Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ж. Сакбаев, Об усреднении квантовых динамических полугрупп, *ТМФ*, 2010, том 164, номер 3, 455–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:58:19

© 2010 г.

В. Ж. Сакбаев*

ОБ УСРЕДНЕНИИ КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

С задачей Коши для уравнения Шредингера с разрывными вырождающимися коэффициентами в рамках метода эллиптической регуляризации связана последовательность регуляризованных задач Коши и соответствующих регуляризованных динамических полугрупп. Расходящаяся последовательность квантовых динамических полугрупп изучается как случайный процесс со значениями в пространстве квантовых состояний, определенный на измеримом пространстве параметров регуляризации с конечно-аддитивной мерой. Математическое ожидание рассматриваемых процессов, определенное интегралом Петтиса, задает семейство усредненных динамических преобразований. Исследовано полугрупповое свойство, свойства инъективности и сюръективности усредненных преобразований. Установлена возможность определения процесса по его математическому ожиданию в два различных момента времени и предложена процедура аппроксимации неизвестного начального состояния решениями конечного множества вариационных задач на компактных множествах.

Ключевые слова: стохастический процесс, конечно-аддитивная мера, квантовое состояние, динамическая полугруппа, наблюдаемость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление вырождения гамильтониана на некотором подмножестве фазового или координатного пространства приводит к некорректности задачи Коши для уравнения эволюции как в классической [1], так и в квантовой [2] механике. Для определения динамики системы с вырожденным гамильтонианом используется метод эллиптической регуляризации вырожденного гамильтониана – динамическое преобразование пространства состояний такой системы определяется как предел последовательности регуляризованных динамических полугрупп, задаваемых регуляризованными гамильтонианами.

Процедурам предельного перехода для последовательностей динамических систем, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром, и усреднения таких систем посвящена работа Боголюбова [3]. В монографии [4] развита

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл.
E-mail: fumi2003@mail.ru

теория усреднения на группах, в том числе банаховых средних. Настоящая работа посвящается применению операции усреднения по конечно-аддитивным мерам к квантовым системам с гамильтонианами, содержащими малый параметр.

Задача Коши для уравнения Шредингера с вырожденным гамильтонианом

$$i \frac{d}{dt} u(t) = \mathbf{L} u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(+0) = u_0, \quad u_0 \in H = L_2(R) \quad (2)$$

(здесь $\mathbf{L}$ – симметрический плотно определенный оператор в пространстве H) изучается методом эллиптической регуляризации. Исследуется последовательность регуляризованных задач Коши с начальным условием (2) для уравнений Шредингера

$$i \frac{d}{dt} u(t) = \mathbf{L}_\varepsilon u(t), \quad t > 0, \quad \varepsilon \in E \equiv (0, 1), \quad (3)$$

где при каждом $\varepsilon \in E$ оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ самосопряжен и равномерно эллиптичен, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательность операторов $\{\mathbf{L}_\varepsilon\}$ аппроксимирует оператор $\mathbf{L}$.

В качестве примера вырожденного симметрического оператора может быть предложен оператор $\mathbf{L}$, заданный на максимальной области определения в пространстве $H = L_2(R)$ дифференциальным выражением второго порядка

$$\mathbf{L}v(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right) + \frac{i}{2} \left(a(x) \frac{\partial}{\partial x} v(x) + \frac{\partial}{\partial x} (a(x)v(x)) \right), \quad (4)$$

где $g = \chi_{\mathbb{R}_-}$ есть характеристическая функция полупрямой $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, а вещественнозначная функция $a = \alpha \chi_{\mathbb{R}_+}$ пропорциональна характеристической функции полупрямой $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Примером регуляризации служит семейство операторов $\mathbf{L}_\varepsilon$, заданных на максимальной области определения в пространстве H дифференциальным выражением вида (4) с функцией $g_\varepsilon = g + \varepsilon$, $\varepsilon \in E$, вместо g (см. работу [5]).

