Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Ефремова, О пространстве C^1 -гладких косых произведений отображений интервала, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 447–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 10:58:24

© 2010 г.

Л. С. Ефремова*

О ПРОСТРАНСТВЕ C^1 -ГЛАДКИХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ИНТЕРВАЛА

С использованием понятий Ω -функции и функций, подходящих к Ω -функции, показано, что пространство C^1 -гладких косых произведений отображений интервала, фактор каждого из которых Ω -устойчив в пространстве C^1 -гладких отображений замкнутого промежутка в себя и имеет тип $> 2^\infty$ (т. е. содержит периодическую орбиту с периодом, отличным от степени двойки), можно представить в виде объединения четырех непустых попарно непересекающихся подпространств. Приведены примеры отображений, принадлежащих каждому из выделенных подпространств.

Ключевые слова: косое произведение, фактор-отображение, Ω -функция, подходящие функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Конструкция косых произведений впервые, по-видимому, появилась в статье [1] (хотя термин “косое произведение” введен позже в работе [2]). Детальный анализ идей Н. Н. Боголюбова по теории динамических систем содержится в обзоре [3]. В настоящее время существует обширная библиография, посвященная различным (в основном, эргодическим) аспектам динамики косых произведений. Настоящая статья является продолжением работ автора [4]–[8] по качественной теории динамических систем, принадлежащих классу косых произведений в плоскости.

Пусть $I = I_1 \times I_2$ – замкнутый прямоугольник на плоскости (I_1, I_2 – отрезки), а $F: I \rightarrow I$ – косое произведение отображений интервала, т. е. отображение вида

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y)), \quad (x, y) \in I, \quad (1)$$

где $f: I_1 \rightarrow I_1$ – фактор-отображение (фактор), $g_x: I_2 \rightarrow I_2$ – отображение в слое над произвольной точкой $x \in I_1$, $g_x(y) = g(x, y)$. Из соотношения (1) следует, что для произвольного натурального числа n и каждой точки $(x, y) \in I$ справедливо равенство $F^n(x, y) = (f^n(x), g_{x,n}(y))$, где $g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ g_{f(x)} \circ g_x$. Пространство всех непрерывных (C^1 -гладких) косых произведений с C^0 -нормой (C^1 -нормой) обозначим через $T^0(I)$ (через $T^1(I)$).

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (научно-исследовательский университет), Нижний Новгород, Россия. E-mail: lefunn@gmail.com

При изучении свойств произвольной динамической системы с компактным фазовым пространством важную роль играет ее множество неблуждающих точек (неблуждающее множество)¹⁾. Для описания структуры неблуждающего множества $\Omega(F)$ произвольного отображения $F \in T^0(I)$ в работе [4] было введено понятие Ω -функции.

Обозначим через 2^{I_2} топологическое пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ω -функцией отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\zeta^F: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ выполнено равенство $\zeta^F(x) = (\Omega(F))(x)$, где $\Omega(f)$ – неблуждающее множество фактор-отображения f , $(\Omega(F))(x) = \{y \in I_2: (x, y) \in \Omega(F)\}$ – срез $\Omega(F)$ вертикальным слоем над точкой x .

В силу равенства $\Omega(f) = \text{pr}_1(\Omega(F))$ (см. работу [5]), где $\text{pr}_1: I \rightarrow I_1$ – естественная проекция, Ω -функция отображения $F \in T^0(I)$ корректно определена. Важно заметить также, что график Ω -функции в фазовом пространстве I совпадает с неблуждающим множеством $\Omega(F)$ косоугольного произведения F . В отличие от многозначной функции, сопоставляющей произвольной динамической системе с компактным фазовым пространством ее неблуждающее множество [11], Ω -функция косоугольного произведения отображений интервала определена на неблуждающем множестве фактор-отображения, а ее значение в произвольной точке $x \in \Omega(f)$ совпадает со срезом множества $\Omega(F)$ слоем над x . Отметим статью [12], в которой введена многозначная функция, положенная в основу определения странного нехаотического аттрактора косоугольного произведения над иррациональным поворотом окружности на двумерном цилиндре с монотонными (в широком, но не строгом смысле) отображениями в слоях.

