. Волновое уравнение $\square u = 0$ в координатах (ξ, η) имеет вид

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad (9)$$

в $\Theta = \{\xi_0 < \xi < B\xi_0, t > 0\}$. Начальные данные мы задаем на поверхности Коши, которая лежит в прошлом и поэтому является пространственноподобной. В качестве такой поверхности можно взять $\Sigma = \{t = 0\}$. Итак, задача Коши состоит в том, что у нас заданы u и ∇u на Σ :

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad \nabla u|_{t=0} = \psi. \quad (10)$$

Рис. 2. Пространство Мизнера получается после отождествления границ фундаментальной области (белая). После отождествления отрезки, отмеченные на фундаментальной области, превращаются в окружности.

Кроме того, нам нужно задать условия склейки u на границах фундаментальной области. Сделаем это следующим образом:

$$u(\xi_0, \eta) = u(B\xi_0, B^{-1}\eta), \quad (11)$$

$$\nabla u(\xi_0, \eta) = B\nabla u(B\xi_0, B^{-1}\eta). \quad (12)$$

Нас интересуют классические решения этой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Классическим решением задачи (9)–(12) называется функция $u \in C^2(\Theta) \cap C^1(\bar{\Theta})$, удовлетворяющая условиям (9)–(12).

Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для существования классического решения задачи (9)–(12) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\varphi(\xi_0) = \varphi(B\xi_0), \quad \psi(\xi_0) = B\psi(B\xi_0), \quad \varphi' = \psi. \quad (13)$$

При этом классическое решение единственно и имеет вид волны, идущей влево: $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция u в области Θ представляется в виде суммы:

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta). \quad (14)$$

Запишем для нее условие (11):

$$f(\xi_0) + g(\eta) = f(B\xi_0) + g(B^{-1}\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^1. \quad (15)$$

Подставив $\eta = 0$, получим

$$f(\xi_0) = f(B\xi_0), \quad (16)$$

откуда, возвращаясь к условию (15), получаем

$$g(\eta) = g(B^{-1}\eta). \quad (17)$$

Это означает, что мы можем задать функцию g на полуинтервале $[\eta_0, B\eta_0)$, где $\eta_0 > 0$, и продлить ее по формуле (17) на весь луч $\eta > 0$. Если $g \neq \text{const}$, то при

подходе к $\eta = 0$ колебания функции g будут учащаться, что приведет к разрыву. Следовательно, $g = \text{const}$, а это равносильно условию $\varphi' = \psi$.

Из этого следует, что $f = \varphi$, и условие (16) есть первое условие в (13). Подставив сумму (14) в условие склеивания градиента, получаем $f'(\xi_0) = Bf'(B\xi_0)$. Таким образом, условия (13) являются необходимыми. Они являются достаточными, поскольку все рассуждения можно провести в обратном направлении. Единственность решения следует из того, что решение с нулевыми начальными данными будет нулевым. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Качественно решения такого вида сильно отличаются от решений из раздела 2. А именно такие решения не путешествуют во времени, поскольку имеют только левую моду, которая не идет вдоль замкнутых времениподобных кривых.

Благодарности. Автор благодарен И. В. Воловичу и участникам семинара НОЦ МИАН за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (гранты НШ-7675.2010.1 и НШ-8784.2010.1) и РФФИ (грант № 09-01-12161-офи_м).

Список литературы

- [1] I. Petrowsky, *Матем. сб.*, **2(44)**:5 (1937), 815–870.
- [2] Ж. Лере, *Гиперболические дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1984.
- [3] A. N. Bernal, M. Sánchez, *Comm. Math. Phys.*, **257**:1 (2005), 43–50.
- [4] С. Хокинг, Дж. Эллис, *Крупномасштабная структура пространства-времени*, Мир, М., 1977.
- [5] H. D. Politzer, *Phys. Rev. D*, **49**:8 (1994), 3981–3989, arXiv: [gr-qc/9310027](#).
- [6] J. R. Gott III, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:9 (1991), 1126–1129.
- [7] J. Friedman, M. S. Morris, I. D. Novikov, F. Echeverria, G. Klinkhammer, K. S. Thorne, U. Yurtsever, *Phys. Rev. D*, **42**:6 (1990), 1915–1930.
- [8] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Т. Ишиватари, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 334–344, arXiv: [0903.0567](#).
- [9] J. L. Friedman, “The Cauchy problem on spacetimes that are not globally hyperbolic”, *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields*, eds. P. T. Chruściel, H. Friedrich, Birkhäuser, Basel, 2004, 331–346, arXiv: [gr-qc/0401004](#).
- [10] J. L. Friedman, M. S. Morris, *Comm. Math. Phys.*, **186**:3 (1997), 495–529, arXiv: [gr-qc/9411033](#).
- [11] И. В. Волович, О. В. Грошев, Н. А. Гусев, Э. А. Курьянович, “О решениях волнового уравнения на неглобально гиперболическом многообразии”, *Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа*, Сб. статей, Тр. МИАН, **265**, ред. И. В. Волович, Е. Ф. Мищенко, 2009, 273–287, arXiv: [0903.0741](#).
- [12] A. Chamblin, G. W. Gibbons, A. R. Steif, *Phys. Rev. D*, **50**:4 (1994), R2353–R2355, arXiv: [gr-qc/9405001](#).
- [13] U. Yurtsever, *Gen. Rel. Grav.*, **27**:6 (1995), 691–693, arXiv: [gr-qc/9409040](#).
- [14] I. Ya. Aref’eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **5**:4 (2008), 641–651, arXiv: [0710.2696](#).