При каждом значении $\varepsilon \in E$ оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ генерирует регуляризованную унитарную полугруппу $\mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t) = e^{-i\mathbf{L}_\varepsilon t}$, $t > 0$, в пространстве H и определяет регуляризованное решение $u_\varepsilon(t, u_0) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t)u_0$. В настоящей работе мы исследуем случай (подобный приведенному в примере после равенства (4)), когда оператор $\mathbf{L}$ является максимальным симметрическим оператором, а оператор $-i\mathbf{L}$ не является генератором сжимающей полугруппы, что в терминах индексов дефекта оператора $\mathbf{L}$ эквивалентно условиям

$$\dim(\text{Ker}(\mathbf{L}^* - i\mathbf{I})) = 0, \quad \dim(\text{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) > 0. \quad (5)$$

В работе [5] доказано, что при выполнении условия (5) оператор $i\mathbf{L}$ генерирует изометрическую полугруппу $\mathbf{U}_{- \mathbf{L}}(t) = e^{i\mathbf{L}t}$, $t > 0$, в пространстве H , и сопряженный оператор $-i\mathbf{L}^*$ генерирует сжимающую полугруппу $\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t) = e^{-i\mathbf{L}^*t}$, $t > 0$, и справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия (5). Тогда при каждом $t > 0$ пространство H допускает ортогональное разложение $H = H_0(t) \oplus H_1(t)$, где $H_0(t) = \overline{\text{Im}(\mathbf{U} - \mathbf{L}(t))}$ и $H_1(t) = \text{Ker}(\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t))$, таким образом, что для любого $u_0 \in H_1(t)$ последовательность регуляризованных решений $\{u_\varepsilon(t, u_0)\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо сходится в H к нулю, а при любом $u_0 \in H_0(t)$ справедливо равенство $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon(t, u_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0\|_H = 0$.

Квантовые состояния. Пусть $B(H)$ есть банахово пространство линейных ограниченных операторов в пространстве H и $B^*(H)$ – его сопряженное. Далее через $\Sigma(H) = S_1(B^*(H)) \cap B_+^*(H)$ обозначается множество квантовых состояний – части единичной сферы пространства $B^*(H)$ (здесь и далее через $S_1(X)$ обозначается единичная сфера в банаховом пространстве X), лежащей в положительном конусе $B_+^*(H)$ функционалов из $B^*(H)$, принимающих неотрицательные значения на положительных операторах из пространства $B(H)$ [6]. Через $\Sigma_n(H)$ обозначим множество нормальных квантовых состояний – функционалов из $\Sigma(H)$, непрерывных не только по норме, но и в сильной операторной топологии. Через $\Sigma_p(H)$ будем обозначать множество чистых квантовых состояний – множество крайних точек пространства $\Sigma_n(H)$, задаваемых проекторами на одномерные подпространства пространства H [6]. Чистое квантовое состояние, отвечающее проектору на единичный вектор $u \in H$, задает на пространстве $B(H)$ линейный непрерывный функционал $\rho_u: \langle \rho_u, \mathbf{A} \rangle = (u, \mathbf{A}u)_H$.

Чтобы проанализировать свойства расходящейся ограниченной последовательности решений $\{u_\varepsilon(t, u_0)\}$, мы рассмотрим соответствующую ей последовательность регуляризованных операторов плотности $\{\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0}), t > 0, \varepsilon \in E, \varepsilon \rightarrow 0\}$, где при каждом $\varepsilon \in E$ функция $\rho_\varepsilon(t, \rho_0): \mathbb{R}_+ \rightarrow B^*(H)$ определена равенством $\langle \rho_\varepsilon(t, \rho_0), \mathbf{A} \rangle = \langle \rho_0, \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(-t)\mathbf{A}\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t) \rangle$. Исследуем также последовательность регуляризованных динамических полугрупп $\{T_\varepsilon(t), t > 0\}_{\varepsilon \in E, \varepsilon \rightarrow 0}$ в пространстве $B^*(H)$, каждая из которых определяется равенством $T_\varepsilon(t)\rho_0 = \rho_\varepsilon(t, \rho_0)$.