Из замкнутости неблуждающего множества $\Omega(F)$ и определения 1, компактности отрезка I_2 и хаусдорфовости отрезка I_1 следует, что Ω -функция отображения $F \in T^0(I)$ полунепрерывна сверху [10]. Данное свойство Ω -функции содержит информацию о топологической структуре неблуждающего множества косоугольного произведения. Так, множество точек разрыва Ω -функции, если оно непусто, есть граничное на компакте $\Omega(f)$ множество первой категории в смысле Бэра, а дополнительное к нему множество точек непрерывности Ω -функции (непустое для любого отображения $F \in T^0(I)$) есть всюду плотное в $\Omega(f)$ множество второй категории в смысле Бэра [10].

Обозначим через $T_*^1(I)$ подпространство пространства $T^1(I)$, состоящее из отображений с Ω -устойчивым²⁾ в C^1 -норме фактор-отображением.

Приведем наиболее важные свойства Ω -устойчивых отображений отрезка I_1 (множество таких отображений обозначим через $C_\omega^1(I_1)$), вытекающие из результатов статьи [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f \in C_\omega^1(I_1)$, то:

1) либо f есть отображение типа $\prec 2^\infty$ (т.е. множество (наименьших) периодов периодических точек f совпадает с множеством $\{2^i\}_{i=0}^{i=\mu} = \{1, 2, \dots, 2^\mu\}$ при

¹⁾Необходимые определения имеются, например, в монографии [9].

²⁾Анализ особенностей определения Ω -устойчивости отображений на многообразиях с краем содержится, например, в работе [13].

некотором $0 \leq \mu < +\infty$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;

2) либо f есть отображение типа $\succ 2^\infty$ (т.е. существует f -периодическая точка x , $x \in \text{Per}(f)$, периода $n(x) \notin \{2^i\}_{i \geq 0}$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ есть объединение конечного числа гиперболических периодических точек и конечного числа локально максимальных квазиминимальных гиперболических (совершенных, нигде не плотных) множеств.

Множество $C_\omega^1(I_1)$ открыто и всюду плотно в $C^1(I_1)$.

Из этого предложения следует, что множество $T_*^1(I)$ открыто и плотно в $T^1(I)$.

Структура неблуждающего множества косых произведений из $T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе (множество таких отображений содержит собственное подмножество, состоящее из всех тех косых произведений из $T_*^1(I)$, фактор-отображение каждого из которых имеет тип $\prec 2^\infty$) исследована в работах [5], [6]. В настоящей работе рассматриваются те косые произведения из $T_*^1(I)$, фактор-отображение каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$.

В силу предложения для любых $F \in T_*^1(I)$ (с фактором произвольного типа) и $n > 1$ верно равенство $\Omega(f) = \Omega(f^n)$. Тогда корректно определены многозначные функции $\eta_n: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ такие, что при каждом $x \in \Omega(f)$ справедливо равенство $\eta_n(x) = \Omega(g_{x,n})$, где $\Omega(g_{x,n})$ – неблуждающее множество отображения $g_{x,n}$, $n \geq 1$ (см. например, работу [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подходящими многозначными функциями к Ω -функции³⁾ отображения $F \in T_*^1(I)$ будем называть функции $\bar{\eta}_n: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$, $n \geq 1$, графиками которых в I служат замыкания графиков функций η_n ; при этом $\bar{\eta}_n(x) = (\bar{\eta}_n)(x)$ для каждого $x \in \Omega(f)$. Здесь $(\bar{\eta}_n)(x)$ – срез графика функции $\bar{\eta}_n$ слоем над точкой x .