В работе [7] установлено, что необходимым и достаточным условием секвенциальной компактности множества значений последовательности $\{\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0})\}$ в $*$ -слабой топологии пространства $B^*(H)$ является включение $u_0 \in H_0(t)$. В случае $u_0 \notin H_0(t)$ определим для каждого оператора $\mathbf{A} \in B(H)$ множество $G_{\mathbf{A}}(t, u_0) = \{r \in \Sigma(H): \langle r, \mathbf{A} \rangle \in Ls_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \rho_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} \rangle\}$, где $Ls_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \rho_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} \rangle$ – множество частичных пределов числовой функции $\langle \rho_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} \rangle$, $\varepsilon \in E$, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Согласно работе [7] множество $\Phi(t, u_0) = \bigcap_{\mathbf{A} \in B(H)} G_{\mathbf{A}}(t, u_0)$ выпукло, замкнуто в $*$ -слабой топологии пространства $B^*(H)$ и удовлетворяет равенству $\langle \Phi(t, u_0), \mathbf{A} \rangle = Ls_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \rho_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} \rangle$ при любом $\mathbf{A} \in B(H)$.

Случайный процесс. Рассмотрим σ -алгебру 2^E всех подмножеств множества параметров регуляризации E и обозначим через $W(E)$ совокупность всех конечно-аддитивных мер, заданных на измеримом пространстве $(E, 2^E)$, неотрицательных, нормированных и удовлетворяющих следующему условию: мера любого множества $A \in 2^E$, замыкание которого не содержит предельную точку $e^* = 0 = \inf E$, равна нулю. Множество $W(E)$ есть непустое выпуклое подмножество в пересечении конуса неотрицательных элементов с единичной сферой в банаховом пространстве $\text{ba}(E, 2^E)$ конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $(E, 2^E)$ [8]. Множество $W(E)$, очевидно, замкнуто в $*$ -слабой топологии пространства $\text{ba}(E)$. Согласно

теореме 33 из работы [8] множество крайних точек $\text{Extr}(W(E))$ множества $W(E)$ представляет собой подмножество $W_0(E)$ двузначных мер $\mu \in W(E)$, принимающих только значения 0 и 1 на σ -алгебре 2^E .

В работе [9] расходящаяся последовательность $\{\rho_\varepsilon(t, u_0)\}$ исследована как случайный процесс: семейство измеримых отображений (параметризованных переменной $t > 0$) измеримого пространства $(E, 2^E)$ с мерой $\mu \in W(E)$ в измеримое пространство – банахово пространство $B^*(H)$ с алгеброй цилиндрических подмножеств $\text{Cyl}_{Y_*}(Y)$, порожденной конечными наборами функционалов из $B(H)$. Каждое семейство отображений $\{\rho_\varepsilon(t, u_0)\}$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{\substack{\mathbf{A} \in B(H), \\ \|\mathbf{A}\|_{B(H)}=1}} |\rho_\varepsilon(t, u_0)(\mathbf{A}) - \rho_{u_0}(\mathbf{A})| = 0$$

при любом $\varepsilon \in E$ (т.е. процесс $\rho_\varepsilon(t, u_0)$ начинается в точке ρ_{u_0} пространства $B^*(H)$). Математическое ожидание случайной величины $\rho_\varepsilon(t, \rho_0)$ при каждом $t > 0$ определяется как интеграл Петтиса $\rho^\mu(t, \rho_0) = \int_E \rho_\varepsilon(t, \rho_0) d\mu$, т.е. линейный непрерывный функционал $\rho^\mu(t, \rho_0)$ на пространстве $B(H)$ задан равенством $\langle \rho^\mu(t, \rho_0), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \rho_0, \mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon(t)}^* \mathbf{A} \mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon(t)} \rangle [10]$.

В работе [9] многозначное отображение $\Phi(t, \rho_{u_0})$ представлено как система непрерывных однозначных ветвей $\Phi(t, \rho_{u_0}) = \bigcup_{\mu \in W(E)} \rho^\mu(t, \rho_{u_0})$. Каждая из ветвей $\rho^\mu(t, \rho_{u_0})$ является математическим ожиданием случайного процесса $\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0})$ на измеримом пространстве с мерой $(E, 2^E, \mu)$. Следовательно, каждой мере $\mu \in W(E)$ сопоставляется однопараметрическое семейство усредненных динамических преобразований $T^\mu(t)$, $t > 0$, пространства $B^*(H)$ таких, что $T^\mu(t)\rho_0 = \rho^\mu(t, \rho_0)$, $\rho_0 \in B^*(H)$. Очевидно, отображение $T^\mu(t)$ определено на пространстве $B^*(H)$ линейно и непрерывно, причем множество квантовых состояний $\Sigma(H)$ отображается им в себя. Нашей целью является изучение свойств однопараметрических семейств динамических преобразований $T^\mu(t)$, $t > 0$, пространства $B^*(H)$ в зависимости от свойств мер $\mu \in W(E)$ – полугруппового свойства, свойств инъективности и сюръективности, продолжающее исследования работы [11].

2. СВОЙСТВА УСРЕДНЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Напомним, что оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет предположению (5). Пусть $t > 0$ и $H_0(t) = \overline{\text{Im}(\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t))}$ и $H_1(t) = \text{Ker}(\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t))$. В работе [11] установлено, что при любом $\mu \in W(E)$ сужение $T^\mu(t)|_{\Sigma(H_0(t))}$ является биективным и задается равенством $T^\mu(t)\rho_0 = e^{-i\mathbf{L}^*t}\rho_0 e^{i\mathbf{L}t}$, $\rho_0 \in \Sigma(H_0(t))$.

Для описания свойств сужения $T^\mu(t)|_{\Sigma(H_1(t))}$ приведем доказанное в работе [11] утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $t > 0$, $\{e_k\}$ – базис пространства $H_1(t)$ и $\{\varepsilon_k\}$ – бесконечно малая последовательность положительных чисел. Тогда каждому числу $m \in \mathbf{N}$ соответствует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_k^m\}$ последовательности $\{\varepsilon_k\}$, что выполнены следующие утверждения:

1) для всех $k, l \in \overline{1, m}$ и любых $i, j \in \mathbf{N}$, $i \neq j$, выполнено неравенство

$$|(\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_k^m}}(t)e_k, \mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_j^m}}(t)e_l)| < 2^{-(i+j+m)}; \quad (6)$$

2) для каждого $q \in \overline{\{1, m\}}$ последовательность $\{\varepsilon_i^q\}$ является подпоследовательностью $\{\varepsilon_i^{q-1}\}$, где $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_i$, $i \in \mathbf{N}$. Кроме того, существует мера $\mu \in W(E)$ такая, что для любого $m \in \mathbf{N}$ выполнено равенство $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^m) = 1$.

Для каждого $t > 0$ и выбранного базиса в пространстве $H_1(t)$ обозначим через $\mathcal{M}(t)$ множество мер, удовлетворяющих условию леммы 1. Тогда из леммы 1 и результатов работы [11] вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t > 0$ и $\mu \in \mathcal{M}(t)$. Тогда образом выпуклого множества $\Sigma(H_1(t))$ пространства $B^*(H)$ при отображении $T^\mu(t)$ является выпуклое множество $T_t^\mu(\Sigma(H_1(t)))$ пространства $B(H)^*$. Образ множества $\Sigma_p(H_1(t))$ крайних точек множества $\Sigma_n(H_1(t))$ совпадает с множеством крайних точек образа $T^\mu(t)(\Sigma_n(H_1(t)))$:

$$T^\mu(t)(\text{Extr}(\Sigma_n(H_1(t)))) = \text{Extr}(T^\mu(t)(\Sigma_n(H_1(t)))).$$

Существует обратное к $T^\mu(t)|_{\Sigma_p(H_1(t))}$ отображение $\Lambda^\mu(t)$.

Наблюдаемость случайного процесса. В работе [11] исследуется вопрос об определении начального состояния ρ_0 процесса $\rho_\varepsilon(t, \rho_0)$ на измеримом пространстве $(E, 2^E, \mu)$ с мерой $\mu \in \mathcal{M}(t)$ по набору значений его математического ожидания $\rho^\mu(t, \rho_0)$ на различных подмножествах алгебры $B(H)$.