Дадим динамическую интерпретацию многозначных функций $\bar{\eta}_n$, $n \geq 1$. Сопоставим отображению F последовательность косых произведений $F_n^* \in T^0(I)$, $n \geq 1$, где $F_n^*(x, y) = (f^*(x), g_{x,n}(y))$ и $f^*: I_1 \rightarrow I_1$ – строго возрастающее расширение тождественного на $\Omega(f)$ отображения на весь отрезок I_1 такое, что $f^*(x) \neq x$ в том и только том случае, когда $x \notin \Omega(f)$. Тогда F_n^* имеет замкнутое множество периодических точек в базе, и $\bar{\eta}_n = \zeta^{F_n^*}$, как показано в работах [5], [6].

2. КЛАССЫ ОТОБРАЖЕНИЙ ИЗ $T_*^1(I)$ С ФАКТОРОМ ТИПА $\succ 2^\infty$

2.1. Рассмотрим произвольное отображение $F \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$. Тогда в силу предложения из раздела 1 совершенная часть $\Omega_p(f)$ неблуждающего множества $\Omega(f)$ фактора f представима в виде конечного объединения попарно не пересекающихся f -локально максимальных квазиминимальных множеств. Обозначим через $\tau(f|_{K(f)})$ множество (наименьших) периодов периодических точек сужения $f|_{K(f)}$, где $K(f)$ – произвольное локально максимальное квазиминимальное множество фактор-отображения f .

Существуют натуральные числа $m_0 = m_0(K(f))$, $i_0 = i_0(K(f))$ и конечное подмножество $N_* = N_*(K(f))$ множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел (возможно, пустое) такие, что $\tau(f|_{K(f)}) = \{m_0 i\}_{i \geq i_0} \cup N_*$ (см., например, статью [15]). Нам потребуются

³⁾Смысл термина “подходящие многозначные функции”, предложенного по аналогии с термином “подходящие дроби” в теории цепных дробей, проясняет приведенная ниже теорема 1.

натуральные числа

$$\begin{aligned} m_* &= \text{НОК}_{K(f) \subset \Omega_p(f)} \{m_0(K(f))\}, \\ n_* &= \text{НОК}_{K(f) \subset \Omega_p(f)} \{n \in N_*(K(f))\}, \\ i_* &= \max_{K(f) \subset \Omega_p(f)} \{i_0(K(f))\}, \end{aligned}$$

где НОК – наименьшее общее кратное конечного множества натуральных чисел⁴⁾.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что отображение $F \in T_*^1(I)$ с фактор-отображением типа $\succ 2^\infty$ удовлетворяет условию **Н** (сильному условию **Н**), если для последовательности натуральных чисел $\{l_i\}_{i \geq i_*}$, где $l_i = m_* n_*(2i+3)!$, многозначные функции $\bar{\eta}_{l_i}$ (функции η_{l_i}) непрерывны для всех $i \geq i^*$ при некотором $i^* \geq i_*$.

Заметим, что последовательность $\{l_i\}_{i \geq i_*}$ выбрана так, чтобы, во-первых, для любого локально максимального квазиминимального множества $K(f) \subset \Omega_p(f)$ натуральное число l_i являлось элементом множества $\tau(f|_{K(f)})$ при любом $i \geq i_*$; во-вторых, чтобы некоторая последовательность времен возвращения траектории любой устойчивой по Пуассону (в том числе и периодической) точки множества $K(f)$ в произвольную окрестность этой точки содержалась в множестве $\{l_i\}_{i \geq i_*}$. Заметим также, что в силу предложения из раздела 1 в рассматриваемом случае $\Omega(f)$ представимо в виде объединения непустой совершенной части $\Omega_p(f)$ и непустой разреженной части, состоящей из конечного числа точек, поэтому непрерывность функций $\bar{\eta}_{l_i}$ или функций η_{l_i} при всех $i \geq i^*$ равносильна непрерывности их сужений на $\Omega_p(f)$.