Пусть $\{e_j^0\}$ и $\{e_j^1\}$ – ортонормированные базисы в подпространствах $H_0(t)$ и $H_1(t)$ соответственно, а $\mu \in \mathcal{M}(t)$. Пусть $H_{0,1}^m(t)$ есть m -мерное подпространство в пространстве $H_{0,1}(t)$, натянутое на первые m базисных векторов. Для каждого $v_0 \in H_0^m(t)$ определим ортогональный проектор $\mathbf{P}_{\mathbf{U}_{L^*}(t)v_0}$ (здесь и далее через $\mathbf{P}_u$ обозначается оператор ортогонального проектирования в пространстве H на одномерную линейную оболочку вектора u), а для каждого вектора $v_1 \in H_1^m(t)$ определим оператор $\mathbf{Q}_m(v_1)$ как предел (существующий в силу (6)) в сильной операторной топологии частичных сумм операторного ряда

$$\mathbf{Q}_m(v_1) = \sum_{\varepsilon_k^m \in E^m} \mathbf{P}_{\mathbf{U}_{L^*}(t)v_1}. \quad (7)$$

Пользуясь попарной почти ортогональностью в смысле (6) членов ряда (7), можно показать, что для любого $m \in \mathbf{N}$ функция $\mathbf{Q}_m(\cdot)$ является непрерывным отображением m -мерной сферы $S_1(H_1^m(t))$ в банахово пространство $B(H)$ (напомним, что $S_1(H)$ есть единичная сфера в пространстве H). При каждом $t > 0$, каждом $m \in \mathbf{N}$ и каждом $\rho \in \Sigma(H)$ определим следующие функционалы:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{t,m,\rho}(v) &= \langle \rho, \mathbf{P}_{\mathbf{U}_{L^*}(t)v} \rangle, & v \in S_1(H_0^m(t)); \\ \varphi_1^{t,m,\rho}(v) &= \langle \rho, \mathbf{Q}_m(v) \rangle, & v \in S_1(H_1^m(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда при любых $t > 0$, $m \in \mathbf{N}$, $s \in \{0, 1\}$ и $\rho \in \Sigma(H)$ непрерывный функционал $\varphi_s^{t,m,\rho}$ достигает максимума на некотором векторе v_s^m на m -мерной единичной сфере $S_1(H_s^m(t))$.

В разделе 4 работы [11] доказано, что для любых $\rho_{u_0} \in \Sigma_p(H)$, любых $m \in \mathbf{N}$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$\varphi_0^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_{u_0})}(v) = \|(u_0, v)\|^2, \quad (9)$$

а для любых $\rho_{u_0} \in \Sigma_p(H_1(t))$ справедлива оценка

$$\varphi_1^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_{u_0})}(v) - |(u_0, v)|^2 = o(1) \quad (10)$$

при $t \rightarrow \infty$ (см. лемму 4.3 из работы [11]). Поэтому существуют пределы

$$M_s(t) \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{v \in S_1(H_s^m(t))} \varphi_s^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v) = \|\mathbf{P}_{H_s(t)} u_0\|^2, \quad s = 0, 1.$$

Тогда почти дословным повтoreнием хода рассуждений работы [11] доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $t > 0$ и начальное состояние ρ_0 удовлетворяет одному из двух условий: $\rho_0 \in \Sigma_n(H_0(t))$ либо $\rho_0 \in \Sigma_n(H_1(t))$. Пусть мера $\mu \in \mathcal{M}(t)$. Тогда:

- 1) состояние ρ_0 является чистым, если и только если $\max\{M_0(t), M_1(t)\} = 1$;
- 2) если начальное состояние ρ_0 является векторным состоянием в подпространстве $H_0(t)$ (или $H_1(t)$) и $\{v_0^m\}$ (или $\{v_1^m\}$) есть последовательность векторов, доставляющих максимум функционалам $\varphi_0^{m,\rho^\mu(t,\rho_0)}$ (или $\varphi_1^{m,\rho^\mu(t,\rho_0)}$), то последовательность чистых состояний $\{\rho_{v_0^m}\}$ (или $\{\rho_{v_1^m}\}$) сходится в пространстве $B^*(H)$ к начальному состоянию ρ_0 , причем для определения начального состояния с заданной точностью достаточно решить конечное число вариационных задач.

Если вектор u_0 есть линейная комбинация $u_{00}(t) + u_{01}(t)$ векторов из подпространств $H_0(t)$ и $H_1(t)$ соответственно, а оператор $\mathbf{A} \in B(H)$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \langle \rho_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} \rangle &= \int_E (u_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_0)) d\mu = \\ &= \int_E [(u_\varepsilon(t, u_{00}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00})) + (u_\varepsilon(t, u_{01}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{01})) + \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(u_\varepsilon(t, u_{01}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00}))] d\mu. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1, во-первых, предел $\mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует и равен $\mathbf{A} \mathbf{U}_{-L}(t)^* u_{00}$: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00}) - \mathbf{A} \mathbf{U}_{-L}(t)^* u_{00}\| = 0$. Во-вторых, в силу слабой в пространстве H сходимости к нулю последовательности векторов $\{u_\varepsilon(t, u_{01}), \varepsilon \in E, \varepsilon \rightarrow 0\}$ справедливо равенство $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_\varepsilon(t, u_{01}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00})) = 0$. Следовательно, $\int_E (u_\varepsilon(t, u_{01}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00})) d\mu = 0$ и

$$\langle \rho_\varepsilon(t, u_0), \mathbf{A} \rangle = \int_E (u_\varepsilon(t, u_{00}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{00})) d\mu + \int_E (u_\varepsilon(t, u_{01}), \mathbf{A} u_\varepsilon(t, u_{01})) d\mu. \quad (11)$$

Итак, получено следующее утверждение о неразличимости начальных состояний с помощью измерений средних значений наблюдаемых (11) в один момент времени $t > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $t > 0$ и вектор состояния $u_0 \in S_1(H)$ имеет проекции u_{00} и u_{01} на подпространства $H_0(t)$ и $H_1(t)$ соответственно. Тогда для любых $\mu \in W(E)$ функционалы $\rho^\mu(t, u_{00} + e^{i\alpha} u_{01})$ совпадают при всех $\alpha \in [0, 2\pi]$.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho_0 = \rho_{u_0} \in \Sigma_p(H)$, $s \in \{0, 1\}$ и обе проекции вектора u_0 на подпространства $H_0(t)$ и $H_1(t)$ нетривиальны. Тогда, если последовательность $\{v_0^m\}$ единичных векторов пространства $H_0(t)$ удовлетворяет равенству

$$\sup_{v \in S^1(H_0^m(t))} \varphi_0^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v) = \varphi_0^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v_0^m)$$

при каждом $t \in \mathbf{N}$, то последовательность $\{v_0^m\}$ компактна в H , а любой ее частичный предел v_0^* есть единичный вектор из одномерной линейной оболочки проекции u_{00} вектора u_0 на подпространство $H_0(t)$.

Основой доказательства леммы 2 служит равенство (9). Пусть выполнены условия леммы 2 и $v_0^* \in H_0(t)$ – один из частичных пределов последовательности элементов $\{v_0^m\}$, доставляющих максимум функционалам $\varphi_0^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}$. При каждом $t \in \mathbf{N}$ и каждом $t > 0$ определим функционал

$$\psi^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v) = \varphi_1^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v) - M_0(t)(\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)v_0^*, \mathbf{Q}_m(v)\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)v_0^*), \quad v \in S_1(H_1^m(t)).$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда при каждом $t > 0$ и $m \in \mathbf{N}$ функционал $\psi^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v)$ не зависит от выбора частичного предела v_0^* и достигает максимума $M^m(t)$ в некоторой точке $v_1^m \in S_1(H_1^m(t))$. При этом последовательность $\{M^m(t)\}$ сходится, и ее предел $M(t)$ удовлетворяет равенству $M(t) = 1 - M_0(t)$, а последовательность $\{v_1^m\}$ компактна в пространстве H , и любой ее частичный предел v_1^* допускает представление $v_1^* = (M(t))^{-1/2}e^{-i\beta}u_{01}$ при некотором $\beta \in [0, 2\pi]$.