Важное множество отображений, удовлетворяющих сильному условию **Н**, составляют Ω -устойчивые (относительно C^1 -возмущений класса косых произведений) отображения из $T_*^1(I)$, фактор каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$ (см. работы [7], [8]). Отметим, что Ω -функция произвольного отображения такого рода непрерывна [8]. В указанных работах также построено отображение $F_1 \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$, удовлетворяющее сильному условию **Н** и имеющее Ω -функцию, разрывную в каждой периодической точке множества $\Omega_p(f)$ (множество таких точек всюду плотно в $\Omega_p(f)$ и имеет тип F_σ) и непрерывную в каждой устойчивой по Пуассону непериодической точке (множество таких точек всюду плотно в $\Omega_p(f)$ и имеет тип G_δ).

Сформулируем общие результаты о структуре неблуждающего множества отображений, удовлетворяющих сильному условию **Н**.

ТЕОРЕМА 1 [10]. Пусть $F \in T_*^1(I)$ с фактор-отображением типа $\succ 2^\infty$ удовлетворяет сильному условию **Н**. Тогда существует топологический предел⁵⁾

$$\zeta_{|\Omega_p(f)}^F = \lim_{i \rightarrow +\infty} \eta_{l_i|_{\Omega_p(f)}}$$

последовательности множеств $\eta_{l_i|_{\Omega_p(f)}}$. Здесь множество $\zeta_{|\Omega_p(f)}^F$ (множество $\eta_{l_i|_{\Omega_p(f)}}$) – график сужения Ω -функции (функции η_{l_i}) отображения F на множество $\Omega_p(f)$.

⁴⁾ Условимся считать $n_* = 1$, если $N_*(K(f)) = \emptyset$ для любого $K(f) \subset \Omega_p(f)$.

⁵⁾ Определение топологического предела см., например, в [10].

Прямым следствием данной теоремы, предложения из раздела 1 и результатов статей [5], [6] является

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F \in T_*^1(I)$ имеет фактор-отображение типа $\succ 2^\infty$ и удовлетворяет сильному условию **Н**. Тогда неблуждающее множество $\Omega(F)$ отображения F представимо в виде

$$\Omega(F) = \overline{\bigcup_{x \in \text{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(g_{x, n(x)})},$$

где $n(x)$ – (наименьший) период точки $x \in \text{Per}(f)$, черта над множеством обозначает замыкание.

Утверждение данной теоремы показывает, что, как и в случае отображений из $T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе, структура неблуждающего множества косых произведений из $T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$, удовлетворяющих сильному условию **Н**, определяется отображениями в слоях над периодическими точками фактора (ср. с работами [5], [6]).

2.2. Обратим внимание на то, что косое произведение $F \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$, удовлетворяющее сильному условию **Н**, в силу замкнутости графиков непрерывных отображений $\eta_i, i \geq i^*$, на компакте $\Omega(f)$ удовлетворяет также и условию **Н**. Покажем, что в то же время существует отображение $F_2 \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$, удовлетворяющее условию **Н**, но не удовлетворяющее сильному условию **Н**.

ПРИМЕР 1. Пусть отображение $F_2 \in T_*^1([-1/20, 1] \times [-1, 1 + \varepsilon])$, $\varepsilon > 0$, имеет фактор $f(x)$, определенный на отрезке $[-1/20, 1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 80x^4 - x^2, & \text{если } x \in [-1/20, 1/4); \\ 9(x - 1/4)(3/4 - x) + 1/4, & \text{если } x \in [1/4, 3/4); \\ 80(1 - x^4) - (1 - x^2), & \text{если } x \in [3/4, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда $\Omega(f) = \{0\} \cup K(f)$, где $K(f)$ – единственное f -локально максимальное квазимиимальное множество, $K(f) = \Omega_p(f) \subset [1/4, 3/4]$ и $\tau(f|_{K(f)}) = \mathbb{N}$.