Лемма 3 может быть доказана на основании равенств (10) и (11).

Согласно лемме 3 равенство $M_0(t) + M(t) = 1$ необходимо для включения $\rho_0 \in \Sigma_p(H)$, но недостаточно, ибо если $v_0 \in S_1(H_0(t))$ и $v_1 \in S_1(H_1(t))$, то для смешанного начального состояния $\rho_0 = M_0(t)\rho_{v_0} + M(t)\rho_{v_1}$ выполнены равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup(\varphi_0^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v)) = M_0(t)$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup(\psi^{t,m,\rho^\mu(t,\rho_0)}(v)) = M(t).$$

Действительно, для любого $\mathbf{A} \in B(H)$ выполняется равенство $\langle \rho^\mu(t, \rho_0), \mathbf{A} \rangle = M_0(t)\langle \rho^\mu(t, \rho_{v_0}), \mathbf{A} \rangle + M(t)\langle \rho^\mu(t, \rho_{v_1}), \mathbf{A} \rangle$. Тогда требуемое равенство следует из формул (11) и (8).

Покажем, что для однозначного определения динамики математического ожидания $\rho^\mu(t, \rho_{u_0})$ процесса $\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0})$ с чистым начальным состоянием ρ_{u_0} достаточно знать значения математического ожидания в два различных момента времени.

Пусть при заданном $t > 0$ значения $M_0(t)$, $M(t)$ удовлетворяют равенству $M_0(t) + M(t) = 1$ и элементы v_0^* и v_1^* суть частичные пределы последовательностей $\{v_0^m\}$ и $\{v_1^m\}$ из лемм 2 и 3. Если $M_0(t) = 0$ (либо $M(t) = 0$), то начальный вектор u_0 целиком лежит в подпространстве $H_1(t)$ (либо $H_0(t)$), и согласно теореме 2 начальное состояние ρ_{u_0} совпадает с $\rho_{v_1^*}$ (либо с $\rho_{v_0^*}$). Исследуем случай, когда для выбранного момента времени $t > 0$ выполняется соотношение $M_0(t) \in (0, 1)$. Положим $H_0 = \bigcap_{\tau > 0} H_0(\tau)$, определим по вектору $v_0^*(t) \in H_0(t)$ число

$$T^* = \inf\{s \geq t : \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(s-t)v_0^*(t) \in H_0\}$$

и положим $T^* = +\infty$, если $\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(s)v_0^*(t) \notin H_0$ при любом $s > 0$. Тогда существует такое $t_1 \in (0, T^*)$, что $M_0(t_1) \neq M_0(t)$ (см. предложение 1, а также работу [7]).

Так же, как и лемма 1, с помощью метода математической индукции доказываются

ЛЕММА 4. Пусть $t > 0$, $\{t_j, j \in \mathbf{N}\}$ – некоторая нумерация положительных рациональных чисел и $t_0 = t$. Пусть в пространствах $H_1(t_j)$ выбраны ортонормированные базисы $\{e_k^j\}$ и $\{\varepsilon_k\}$ – бесконечно малая последовательность положительных чисел. Тогда каждому числу $m \in \mathbf{N}$ соответствует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_k^m\}$ последовательности $\{\varepsilon_k\}$, что выполнены следующие утверждения:

1) для всех $k, l \in \overline{1, m}$, всех $p \in \overline{0, m}$ и любых $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $i \neq j$, выполнено неравенство

$$|(\mathbf{U}_{\varepsilon_i^m}(t_p)e_k^p, \mathbf{U}_{\varepsilon_j^m}(t_p)e_l^p)| < 2^{-(i+j+m)};$$

2) для каждого $q \in \overline{1, m}$ последовательность $\{\varepsilon_i^q\}$ является подпоследовательностью $\{\varepsilon_i^{q-1}\}$, где $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_i$, $i \in \mathbf{N}$. Кроме того, существует мера $\nu \in W(E)$ такая, что для любого $m \in \mathbf{N}$ выполнено равенство $\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^m) = 1$.