Для построения отображений в слоях введем функцию $\psi \in C^1([-1, 1])$ вида

$$\psi(y) = \begin{cases} -1, & \text{если } y \in [-1, -1/2); \\ 4y(1 - |y|), & \text{если } y \in [-1/2, 1/2); \\ 12(y - 1/4)(3/4 - y) + 1/4, & \text{если } y \in [1/2, 3/4); \\ 128(1 - y)^4 - 4(1 - y)^2, & \text{если } y \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Для определения отображений в слоях косого произведения F_2 нам потребуются следующие свойства единственного локально максимального квазимиимального множества $K(f)$ фактор-отображения f .

1. Существуют непересекающиеся отрезки первого ранга $\Delta_0 = [1/4, a_1]$ и $\Delta_1 = [b_1, 3/4]$ такие, что $f(\Delta_{k_1}) = [1/4, 3/4]$, $k_1 \in \{0, 1\}$.

2. Для каждого отрезка произвольного ранга $r \geq 2$ имеет место включение $\Delta_{k_1 \dots k_{r-1} k_r} \subset \Delta_{k_1 \dots k_{r-1}}$, где $k_1, \dots, k_r \in \{0, 1\}$ и $f(\Delta_{k_1 \dots k_r}) = \Delta_{k_2 \dots k_r}$.

3. Множество $K(f)$ имеет вид

$$K(f) = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \bigcup_{k_1, \dots, k_r \in \{0, 1\}} \Delta_{k_1 \dots k_r},$$

причем $\lim_{r \rightarrow +\infty} l(\Delta_{k_1 \dots k_r}) = 0$ для любого набора $k_1, \dots, k_r \in \{0, 1\}$; здесь $l(\cdot)$ – длина отрезка.

4. Для любых $\delta > 0$ и $r \geq 1$ таких, что $l(\Delta_{k_1 \dots k_r}) < \delta$, $k_1, \dots, k_r \in \{0, 1\}$, существует периодическая орбита такая, что произвольный отрезок $\Delta_{k_1 \dots k_r}$ r -го ранга содержит по крайней мере одну ее точку⁶⁾.

Для f -неподвижной точки $x = 1/4$ выполнено $\{1/4\} = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_r}$. Положим

$$\lambda_r = \max_{k_1, \dots, k_r \in \{0, 1\}} \{l(\Delta_{k_1 \dots k_r})\}, \quad r \geq 1.$$

Тогда $\lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda_r = 0$. Обозначим через $\text{Per}'(f)$ всюду плотное в $\text{Per}(f) \cap K(f)$ множество всех f -периодических орбит, аппроксимирующих $K(f)$ с точностью λ_r при каждом $r \geq 1$. Тогда самая левая точка x_r^0 произвольной периодической орбиты из $\text{Per}'(f)$, аппроксимирующей множество $K(f)$ с точностью λ_r , $r \geq 1$, содержится в $\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_r}$. Поэтому $\lim_{r \rightarrow +\infty} x_r^0 = 1/4$ и $E = \{x_r^0\}_{r \geq 1} \cup \{1/4\}$ – замкнутое множество.

Следовательно, корректно определена “шапочка Урысона” $h \in C^1([-1/20, 1])$ такая, что $h(x) = 0$ при $x \in E$ и $0 < h(x) < 1$ при $x \in [-1/20, 1] \setminus E$.

Определим семейство отображений в слоях косого произведения F_2 , полагая

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если } (x, y) \in [-1/20, 1] \times [-1, 1); \\ h(x)(y-1)^2, & \text{если } (x, y) \in [-1/20, 1] \times [1, 1+\varepsilon]. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что при любых $x' \in \text{Per}'(f) \cup \{1/4\}$ и l_i , $i \geq 0$, кратных $n(x')$, справедливо $\Omega(g_{x', l_i}) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \subset [-1, 3/4]$, а для любой устойчивой по Пуассону непериодической точки x (целая траектория такой точки содержится в $K(f) \setminus E$) также имеет место равенство $\Omega(g_{x, l_i}) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \cup \{1\}$. Поэтому при любом $i \geq 0$ функции η_i разрывны в f -неподвижной точке $x = 1/4$, а подходящие функции $\bar{\eta}_{l_i}$ непрерывны на $K(f)$, так как $(\bar{\eta}_{l_i})(x) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \cup \{1\}$ при любом $x \in K(f)$. Следовательно, отображение F_2 удовлетворяет условию **Н**, но не удовлетворяет сильному условию **Н**.

2.3. Покажем, что существует косое произведение $F_3 \in T_*^1([-1/20, 1] \times [0, 1])$ с фактор-отображением типа $\succ 2^\infty$, непрерывной Ω -функцией и последовательностью разрывных подходящих функций $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 0}$.

⁶⁾ В этом случае мы говорим, что периодическая орбита с указанным свойством аппроксимирует множество $K(f)$ с точностью δ .

ПРИМЕР 2. Пусть фактор f отображения $F_3 \in T_*^1([-1/20, 1] \times [0, 1])$ определен равенством (2). Заметим, что из свойств 1–3 множества $K(f)$ следует еще одно свойство.

5. Множество $\bigcup_{j=1}^{+\infty} (f|_{K(f)})^{-j}(x)$ плотно в $K(f)$ для любой точки $x \in K(f)$; здесь $(f|_{K(f)})^{-j}(\cdot) - j$ -й полный прообраз точки относительно отображения $f|_{K(f)}$.

Пусть $x' \in K(f)$ – произвольная устойчивая по Пуассону точка f с всюду плотной в $K(f)$ траекторией. Возьмем произвольно и зафиксируем точку $x_* \in (f|_{K(f)})^{-1}(x')$. Применяя свойство 5 к прообразам x_* , укажем последовательность точек $\{x_*^{-j}\}_{j \geq 1}$, сходящуюся к x_* , такую что $x_*^{-j} \in (f|_{K(f)})^{-j}(x_*)$. Тогда $E_* = \{x_*^{-j}\}_{j \geq 0}$ – замкнутое множество; здесь $x_*^{-0} = x_*$. Следовательно, корректно определена “шапочка Урысона” $h_* \in C^1([-1/20, 1])$, где $h_*(x) = 0$ при $x \in E_*$ и $0 < h_*(x) < 1$ при $x \in [-1/20, 1] \setminus E_*$.

Семейство отображений в слоях для F_3 определим равенством $g_x(y) = (1 - h_*(x))y$. Отсюда следует, что при всех $(x, y) \in [-1/20, 1] \times (0, 1]$

$$y \geq g_x(y) \geq g_{x,2}(y) \geq \dots \geq g_{x,n}(y) \geq \dots,$$

и для любого $x \in [-1/20, 1]$ (в том числе и для $x \in E_*$) найдется целое число $n_0 = n_0(x) \geq 0$ такое, что для всех $n > n_0$ верно строгое неравенство $g_{x,n-1}(y) > g_{x,n}(y)$ (здесь $g_{x,0}(y) = y$). Таким образом, существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{x,n}(y) = y_*(x, y) \geq 0$, и в силу равенства $\omega_f(x) = \text{pr}_1(\omega_{F_3}((x, y)))$, справедливого для ω -предельных множеств f -траектории точки x и F_3 -траектории точки (x, y) [5], имеет место соотношение $\omega_{F_3}((x, y)) = \omega_f(x) \times \{y_*(x, y)\}$.