Пусть ν – мера, существование которой установлено леммой 4. Тогда для каждого числа t_j , $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, и меры ν справедливы утверждения лемм 2 и 3. Поэтому, если $\rho_0 \in \Sigma_p(H)$, то существуют частичные пределы $v_0^*(t_j)$, $v_1^*(t_j)$ последовательностей, элементы которых реализуют максимумы функционалов $\varphi_0^{t_j, m, \rho^\nu(t_j, \rho_0)}$, $\psi^{t_j, m, \rho^\nu(t_j, \rho_0)}$ соответственно, и существуют пределы $M_0(t_j) = \lim_{m \rightarrow \infty} M_0^m(t_j)$ и $M(t_j) = \lim_{m \rightarrow \infty} M^m(t_j)$. В пространстве $B^*(H)$ определим кривые

$$\mathcal{C}(t_j) = \{\rho_{(M_0(t_j))^{1/2}v_0^*(t_j) + e^{i\alpha}(M(t_j))^{1/2}v_1^*(t_j)}, \alpha \in [0, 2\pi)\}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $t > 0$ и ρ_0 – нормальное состояние.

1. Если состояние ρ_0 чистое, то выполнены равенства

$$M_0(t) + M(t) = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{v \in S_1(H_0(t))} [\varphi_0^{t, m, \rho^\mu(t, \rho_0)}(v) - M_0(t)|(v_0^*, v)|^2] = 0$$

и включение $\rho_0 \in \mathcal{C}(t)$.

2. Если равенство $M_0(t) + M(t) = 1$ выполнено и $M_0(t) \in (0, 1)$, то существует такое рациональное число $t_j \in (0, T^*)$, что $M_0(t_j) \neq M_0(t)$. Кроме того, пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{v \in S_1(H_0(t))} [\varphi_0^{t, m, \rho^\mu(t, \rho_0)}(v) - M_0(t)|(v_0^*, v)|^2] = 0$. Тогда для включения $\rho_0 \in \Sigma_p(H)$ достаточно, чтобы $M_0(t_j) + M(t_j) = 1$. В этом случае кривые $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{C}(t_j)$ имеют единственную общую точку, которая и является начальным состоянием ρ_0 .

Математическое ожидание $T^\nu(t)$ случайного процесса $T_\varepsilon(t)$ как функции переменной t не является однопараметрической полугруппой преобразований банахова пространства $B^*(H)$: $T^\nu(t + \Delta t)\rho_{u_0} \neq T^\nu(\Delta t)(T^\nu(t)\rho_{u_0})$, ибо существуют состояния $\rho_{u_{00} + e^{i\alpha}u_{01}}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, имеющие согласно предложению 2 общий образ при отображении $T^\nu(t)$, которые в силу теоремы 3 имеют различные образы при отображении $T^\nu(t + \Delta t)$ с некоторым $\Delta t > 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00265, 10-01-00395), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. и Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/500).

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Современная математика, РХД, М., Ижевск, 2002.
- [2] L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum Theory and its Stochastic Limit*, Texts Monogr. Phys., Springer, Berlin, 2001.
- [3] Н. Н. Боголюбов, *О некоторых статистических методах в математической физике*, АН УССР, Киев, 1945.
- [4] Н. Н. Боголюбов, “О некоторых эргодических свойствах непрерывных групп преобразований”, *Избранные труды*. т. I, Наукова думка, Киев, 1969, 561–569.
- [5] В. Ж. Сакбаев, *Тр. МИАН*, **261** (2008), 258–267.
- [6] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.
- [7] В. Ж. Сакбаев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 683–699.
- [8] В. С. Варадарайн, *Матем. сб.*, **55(97)**:1 (1961), 35–100.
- [9] Г. Г. Амосов, В. Ж. Сакбаев, *Труды СамГУ*, **8**:1(67) (2008), 479–494.
- [10] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1969.
- [11] В. Ж. Сакбаев, *Труды МФТИ*, **1**:4 (2009), 126–147.