Заметим, что $y_*(x, y) \equiv 0$ на $[-1/20, 1] \times (0, 1]$. Действительно, предположим, что $y_*(x', y') > 0$ для некоторой точки $(x', y') \in [-1/20, 1] \times (0, 1]$. Тогда в силу инвариантности $\omega_{F_3}((x', y'))$ для любых $x \in \omega_f(x')$ и $n \geq 1$ справедливо равенство $g_{x,n}(y_*(x', y')) = y_*(x', y')$. Последнее невозможно, так как при некотором $n_0 \geq 0$ для всех $n > n_0$ верно строгое неравенство $g_{x,n-1}(y_*(x', y')) > g_{x,n}(y_*(x', y'))$. Следовательно, $y_*(x, y) \equiv 0$ на $[-1/20, 1] \times (0, 1]$, и $\Omega(F_3) = \Omega(f) \times \{0\}$. Тогда Ω -функция ζ^{F_3} непрерывна, так как $\zeta^{F_3}(x) = \{0\}$ при любом $x \in \Omega(f)$. В то же время при любом $l \geq 1$ подходящая функция $\bar{\eta}_l$ разрывна в каждой точке $x_*^{-j} \in E_*$ при $j \geq l - 1$, так как $\bar{\eta}_l(x_*^{-j}) = [0, 1]$, но $\bar{\eta}_l(x) = \{0\}$ при $x \notin \{x_*^{-j}\}_{j \geq l-1}$.

2.4. Примеры отображений из $T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$, разрывной Ω -функцией и последовательностью разрывных подходящих функций $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 0}$ содержатся в работе [4].

Итак, пространство отображений из $T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$ представимо в виде объединения четырех непустых, попарно непересекающихся подпространств: подпространства отображений, удовлетворяющих сильному условию **H**; подпространства отображений, удовлетворяющих условию **H**, но не удовлетворяющих сильному условию **H** (последовательности подходящих функций отображений из указанных подпространств могут содержать конечное число разрывных функций); подпространства отображений с непрерывной Ω -функцией и последовательностью подходящих функций $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 0}$, содержащей счетное число разрывных функций; подпространства отображений с разрывной Ω -функцией и последовательностью подходящих функций $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 0}$, содержащей счетное число разрывных функций.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009–2011 гг.) Федерального агентства по образованию (проект НК–13/9).

Список литературы

- [1] М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, *Записки кафедры математической физики Института будівельної механіки АН УРСР*, **3** (1937), 119–135.
- [2] Н. Anzai, *Osaka Math. J.*, **3**:1 (1951), 83–99.
- [3] Д. В. Аносов, *УМН*, **49**:5(299) (1994), 5–20.
- [4] Л. С. Ефремова, “О понятии Ω -функции косо го произведения отображений интервала”, *Труды международной конференции, посвященной 90-летию Л. С. Понтрягина. т. 6: Динамические системы*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **67**, ред. С. М. Асеев, С. А. Вахрамеев, З. А. Измаилова, ВИНТИ, М., 1999, 129–160.
- [5] Л. С. Ефремова, “О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе”, *Динамические системы и нелинейные явления*, ред. А. Н. Шарковский, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1990, 15–25.
- [6] Л. С. Ефремова, *Изв. вузов. Матем.*, **10** (2006), 19–28.
- [7] L. S. Efremova, *Nonlinear Anal.*, **47**:8 (2001), 5297–5308 .
- [8] Л. С. Ефремова, “Мнозначные функции и динамика косо го произведения интервальных отображений”, *Труды международной конференции “Прогресс в нелинейной динамике”, посвященной 100-летию А. А. Андропова. т. 1: Математические проблемы нелинейной динамики*, ред. Л. М. Лерман, Л. П. Шильников, Ин-т прикладной физики РАН, Нижегородский гос. ун-т, Н. Новгород, 2002, 219–224.
- [9] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [10] К. Куратовский, *Топология. т. 1, 2*, Мир, М., 1966; 1969.
- [11] А. Н. Шарковский, В. А. Добрынский, “Неблуждающие точки динамических систем”, *Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1973, 165–174.
- [12] Т. Н. Jäger, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **27**:2 (2007), 493–510.
- [13] Д. В. Аносов, “Грубые системы”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН, **169**, 1985, 59–93.
- [14] М. В. Якобсон, *Матем. сб.*, **85(127)**:2(6) (1971), 163–188.
- [15] Л. С. Ефремова, *УМН*, **40**:1(241) (1985), 197–198.